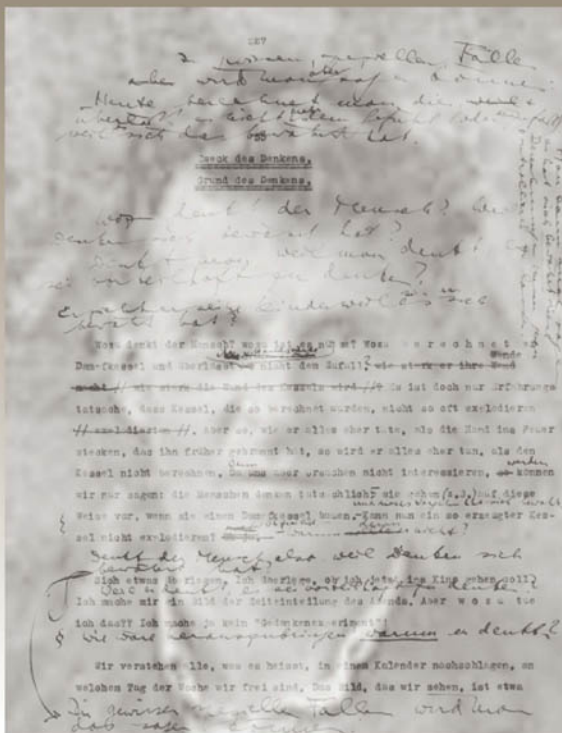


Ludwig Wittgenstein

The Big Typescript:

TS 213



Edited and Translated by
Grant Luckhardt and Maximilian Aue

The Big Typescript
TS 213

The Big Typescript TS 213

Ludwig Wittgenstein

Kritische zweisprachige Ausgabe
Deutsch–Englisch

herausgegeben und übersetzt
von

C. Grant Luckhardt und Maximilian A. E. Aue

The Big Typescript TS 213

Ludwig Wittgenstein

German–English Scholars' Edition

edited and translated
by

C. Grant Luckhardt and Maximilian A. E. Aue

© 2005 by the Trustees of the Wittgenstein Estate

BLACKWELL PUBLISHING
350 Main Street, Malden, MA 02148-5020, USA
9600 Garsington Road, Oxford OX4 2DQ, UK
550 Swanston Street, Carlton, Victoria 3053, Australia

The right of C. Grant Luckhardt and Maximilian A. E. Aue to be identified as the Authors of the Editorial Material in this Work has been asserted in accordance with the UK Copyright, Designs, and Patents Act 1988.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, except as permitted by the UK Copyright, Designs, and Patents Act 1988, without the prior permission of the publisher.

First published 2005 by Blackwell Publishing Ltd

1 2005

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Wittgenstein, Ludwig, 1889–1951.

[Big Typescript, TS 213. English & German]

The Big Typescript, TS 213 / Ludwig Wittgenstein ; edited and translated by C. Grant Luckhardt and Maximilian A. E. Aue.— German–English scholars' ed.
p. cm.

English and German.

Includes bibliographical references and index.

ISBN-13: 978-1-4051-0699-3 (hardcover : alk. paper)

ISBN-10: 1-4051-0699-9 (hardcover : alk. paper)

1. Semantics (Philosophy) 2. Logic, Symbolic and mathematical. 3. Mathematics—Philosophy. I. Luckhardt, C. Grant, 1943– II. Aue, Maximilian A. E. III. Title.

B3376.W563B4713 2005

192—dc22

2004030873

A catalogue record for this title is available from the British Library.

Set in 10/12pt Ehrhardt
by Graphicraft Ltd., Hong Kong
Printed and bound in the United Kingdom
by TJ International Ltd, Padstow, Cornwall

The publisher's policy is to use permanent paper from mills that operate a sustainable forestry policy, and which has been manufactured from pulp processed using acid-free and elementary chlorine-free practices. Furthermore, the publisher ensures that the text paper and cover board used have met acceptable environmental accreditation standards.

For further information on
Blackwell Publishing, visit our website:
www.blackwellpublishing.com

Wittgensteins „Big Typescript“ war Herrn Professor G. H. von Wright ein besonderes Anliegen. Er hat unser Vorhaben stets unterstützt. Dieser Band ist seinem Andenken agewidmet.

To the memory of Professor G. H. von Wright, who supported our efforts and who was eager for this book to appear.

Einleitung der Herausgeber

Der Text

Vom sogenannten „Big Typescript“¹ gibt es drei Versionen. Die erste ist der unkorrigierte Durchschlag des Typoskripts, das von einem „Typisten“² wahrscheinlich im Sommer 1933, hergestellt wurde.³ Die zweite Version – die wir im folgenden zusammen mit einer englischen Übersetzung im en face Format herausgeben – hat das von Wittgenstein mit vielen handschriftlichen Zusätzen und Änderungen versehene Original zur Grundlage. Die Arbeit an diesen Zusätzen und Änderungen erstreckte sich wohl von unmittelbar nach der Fertigstellung des Typoskripts bis ins Jahr 1937. (Die dritte Version ist bis auf einige handschriftliche Bemerkungen, die nach Wittgensteins Tod von G. H. von Wright und G. Kreisel den *Grundlagen der Mathematik*, dem letzten Teil des „Big Typescripts“, hinzugefügt wurden, mit der zweiten identisch.)

Für das Typoskript gibt es viele Quellen. Am 18. 1. 1929 kehrte Wittgenstein nach Cambridge zurück, um als „fortgeschrittener Student“ sein Studium wiederaufzunehmen.⁴ Rund zwei Wochen danach begann er, ein Kontobuch mit Notizen zu füllen, denen er die Überschrift „I. Band, Philosophische Bemerkungen“ gab. Die erste Eintragung lautet: „Ist ein Raum denkbar, der nur alle rationalen aber nicht die irrationalen Punkte enthält? Und das heißt nur: Sind die irrationalen Zahlen nicht in den rationalen präjudiziert?“ Da diese Bemerkung später unverändert in das „Big Typescript“ übernommen wurde, kann man sagen, daß die Arbeit daran 1929, mit Wittgensteins Rückkehr zur Philosophie, einsetzt.

Zwischen diesem Eckdatum und 1933 wuchs das Corpus dieser Bemerkungen – verteilt auf weitere 9 „Bände“ und 4 Taschennotizbücher – auf ca. 3292 Seiten an. Aus diesen 14 Manuskripten wurden zunächst durch Auswahl, Korrektur und Zusätze vier Typoskripte.⁵

1 Von wem dieser Name stammt, ist uns unbekannt. Dazu befragt, haben die Professoren Elizabeth Anscombe, Norman Malcolm und Georg Henrik von Wright übereinstimmend ausgesagt, sie wüßten es nicht.

2 Siehe unten, S. 204, Fußnote 143.

3 Die erste Version erschien als 11. Band der Wiener Ausgabe von Wittgensteins Werken, (hg. v. Michael Nedo, Wien: Springer-Verlag, 2000).

4 Man weiß das deswegen so genau, weil John Maynard Keynes in einem mit diesem Datum datierten Brief an seine Schwester schrieb: „Well, God has arrived. I met him on the 5.15 train.“ (Zit. nach: Ray Monk, *Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius*, New York: Penguin Books, 1990, S. 255).

5 Im von von Wright erstellten Werkverzeichnis sind diese Bände folgendermaßen numeriert: die zehn von Wittgenstein mit „I“ bis „X“ bezeichneten Manuskriptbände tragen die Nummern 105–14, die vier Taschennotizbücher die Nummern 153a, 153b, 154 und 155, die vier Typoskripte (TS) die Nummern 208, 209, 210 und 211. Die Manuskriptbände I–IV wurden zuerst geschrieben – zwischen 1929 und 1930. Die Bände I–III und die erste Hälfte von Band IV bilden die Grundlage des 1930 entstandenen TS 208. 1930 entstand aus Band III und Teilen von Band IV das TS 209, das Wittgenstein mit der Überschrift „Philosophische Bemerkungen“ versah. Gleichfalls in diesem Jahr entstand auch das TS 210, zusammengestellt aus dem

Editors' and Translators' Introduction

The Text

“The Big Typescript”, as it has come to be called,¹ exists in three versions. The first is the unmarked carbon-copy of the text, as it was produced by a typist,² probably in the summer of 1933.³ The second and third versions consist of the top copy of the typed text, on which Wittgenstein made numerous handwritten additions and changes, probably beginning almost immediately after it was typed and continuing into 1937. It is the second version that we are publishing here, together with an *en face* English translation. (The third version differs from the second in containing some handwritten annotations in the mathematics section entered after Wittgenstein’s death by G. H. von Wright and G. Kreisel.)

The sources for the typescript are numerous. Wittgenstein returned to Cambridge on 18 January 1929, to resume his studies, studying for a PhD as an “Advanced Student”.⁴ Some two weeks later, on 2 February, he began writing in a blank accounts book, which he titled “Volume I, Philosophical Remarks”. The first entry reads: “Is a space conceivable that contains only all rational points but not the irrational ones? And that only means: Aren’t the irrational numbers prejudged in the rational ones?” In so far as this remark is later incorporated without change into “The Big Typescript”, it can be said that this work “begins” at the time of his return to philosophy in 1929.

In the intervening years Wittgenstein produced nine more so-called “Volumes” and four sets of pocket notebooks, totalling some 3,292 pages of handwritten remarks. He made selections from all fourteen of these manuscripts, editing and adding to them as he went along, to produce four typescripts.⁵ These typescripts were then cut into bits, edited, added

1 We do not know who gave it this name. Professors Elizabeth Anscombe, Norman Malcolm and Georg Henrik von Wright have all said (in private conversations) that they did not know.

2 We infer that this was a man, from Wittgenstein’s use of the masculine noun in footnote 114, p. 204e.

3 This version has been edited by Michael Nedo and published as Volume 11 of the Wiener Ausgabe (Vienna: Springer-Verlag, 2000).

4 This date is based on a letter of the same date from John Maynard Keynes to his sister, in which he remarks, “Well, God has arrived. I met him on the 5.15 train” (quoted in Ray Monk’s *Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius*, New York: Penguin Books, 1990, p. 255).

5 The numbers for these volumes in the von Wright catalogue are as follows: the ten manu-

script volumes (numbered by Wittgenstein I–X) are numbers 105–14, the four pocket notebooks are 153a, 153b, 154 and 155, and the typescripts are numbers 208, 209, 210, and 211. Manuscript volumes I–IV (105–8) were the first to be written, between 1929 and 1930. In 1930 Wittgenstein based TS 208 on the first 3 of these volumes plus the first half of the fourth. TS 209, to which he gave the title “Philosophical Remarks”, was based on the third and part of the fourth and was typed in 1930. TS 210 was created out of the second half of Volume IV, also in 1930. Volumes V to the first part of Volume X were written between 1930 and 1932, and TS 211, produced in 1931/2, was based on those volumes. Volumes VI–IX were in turn based on the four pocket notebooks, which were written in 1931/2.

Diese Typoskripte wurden dann durch Zerschneiden und Neuordnen, durch Umformulierungen und Zusätze zu einem neuen Typoskript, dem TS 212. Die Bemerkungen darin sind Kapiteln mit schlagzeilenartigen Kapitelüberschriften zugeordnet, und diese Kapitel sind ihrerseits wieder zu größeren, gleichfalls mit Überschriften versehenen Abschnitten zusammengefaßt. Das „Big Typescript“ entstand dann, als Wittgenstein das TS 212 1933 unter Einbeziehung weiterer Änderungen und Zusätze und unter Hinzufügung eines Inhaltsverzeichnisses von einem Typisten kopieren ließ. Angesichts dieser Entstehungsgeschichte verwundert es nicht, daß die Abfolge der Bemerkungen im „Big Typescript“ eine gänzlich andere ist als in den ihm zugrundeliegenden Manuskripten. Beispielsweise findet sich die erste Bemerkung von Manuskriptband I erst ganz am Ende des „Big Typescripts“, auf S. 738 (Siehe S. 489 dieser Ausgabe).

Bald, vielleicht unmittelbar nach Fertigstellung des „Big Typescripts“, begann Wittgenstein mit der Revision. Manche der zwischen doppelten Schrägstrichen plazierte alternativen Worte und Satzteile strich er aus, andere blieben unberührt; er strich auch getippte und handgeschriebene Worte, Wortgruppen, Sätze, Absätze und Bemerkungen aus, setzte handschriftlich neue Alternativen ein, korrigierte Tippfehler, trennte, bzw. verband Buchstaben, Absätze und Bemerkungen, zeigte mit Hilfe von Pfeilen und anderen Verweiszeichen an, wohin er einzelne Bemerkungen verlegt haben wollte, entwarf sowohl auf den Vorder- als auch auf den Rückseiten der getippten Blätter neue Bemerkungen, notierte sich Fragen und setzte Randbemerkungen und Randzeichen (Schrägstriche, Haken, Fragezeichen und – als Zeichen für „schlecht“ – langgestreckte „s“-Zeichen) ein.

Es hat den Anschein, daß die Arbeit an diesen Zusätzen den größeren Teil des Jahres 1937 in Anspruch nahm. In einer chiffrierten Tagebucheintragung vom 23. 10. dieses Jahres (MS. 119, S. 79r) schreibt Wittgenstein: „Fing an meine alte Maschinschrift anzusehen und den Weizen vom Spreu zu sondern“. Drei Tage danach heißt es:

Schreibe jetzt nicht mehr, sondern lese nur den ganzen Tag meine Maschinschrift und mache Zeichen zu jedem Absatz. Es ist *viel* denken hinter diesen Bemerkungen. Aber brauchbar für ein Buch sind doch nur wenige ohne Umarbeitung, aus verschiedenen Gründen. Ich habe jetzt beinahe ein Viertel des Ganzen durchgesehen. *Wenn* es also glatt geht, könnte ich in ca. 6 Tagen damit fertig sein. Aber was dann? Nun, versuchen das brauchbare zu sammeln. – Freilich, das ist sehr schwer! und ich dachte heute manchmal, es werde vielleicht für mich bedeuten, von hier wegzugehen, etwa zu Drury, so Gott will. Denn ich weiß nicht ob ich diese Arbeit in dieser Einsamkeit machen kann. Aber es wird sich alles zeigen.

Wahrscheinlich fand diese Sonderung des Spreus vom Weizen Ende 1937 statt und kam im ersten Teil von Manuskriptband XII (MS 116) zum Ausdruck.⁶ In die ersten 135 Seiten dieses Manuskripts ist viel von den ersten 196 Seiten des „Big Typescripts“ eingegangen. Manuskriptband XII setzt mit der ersten Bemerkung des „Big Typescripts“ ein, und es folgen dann – mehr oder weniger in der Reihenfolge des „Big Typescripts“ – viele weitere, oft wörtlich übernommene Bemerkungen. Einige wurden freilich geändert und es kam auch neues Material hinzu.

Material des zweiten Teils von Band IV. Das 1931/32 entstandene TS 211 hat die Manuskriptbände V–IX und den ersten Teil von Band X – geschrieben zwischen 1930 und 1932 – zur Grundlage. Die Manuskriptbände VI bis einschließlich IX beruhen ihrerseits auf den vier Taschennotizbüchern, die 1931/32 entstanden.

6 Belege für diese Annahme finden sich bei G. P. Baker und P. M. S. Hacker in *Wittgenstein: Understanding and Meaning, Volume 1 of An Analytical Commentary on the Philosophical Investigations, Part II – Exegesis §§1–184, Second Edition, G. P. Baker and P. M. S. Hacker, Extensively Revised* by P. M. S. Hacker (Oxford: Blackwell, 2004).

to and collected together. He grouped remarks together to form chapters, to which he gave titles – often in the style of newspaper headlines – and groups of chapters were collected as sections, which he also titled. It is from this collection of clippings – TS 212 – that Wittgenstein produced “The Big Typescript” in 1933, making changes and additions as he read from the clippings and adding a Table of Contents. It is important to note that owing to this method of composition, the remarks in this work do not occur in anything that resembles the order in which they were written in the predecessor manuscripts. The first entry in Volume I, for example, does not appear in “The Big Typescript” until very near the end – page 489 of this edition.

Soon – perhaps immediately – after the original version of “The Big Typescript” emerged from the typewriter, Wittgenstein set about revising its pages – striking through some alternative words and phrases he had had typed in between sets of double slashes, leaving other alternatives unmarked, striking through and crossing out both typed and handwritten words, sentences, phrases, paragraphs within remarks and remarks, adding new handwritten alternatives, correcting typographical errors, inserting and deleting spaces between letters, paragraphs and remarks, drawing arrows or adding symbols and other directions to indicate where he wanted remarks moved, composing new remarks on both the front and reverse sides of the typed pages, asking questions and making marginal comments, and entering marginal marks such as slashes, ticks, question marks, and *Schlecht* marks (J – indicating that he thought a passage bad).

It appears that some of these additions were being made well into 1937. In a coded diary entry on 23 October of that year (MS 119, p. 79r) he says he “[b]egan to look at my old typescript and to separate the wheat from the chaff”. Three days later he writes:

I'm not writing any more now, but spent the entire day reading my typescript and making marks on each paragraph. There's a *great* deal of thinking behind these remarks. But without revision they're not of much use for a book, for various reasons. So far I've looked through almost a quarter of the whole thing. *If* things go this smoothly I could be finished with it in about 6 days. But what then? Well, to try to gather together what is useful. – Of course that's very difficult! And today I thought perhaps it would mean leaving here, perhaps to go to Drury's, God willing. For I don't know whether I can do this work in solitude. But we'll see.

It seems likely that this process of separating the wheat from the chaff occurred in late 1937 and resulted in what is contained in the first part of Volume XII (MS 116).⁶ In the first 135 pages of that manuscript Wittgenstein includes a great deal of material from the first 196 pages of “The Big Typescript”. Volume XII begins with the first remark in “The Big Typescript” and continues with many verbatim remarks in more or less the same order as they appear there. A few are changed, and new material is added.

6 This is well documented in G. P. Baker and P. M. S. Hacker, *Wittgenstein: Understanding and Meaning, Volume 1 of An Analytical Commentary on the Philosophical Investigations, Part II:*

Exegesis §§1–184, Second Edition, G. P. Baker and P. M. S. Hacker, Extensively Revised by P. M. S. Hacker (Oxford: Blackwell Publishing, 2004).

Manuskriptband XII ist allerdings nur einer von drei Versuchen, in neuen Manuskripten am Material aus dem „Big Typescript“ weiterzuarbeiten. Die anderen beiden Versuche, hier als (1) und (2) gekennzeichnet, setzen gleichfalls mit der ersten Bemerkung des „Big Typescripts“ ein, entwickeln sich dann aber in unterschiedliche Richtungen:

- (1) ist der längere dieser Versuche. Er umfaßt den Manuskriptband X (MS 114) ab S. 31 und findet dann im Manuskriptband XI (MS 115) von S. 1 bis einschließlich S. 117 seine Fortsetzung. Die erste Seite des Manuskriptbands XI ist auf den 14. 12. 1933 datiert. Diese Bände X und XI enthalten viel dem „Big Typescript“ entstammendes, zum Teil revidiertes Material. Punkto Anordnung unterscheidet sich dieses Material aber beträchtlich von dem im „Big Typescript“: Die übernommenen Bemerkungen sind vielfach mit neuem Material untermischt. Mit Ausnahme einiger Seiten, die Wittgenstein aus dem TS 211 ausgeschnitten und hier eingeklebt hatte, sind alle Bemerkungen mit der Hand geschrieben.⁷

Nach Fertigstellung dieser Revision versah sie Wittgenstein (auf S. 1) mit der Überschrift „Umarbeitung“. Darunter schrieb er: „Zweite Umarbeitung im großen Format“, ein Hinweis auf den obenerwähnten zweiten Versuch, Material aus dem „Big Typescript“ umzuarbeiten.

- (2) Das *Große Format* (MS 140) ist also der zweite Ansatz zur Umarbeitung von Material, das dem „Big Typescript“ entnommen wurde. Er erfolgte möglicherweise zur gleichen Zeit wie der erste oder kurz danach. Dieses Manuskript ist kurz – 39 Seiten lang – und befaßt sich vor allem mit den Themen Verstehen und Verwendung von Worten, Sätzen und Sprache. Wieder sind die Bemerkungen, die dem „Big Typescript“ unter Einhaltung ihrer Abfolge entnommen sind, mit neuem Material untermischt, darunter auch mit solchem aus TS 212, das nicht ins „Big Typescript“ eingegangen ist. In den beiden Versuchen zur Umarbeitung (1) und (2) geht aus Hinweisen hervor, daß Wittgenstein Materialien aus dem einen in den jeweils anderen übertragen wollte.

Das „Big Typescript“ ist als Ursprung vieler Bemerkungen, die in späteren Manuskripten einer strengen Auswahl unterzogen wurden, von großem Nutzen. Es ist eine Quelle vieler Textstellen in den diversen Versionen der *Philosophischen Untersuchungen* und nimmt thematisch viel von dem vorweg, was in späteren Schriften zum Ausdruck kommt.

Editorische Richtlinien

Wie bereits erwähnt, ist die zweite Version des „Big Typescripts“, die wir hiermit veröffentlichen, mit unzähligen Änderungen versehen, und wir möchten im folgenden erklären, wie wir sie dargestellt haben.

Unser übergreifendes Ziel war es, den Text mit seinen Varianten zugänglich zu machen, ohne seine Lesbarkeit wesentlich zu beeinträchtigen. Infolgedessen haben wir im Fall von Varianten jeweils nur eine in den Text aufgenommen und alle anderen – stehengelassene und ausgestrichene – in die Fußnoten versetzt. Meist haben wir uns für die Variante entschieden, die wir für die zuletzt eingetragene hielten. In einigen Fällen haben wir uns aber von grammatischen Kriterien leiten lassen. D.h. dort, wo Wittgenstein die durch eine spätere Variante bedingten grammatischen Umstellungen nicht durchführte, haben wir eine

7 Das eingeklebte Material befindet sich auf den Seiten 95–100 des Manuskriptbands XI. Die

gleichen Seiten finden sich auch – mit neuer Numerierung – im „Big Typescript“.

Volume XII is in fact only one of three attempts to rework material from “The Big Typescript” in successor manuscripts. Like Volume XII, the other two also begin with the first remark of “The Big Typescript” and then proceed in various directions. These volumes are:

- (1) Volume X (von Wright no. 114), beginning on page 31 and continuing for 197 pages to the end of that volume, and resuming in Volume XI (no. 115) and continuing up to page 117. The first page of Volume XI is dated 14 December 1933. Volumes X and XI contain much material from “The Big Typescript”, some of it revised, but the order in which it appears is quite different from its order in “The Big Typescript”. The remarks are copiously interspersed with new material. All of the remarks are in handwriting, except for several pages Wittgenstein pasted in from TS 211.⁷ Some time after he had completed this revision he went back to the first page and wrote “Reworking” as its title. Under that he wrote “Second reworking in the *Großes Format*”, which refers to his next effort to rework material from “The Big Typescript”.
- (2) The *Großes Format* (no. 140). This is a second reworking of a selection of material from “The Big Typescript”, possibly done concurrently with the first reworking, or soon thereafter. It is short – 39 pages – and is centred on the themes of the understanding and use of words, propositions and language. It includes references to (1), in which directions are given for inserting material from this reworking into that one, and vice versa. New material, including some remarks from TS 212 not included in “The Big Typescript”, is interspersed among the remarks from “The Big Typescript”, but the latter appear in the same order as in the original.

“The Big Typescript” is a fruitful source for many less inclusive selections of remarks in Wittgenstein’s later manuscripts. It is a source for many of the passages in the various versions of *Philosophical Investigations*, and its themes forecast much of what is to follow in his writings.

Editing the Text

The version of “The Big Typescript” that we are presenting here is rife with Wittgenstein’s alterations, and it may interest the reader to know how we have dealt with them.

We have been guided in general by the desire to present a scholarly yet readable text – i.e. one whose alterations are accessible to the scholar, but that does not require the reader to choose among multiple alternatives in order to create intelligible sentences. As a result we have selected among (sometimes numerous) unrejected alternatives (i.e. ones that Wittgenstein did not strike through) to present a coherent set of remarks in the main body of the text, and we have included the remainder (including rejected alternatives) in footnotes. Most often we have selected for the main body what we took to be the last unrejected alternative Wittgenstein entered into the manuscript. When this was not our choice, we often

⁷ The pasted material occurs between pages 95 and 100 of Volume XI and consists of pages that were

themselves included and renumbered in “The Big Typescript”.

frühere gewählt, die grammatisch mit den anderen Teilen der betreffenden Bemerkung übereinstimmt. Manchmal fiel unsere Wahl auch auf eine frühere Variante, weil eine spätere in eine Richtung zu führen schien, die von Wittgenstein an dieser Stelle nicht weiterverfolgt wurde. Wir haben uns jedenfalls bemüht, unsere Entscheidungen strengeren Kriterien zu unterwerfen als denen, die Wittgenstein aufgestellt haben soll. Auf die Frage Frau Professor Anscombes hin, wie sie bei der Herausgabe seines Werkes hinsichtlich seiner Varianten verfahren solle, soll er gesagt haben: „Toss a coin“.⁸

Neben den Varianten finden sich im „Big Typescript“ viele handschriftliche Zusätze verschiedener Länge: Worte, Sätze, Absätze und ganze Bemerkungen. In den meisten Fällen ist es klar, wo diese hingehören, bei den zusätzlichen handschriftlichen Bemerkungen aber manchmal nicht. Im Fall der Bemerkungen, die auf den (leeren) Rückseiten der getippten Blätter stehen, haben wir angenommen, daß sie zu den ihnen jeweils gegenüberliegenden (getippten) Bemerkungen auf der Vorderseite des nächsten Blattes gehören und dementsprechend plaziert. Weitere handschriftliche Bemerkungen, oft allgemeiner Art und eher einen Kommentar zum Thema eines Kapitels als eine Auseinandersetzung mit spezifischen Anliegen darstellend, finden sich bei den Kapitelüberschriften. In der Regel setzen diese Bemerkungen unmittelbar unter der Kapitelüberschrift, aber oberhalb der ersten (getippten) Bemerkung ein, um dann, wenn da der Platz knapp wurde, oberhalb der Kapitelüberschrift fortgesetzt zu werden. In diesen Fällen weichen wir von einer einfachen Wiedergabe der Seite „von oben nach unten“ ab und geben zuerst die Kapitelüberschrift, dann die sie umgebende(n) handschriftliche(n) Bemerkung(en) in der oben erörterten Abfolge und dann erst die erste getippte Bemerkung.

Die allen unseren Fußnoten vorangehenden Buchstaben in runden Klammern dienen zur genaueren Kennzeichnung des jeweils folgenden Materials. (V) bedeutet, daß die Fußnote eine Variante oder mehrere Varianten (eines Wortes, Satzes oder einer Bemerkung) anführt. Von Wittgenstein durchgestrichene Varianten sind in den Fußnoten durch eine einfache waagrechte Durchstreichung gekennzeichnet. Folgt auf das (V) ein einziges Wort, ist es eine Alternative zu dem Wort im Text, das der Fußnote unmittelbar vorausgeht. Im Fall von mehreren auf das (V) folgenden Worten haben wir diese um die ihnen im Text unmittelbar vorausgehenden ein oder zwei Worte erweitert, damit deutlich wird, an welcher Stelle die Variante einzusetzen ist. (M) bedeutet, daß das darauffolgende Material eine (meist handschriftlich eingesetzte) Randbemerkung ist. (O) deutet auf Tippfehler, aber auch auf einige orthographische Fehler im Original hin, die wir in unserem Text korrigiert haben. Wo die Setzung von einfachen, bzw. doppelten Anführungszeichen im Original nicht den einschlägigen Regeln entsprach, haben wir sie stillschweigend umgestellt. Soweit es dem Verständnis nicht abträglich war, haben wir aber sonst Wittgensteins oft eigenwillige, unorthodoxe Schreibweise – sowohl was Orthographie (etwa Groß- und Kleinschreibung) als auch Interpunktion (insbesondere Beistrichsetzung) betrifft – in unseren Text übernommen. Wohl wegen der englischen Tastatur der Schreibmaschine, auf der das „Big Typescript“ getippt wurde, sind die Buchstaben ß, Ä, Ö und Ü jeweils durch ss, Ae, Oe, und Ue ersetzt worden. In unserem Text haben wir das nicht nachvollzogen. Im „Big Typescript“ finden sich an zahlreichen Stellen Verweiszeichen. Sie zeigen Umstellungen an, die Wittgenstein im Zuge seiner Überarbeitung dieses Textes ins Auge faßte. Wir haben sie mit (R) gekennzeichnet. Unseren

8 Siehe Michael Nedo (Hg.), *Ludwig Wittgenstein, Wiener Ausgabe, Einführung – Introduction* (Wien: Springer-Verlag, 1993) S. 75.

made it on the basis of grammatical coherence. That is to say, when a later alternative required grammatical changes in the rest of the sentence that Wittgenstein had neglected to make, we chose an earlier alternative which was grammatical. Sometimes we chose an earlier alternative because a later one seemed to be incomplete, in the sense that it took the discussion in a new direction that Wittgenstein never continued in this text. In all cases, our decision as to which alternative should appear, and where, has been more principled than the advice that Wittgenstein himself is said to have given to Professor Anscombe. When she pressed him for advice as to how in editing his work she should choose among alternatives, he reportedly told her, "Toss a coin".⁸

In addition to editing the text by providing alternative formulations of words and phrases, over the years Wittgenstein also added numerous words, sentences, paragraphs and remarks. It is usually clear where these are to be placed, but sometimes the remarks require a decision as to where they belong. We have used two principles to decide where in the body of the typescript to place Wittgenstein's additional handwritten remarks. When he wrote them on the backs of typed pages, he usually placed them opposite the point at which they were to be inserted on the next page. We have placed them there. In addition, he often inserted remarks at the beginning of chapters. These remarks, incidentally, are often of a general nature, as if he were commenting on the topic of the chapter rather than entering into a discussion of the issues. Often he seems to have begun writing these additions just below the chapter title, but before the first typed remark. When he ran out of space he then continued writing remarks above the chapter title. Thus we take the apparent order, beginning at the top of the page, to be misleading, and so we begin the chapter with the first handwritten remark below the title, continuing on to handwritten remarks above the title, and only then to the first typed remark.

All of our footnotes are preceded by a letter in parentheses indicating the sort of material that is contained therein. (V) indicates that the footnote contains the variants of a word, sentence, or remark, with a horizontal line through the words he struck through. A single word following a (V) is obviously a variant for the single word preceding the footnote number as it occurs in the text, but for multiple words we have preceded them in the footnote with a word or two of preceding text so the reader can see where they fit. (M) indicates the marginal comments that Wittgenstein often wrote on the typescript. (O) indicates typographical errors and misspellings that we have corrected in the main body of this text. For the most part we have not corrected non-standard punctuation in the German text, such as a lack of initial word capitalization in a sentence, and we have not changed many of Wittgenstein's idiosyncratic spellings. We have substituted ß for "ss" and have inserted umlauts above capitalized vowels that require them, assuming that these symbols were lacking on the typewriter he used. We have also standardized Wittgenstein's sometimes idiosyncratic use of question marks.

8 Recounted in Michael Nedo's *Ludwig Wittgenstein, Wiener Ausgabe, Einführung – Introduction* (Vienna: Springer-Verlag, 1993), p. 75.

editorischen Anmerkungen haben wir ein (E) vorangestellt. Viele der ins „Big Typescript“ eingegangenen Bemerkungen waren in ihrer handschriftlichen Version mit Zeichnungen versehen. Diese letzteren wurden von Wittgenstein nur selten in die Maschinschrift mit übernommen, obwohl für sie manchmal Platz ausgespart ist. Wir haben sie an den entsprechenden Stellen in unseren Text eingesetzt. Die auf (F) folgende Signatur zeigt, auf welcher Seite welchen Manuskripts (in der von Wright'schen Zählung) die betreffende Zeichnung zu finden ist.

Nicht nur um der Zeichnungen willen haben wir auf die dem „Big Typescript“ vorausgehenden Manuskripte zurückgegriffen. Zuweilen haben wir daraus auch Material eingesetzt, das irrtümlich vom Typisten ausgelassen worden war oder das den für das Verständnis einer Stelle nötigen Zusammenhang herstellt. Andererseits haben wir uns aber bei der Entscheidung, welche Variante einer Stelle in den Text eingehen sollte und welche in eine Fußnote, nicht von den auf das „Big Typescript“ folgenden Manuskripten leiten lassen. Aus den späteren Manuskripten geht nur selten *eine* bevorzugte Alternative hervor, was damit zusammenhängt, daß die Wahl einer bestimmten Variante oft durch einen neuen Kontext bestimmt (und daher auch für das „Big Typescript“ nur wenig aufschlußreich) ist.

Wir haben versucht, handschriftliches Material diskret, durch eine „sans serif“ Version unserer Schriftart, als solches kenntlich zu machen.

Die von Wittgenstein verwendeten Randzeichen, die sich alle auf die daneben stehenden Bemerkungen in ihrer Gesamtheit beziehen, geben wir im Apparat so genau wie möglich wieder: das „f“, das anzeigt, daß Wittgenstein die damit versehene Bemerkung für schlecht hielt, den Haken „✓“, den einfachen Schrägstrich „/“, sowie das Fragezeichen „?“ . Auch die Zeichen „∇“ und „√“, denen meistens eine Seiten- bzw. Absatzzahl folgt, führen wir da an. Sie weisen darauf hin, daß die bezeichnete(n) Stelle(n) hier eingesetzt werden sollte(n).

Die vielen Ausstreichungen, die Wittgenstein an seinen Bemerkungen vornahm, haben wir weniger „naturgetreu“ wiedergegeben. Einfach, bzw. kreuzweise ausgestrichene Absätze oder Teile von Absätzen haben wir dort, wo die Ausstreichung beginnt, mit „///“, bzw. mit „XXX“ bezeichnet, wobei das jeweilige Zeichen bis zum Ende des Absatzes gilt. Wurden ganze Bemerkungen einfach oder kreuzweise ausgestrichen, so haben wir dies am Anfang der Bemerkung durch „///“, bzw. „XXXX“ angezeigt.

Die Paginierung des Originals findet sich in unserem deutschen Text am linken Rand. Ein auf die Seitenzahl folgendes „v“ bezeichnet die Rückseite (das Verso) der betreffenden Seite.

Weitere Zeichen, die sich im Wittgenstein'schen Original finden, haben wir unserem Verständnis gemäß interpretiert und wie folgt wiedergegeben: die Sperrung von Worten verstehen wir als eine Form der Hervorhebung und geben sie durch Kursivschrift wieder. (Aus „V e r s t e h e n“ wird also „*Verstehen*“.) Handschriftlich unterstrichenen Material verstehen wir ähnlich und geben auch dieses kursiv wieder. Sowohl die gesperrt getippten einfachen als auch die handgeschriebenen wellenförmigen Unterstreichungen haben wir als Ausdruck des Zweifels an dem darüber stehenden Material gelesen. So gekennzeichnete Worte haben wir in ‚Blaßdruck‘ wiedergegeben. Manchmal findet sich ein (getipptes oder handgeschriebenes) Fragezeichen über einem Wort, manchmal wird ein ganzer Satzteil unter Fragezeichen gestellt, indem ein „?-“ über dessen Anfang gesetzt wird und ein „-?“ über dessen Ende. Auch damit scheint uns Wittgenstein an Worten oder Wortgruppen Zweifel ausdrücken zu wollen. Es handelt sich aber hierbei wohl um eine andere Form des Zweifels als im Fall von gesperrter oder wellenförmiger Unterstreichung und wir haben daher das betreffende Material auch anders, nämlich durch punktierte Unterstreichung, gekennzeichnet. Welcher Art dieser Unterschied ist, wissen wir nicht. Ausgestrichene Worte und Satzteile, die Wittgenstein durch Unterpunktieren wiederherstellte, haben wir nicht eigens gekennzeichnet, sondern so wiedergegeben, als ob sie nie ausgestrichen gewesen wären.

(R) indicates the references Wittgenstein entered into the text indicating where in this or later manuscripts he wished to have passages moved from or to. (E) refers to our editorial comments and references. The first versions of many remarks appear in their respective manuscripts accompanied by illustrations. When he had those remarks typed in this text Wittgenstein sometimes left a space for them, but seldom bothered to transfer the illustrations. We have done so. (F) gives our references to page numbers of manuscripts preceding "The Big Typescript" in which he drew illustrations for various passages.

Not only have we used predecessor manuscripts to obtain illustrations, but sometimes also to include material that was mistakenly omitted by the typist of TS 213, or material that otherwise provides a useful context for understanding this text. On the other hand, we have not used successor manuscripts to decide which alternatives to include in the main body and which to put into footnotes, for two reasons. First, it sometimes happens that in one successor manuscript Wittgenstein preferred one of the alternatives, but in an even later manuscript he used the other (or another) alternative. This is connected with our second reason, which is that the context in which a remark is used in a successor manuscript is often quite different from that in which it appeared in "The Big Typescript", and so what is done in a successor manuscript often seems simply to be irrelevant to this text.

We have tried to make the distinction between typed and handwritten material distinguishable but unobtrusive, by presenting handwritten material in a sans serif font.

Wittgenstein himself used several symbols in the marginalia, which we indicate as follows: "f" is Wittgenstein's sign for *Schlecht*, presumably indicating what he thought a "bad" remark; "✓" is obviously a tick mark, "/" is a small slash mark that usually precedes its remark in Wittgenstein's left margin, but "///" and "////" are different things. They represent large slashes that he used to mark through whole paragraphs and remarks, respectively. "XXX" and "XXXX" indicate paragraphs and remarks, respectively, that he crossed through in both directions. "///" and "XXX" are to be understood as extending only to the end of a paragraph, whether they occur at its beginning or within it. "////" and "XXXX", on the other hand, extend through the whole remark, as does "f", "✓", and "?" in a marginal note, unless we indicate otherwise. "∨" (and sometimes "V") is a symbol more or less resembling what Wittgenstein used to indicate the need to move remarks or paragraphs.

In the German text we have included the page numbers of the original text, placing them in the left margin of our text, and using a "v" to indicate the back (verso) side.

Wittgenstein used several other symbols that we have interpreted and chosen to represent as follows. We have used italics to represent his broken spacing of words, which we understand to be a mark of emphasis (for example, we write his "V e r s t e h e n" as *Verstehen*). We understand single handwritten underlines the same way, and represent them similarly. He had the typist insert broken underlinings below several words, and he also wrote in wavy underlinings under both handwritten and typed words. We understand these to be equivalent markings, which indicate a degree of doubt about a word or phrase. We represent both of them with a fainter font than the rest of the text. Sometimes Wittgenstein typed or wrote in a question mark above a word, and sometimes over a word followed by a dash ("?-"), and then a dash followed by a question mark over a later word ("-?"). We understand these, too, to be indications of doubt about a word or phrase, and we represent them with small dotted underlines. Presumably they represent a different level of doubt than broken underlines, but we do not know what that might be. Wittgenstein used handwritten dots under the letters of crossed-through words to indicate that those words should be retained (stet marks). We have not indicated these, choosing instead just to retain the words.

Es folgt nun eine schematische Zusammenfassung der oben besprochenen Zeichen.

Editorische Abkürzungen in den Fußnoten

- (V) Variante eines Wortes, Satzes oder einer Bemerkung
- (M) Randbemerkung
- (O) Tippfehler oder orthographischer Fehler im Original
- (R) Hinweis auf eine mögliche Umstellung
- (F) Seitenangaben früherer Manuskripte, denen Zeichnungen entnommen wurden
- (E) Editorische Bemerkungen

Randzeichen

- ∫ Zeichen für „schlecht“
- ✓ Haken
- / einfacher Schrägstrich
- ∇ oder ∨ Einsetzungszeichen
- /// Absatz ganz oder teilweise schräg durchgestrichen
- //// Ganze Bemerkung schräg durchgestrichen
- XXX Absatz ganz oder teilweise kreuzweise durchgestrichen
- XXXX ganze Bemerkung kreuzweise durchgestrichen

Im Text erscheinende Zeichen

<i>Im Original</i>	<i>im vorliegenden Text</i>
<u>keine</u>	keine
<u>keine</u>	keine
k e i n e	<i>keine</i>
<u>keine</u>	<i>keine</i>
?- -?	
keine Absicht	<u>keine Absicht</u>

The following charts summarize these symbols:

Editors' footnote abbreviations

- (V) variant of a word, sentence or remark
- (M) marginal comments
- (O) original of a typographical error or misspelling
- (R) directions to move passage
- (F) page numbers of passages in which illustrations occur
- (E) comments and references by the editors

Marginal marks

- ∫ *Schlecht* mark
- ✓ tick mark
- / slash mark
- ∇ or ∨ move mark
- /// paragraph slashed through
- //// remark slashed through
- XXX paragraph crossed through
- XXXX remark crossed through

Wittgenstein's emphasis marks

<i>In original</i>	<i>This edition</i>
keine	keine
<u>keine</u>	keine
k e i n e	<i>keine</i>
<u>keine</u>	<i>keine</i>
?- -?	
keine Absicht	<u>keine Absicht</u>

Inhaltsverzeichnis

<i>Verstehen.</i>	1
1 Das Verstehen, die Meinung, fällt aus unsrer Betrachtung heraus.	2
2 „Meinen“ amorph gebraucht. „Meinen“ mehrdeutig.	5
3 Das Verstehen als Korrelat einer <i>Erklärung</i> .	8
4 Das Verstehen des Befehls, die Bedingung dafür, daß wir ihn befolgen können. Das Verstehen des Satzes, die Bedingung dafür, daß wir uns nach ihm richten.	12
5 <i>Deuten</i> . Deuten wir jedes Zeichen?	16
6 Man sagt: ein Wort verstehen heißt, wissen, wie es gebraucht wird. Was heißt es, das zu wissen? Dieses Wissen haben wir sozusagen im Vorrat.	18
6a Einen Satz im Ernst oder Spaß meinen, etc.	21
<i>Bedeutung.</i>	22
7 Der Begriff der Bedeutung stammt aus einer primitiven philosophischen Auffassung der Sprache her.	23
8 Bedeutung, der Ort des Wortes im grammatischen Raum.	26
9 Die Bedeutung eines Wortes ist das, was die Erklärung der Bedeutung erklärt.	29
10 „Die Bedeutung eines Zeichens ist durch seine Wirkung (die Assoziationen, die es auslöst, etc.) gegeben.“	33
11 Bedeutung als Gefühl, hinter dem Wort stehend; durch eine Geste ausgedrückt.	37
12 Man tritt mit der hinweisenden Erklärung der Zeichen nicht aus der Sprachlehre heraus.	38
13 „Primäre und sekundäre Zeichen“. Wort und Muster. Hinweisende Definition.	40
14 Das, was die Philosophie am Zeichen interessiert, die Bedeutung, die für sie maßgebend ist, ist das, was in der Grammatik des Zeichens niedergelegt ist.	48
<i>Satz. Sinn des Satzes.</i>	49
15 „Satz“ und „Sprache“ verschwimmende Begriffe.	50
16 Die Logik redet von Sätzen und Wörtern im gewöhnlichen Sinn, nicht von Sätzen und Wörtern in irgend einem abstrakten Sinn.	57
17 Satz und Satzklang.	59

Table of Contents

<i>Understanding.</i>	1
1 Understanding, Meaning, Drop Out of Our Considerations.	2
2 “Meaning” Used Amorphously. “Meaning” Used Equivocally.	5
3 Understanding as a Correlate of an <i>Explanation</i> .	9
4 Understanding a Command the Condition for Our Being Able to Obey It. Understanding a Proposition the Condition for Our Acting in Accordance with It.	12
5 <i>Interpreting</i> . Do We Interpret Every Sign?	16
6 One Says: Understanding a Word Means Knowing How it is Used. What Does it Mean to Know That? We Have this Knowledge in Reserve, as it Were.	18
6a Meaning a Proposition Seriously or in Jest, etc.	21
<i>Meaning.</i>	22
7 The Concept of Meaning Originates in a Primitive Philosophical Conception of Language.	23
8 Meaning, the Position of the Word in Grammatical Space.	26
9 The Meaning of a Word is What the Explanation of its Meaning Explains.	29
10 “The Meaning of a Sign is Given by its Effect (the Associations that it Triggers, etc.)”	33
11 Meaning as Feeling, Standing Behind the Word; Expressed with a Gesture.	37
12 In Giving an Ostensive Explanation of Signs one Doesn’t Leave Grammar.	38
13 “Primary and Secondary Signs”. Word and Sample. Ostensive Definition.	40
14 What Interests Philosophy About the Sign, the Meaning That is Decisive for it, is What is Laid Down in the Grammar of the Sign.	48
<i>Proposition. Sense of a Proposition.</i>	49
15 “Sentence” and “Language” Blurred Concepts.	50
16 Logic Talks about Sentences and Words in the Ordinary Sense, not in Some Abstract Sense.	57
17 Sentence and Sentence-Sound.	59

18	Was als Satz gelten soll, ist in der <i>Grammatik</i> bestimmt.	61
19	Die grammatischen Regeln bestimmen den Sinn des Satzes; und ob eine Wortzusammenstellung Sinn hat oder nicht.	63
20	Der Sinn des Satzes, keine <i>Seele</i> .	65
21	Ähnlichkeit von Satz und Bild.	67
22	Sätze mit Genrebildern verglichen. (Verwandt damit: Verstehen eines Bildes.)	69
23	Mit dem Satz scheint die Realität wesentlich übereinstimmen oder nicht übereinstimmen zu können. Er scheint sie zu fordern, sich mit ihm zu vergleichen.	70
24	Das Symbol (der Gedanke), scheint als solches unbefriedigt zu sein.	73
25	Ein Satz ist ein Zeichen in einem System von Zeichen. Er ist eine Zeichenverbindung von mehreren möglichen und im Gegensatz zu den andern möglichen. Gleichsam eine Zeigerstellung im Gegensatz zu andern möglichen.	76
26	Sich vorstellen können, „wie es wäre“, als Kriterium dafür, daß ein Satz Sinn hat.	78
27	„Logische Möglichkeit und Unmöglichkeit“. – Das Bild des „Könnens“ ultraphysisch angewandt. (Ähnlich: „Das ausgeschlossene Dritte“.)	80
28	Elementarsatz.	82
29	„Wie ist die Möglichkeit von p in der Tatsache, daß $\sim p$ der Fall ist, enthalten?“ „Wie enthält z.B. der schmerzlose Zustand die Möglichkeit der Schmerzen?“	83
30	„Wie kann das Wort ‚nicht‘ verneinen?“ Das Wort „nicht“ erscheint uns wie ein Anstoß zu einer komplizierten Tätigkeit des Verneinens.	87
31	Ist die Zeit den Sätzen wesentlich? Vergleich von: Zeit und Wahrheitsfunktionen.	91
32	Wesen der Hypothese.	94
33	Wahrscheinlichkeit.	98
34	Der Begriff „ungefähr“. Problem des „Sandhaufens“.	105
	<i>Das augenblickliche Verstehen und die Anwendung des Worts in der Zeit.</i>	109
35	Ein Wort <i>verstehen</i> = es anwenden <i>können</i> . Eine Sprache <i>verstehen</i> : Einen Kalkül <i>beherrschen</i> .	110
36	Wie begleitet das Verstehen des Satzes das Aussprechen oder Hören des Satzes?	113
37	Zeigt sich die Bedeutung eines Wortes in der Zeit? Wie der tatsächliche Freiheitsgrad eines Mechanismus? Enthüllt sich die Bedeutung des Worts erst nach und nach wie seine Anwendung fortschreitet?	115
38	Begleitet eine Kenntnis der grammatischen Regeln den Ausdruck des Satzes, wenn wir ihn – seine Worte – verstehen?	117
39	Die grammatischen Regeln – und die Bedeutung eines Wortes. Ist die Bedeutung, wenn wir sie verstehen, „auf einmal“ erfaßt; und in den grammatischen Regeln gleichsam ausgebreitet?	121

TABLE OF CONTENTS

xiii

18	What is to Count as a Proposition is Determined in <i>Grammar</i> .	61
19	Grammatical Rules Determine the Sense of a Proposition; and Whether a Combination of Words Makes Sense.	63
20	The Sense of a Proposition not a <i>Soul</i> .	65
21	Similarity of Proposition and Picture.	67
22	Propositions Compared to Genre-Paintings. (Related to This: Understanding a Picture.)	69
23	Reality Seems Inherently Able Either to Agree with a Proposition or not to Agree with it. A Proposition Seems to Challenge Reality to Compare Itself to it.	70
24	A Symbol (a Thought) as Such Seems to be Unfulfilled.	73
25	A Sentence is a Sign within a System of Signs. It is a Combination of Signs from among Several Possible Ones and in Contrast to Other Possible Ones. One Position of the Pointer, as it Were, in Contrast to Other Possible Ones.	76
26	Being Able to Imagine “What it Would be Like” as a Criterion for a Proposition Having a Sense.	78
27	“Logical Possibility and Impossibility”. – The Picture of “Being Able To” Applied Ultraphysically. (Similar to: “The Excluded Middle”.)	80
28	Elementary Proposition.	82
29	“How is the Possibility of p Contained in the Fact that $\sim p$ is the Case?” “How Does, for Example, a Pain-free State Contain the Possibility of Pain?”	83
30	“How Can the Word ‘Not’ Negate?” The Word “Not” Seems to Us Like an Impetus to a Complicated Activity of Negating.	87
31	Is Time Essential to Propositions? Comparison between Time and Truth-Functions.	91
32	The Nature of Hypothesis.	94
33	Probability.	98
34	The Concept “Roughly”. Problem of the “Heap of Sand”.	105
	<i>Immediate Understanding and the Application of a Word in Time.</i>	109
35	To Understand a Word = To Be Able to Use It. To Understand a Language: To Have Command of a Calculus.	110
36	How Does Understanding a Sentence Accompany Uttering or Hearing it?	113
37	Is the Meaning of a Word Shown in Time? Like the Actual Degree of Freedom in a Mechanism? Is the Meaning of a Word Only Revealed in the Course of Time as its Use Develops?	115
38	Does a Knowledge of Grammatical Rules Accompany the Expression of a Sentence when We Understand it – Its Words?	117
39	The Rules of Grammar – and the Meaning of a Word. Is Meaning, When We Understand it, Grasped “all at once”? And Unfolded, as it Were, in the Rules of Grammar?	121

	<i>Wesen der Sprache.</i>	128
40	Lernen, Erklärung, der Sprache. Kann man die Sprache durch die Erklärung gleichsam aufbauen, zum Funktionieren bringen?	129
41	Wie wirkt die einmalige Erklärung der Sprache, das Verständnis?	132
42	Kann man etwas Rotes nach dem Wort „rot“ suchen? Braucht man ein Bild, ein Erinnerungsbild, dazu? Verschiedene Suchspiele.	136
43	„Die Verbindung zwischen Sprache und Wirklichkeit“ ist durch die Worterklärungen gemacht, welche wieder zur Sprachlehre gehören. So daß die Sprache in sich geschlossen, autonom, bleibt.	141
44	Die Sprache in unserem Sinn nicht als Einrichtung definiert, die einen bestimmten Zweck erfüllt. Die Grammatik kein Mechanismus, der durch seinen Zweck gerechtfertigt ist.	144
45	Die Sprache funktioniert als Sprache nur durch die Regeln, nach denen wir uns in ihrem Gebrauch richten, wie das Spiel nur durch seine Regeln ein Spiel ist.	150
46	Funktionieren des Satzes an einem Sprachspiel erläutert.	156
47	Behauptung, Frage, Annahme, etc.	160
	<i>Gedanke. Denken.</i>	164
48	Wie denkt man den Satz „p“, wie erwartet (glaubt, wünscht) man, daß p der Fall sein wird? Mechanismus des Denkens.	165
49	„Was ist ein Gedanke, welcher Art muß er sein, um seine Funktion erfüllen zu können?“ Hier will man sein Wesen aus seinem Zweck, seiner Funktion erklären.	168
50	Ist die <i>Vorstellung</i> das Porträt par excellence, also grundverschieden, etwa, von einem gemalten Bild und durch ein solches oder etwas Ähnliches nicht ersetzbar? Ist sie das, was eigentlich eine bestimmte Wirklichkeit darstellt, – zugleich Bild und Meinung?	170
51	Ist das Denken ein spezifisch organischer Vorgang? Ein spezifisch menschlich-psychischer Vorgang? Kann man ihn in diesem Falle durch einen anorganischen Vorgang ersetzen, der denselben Zweck erfüllt, also sozusagen durch eine Prothese?	172
52	Ort des Denkens.	173
53	Gedanke und Ausdruck des Gedankens.	175
54	Was ist der Gedanke? Was ist sein Wesen? „Der Gedanke, dieses seltsame Wesen“.	178
55	Zweck des Denkens. Grund des Denkens.	179
	<i>Grammatik.</i>	183
56	Die Grammatik ist keiner Wirklichkeit Rechenschaft schuldig. Die grammatischen Regeln bestimmen erst die Bedeutung (konstituieren sie) und sind darum keiner Bedeutung verantwortlich und insofern willkürlich.	184
57	Regel und Erfahrungssatz. Sagt eine Regel, daß Wörter tatsächlich so und so gebraucht werden?	189

TABLE OF CONTENTS

xive

<i>The Nature of Language.</i>	128
40 Learning, Explanation, of Language. Can We Use Explanation to Construct Language, so to Speak, to Get it to Work?	129
41 What Effect Does a Single Explanation of Language Have, What Effect Understanding?	132
42 Can One Use the Word “Red” to Search for Something Red? Does One Need an Image, a Memory-Image, for This? Various Searching-Games.	136
43 “The Connection between Language and Reality” is Made Through Explanations of Words, which Explanations Belong in Turn to Grammar. So that Language Remains Self-contained, Autonomous.	141
44 Language in our Sense not Defined as an Instrument for a Particular Purpose. Grammar is not a Mechanism Justified by its Purpose.	144
45 Language Functions as Language only by Virtue of the Rules We Follow in Using it, just as a Game is a Game only by Virtue of its Rules.	150
46 The Functioning of a Proposition Explained with a Language-Game.	156
47 Assertion, Question, Assumption, etc.	160
 <i>Thought. Thinking.</i>	 164
48 How does one Think the Proposition “p”, how does one Expect (Believe, Wish) that p will be the Case? Mechanism of Thinking.	165
49 “What is a Thought, What Must it be Like for it to Fulfill its Function?” Here one Wants to Explain its Essence by its Purpose, its Function.	168
50 Is a <i>Mental Image</i> a Portrait <i>Par Excellence</i> , and thus Fundamentally Different from, say, a Painted Picture, and not Replaceable by one or by any such Thing? Is it a Mental Image that Really Represents a Particular Reality – Simultaneously Picture and Meaning?	170
51 Is Thinking a Specifically Organic Process? A Process Specific to Human Psychology? If so, can one Replace it with an Inorganic Process that Fulfills the Same Purpose, that is, by a Prosthesis, as it Were?	172
52 Location of Thinking.	173
53 Thought and Expression of Thought.	175
54 What is Thought? What is its Essence? “Thought, this Peculiar Being.”	178
55 The Purpose of Thinking. The Reason for Thinking.	179
 <i>Grammar.</i>	 183
56 Grammar is not Accountable to any Reality. The Rules of Grammar Determine Meaning (Constitute it), and Therefore they are not Answerable to any Meaning and in this Respect are Arbitrary.	184
57 Rule and Empirical Proposition. Does a Rule Say that Words are Actually Used in Such and Such a Way?	189

58 Die strikten grammatischen Spielregeln und der schwankende Sprachgebrauch. Die Logik normativ. Inwiefern reden wir von idealen Fällen, einer idealen Sprache? („Logik des luftleeren Raums“.)	195
59 Wortarten werden nur durch ihre Grammatik unterschieden.	206
60 Sage mir, was Du mit einem Satz anfängst, wie Du ihn verifizierst, etc., und ich werde ihn verstehen.	207
<i>Intention und Abbildung.</i>	
	213
61 Wenn ich mich abbildend nach einer Vorlage richte, also <i>weiß</i> , daß ich jetzt den Stift so bewege, <i>weil</i> die Vorlage <i>so</i> verläuft, ist hier eine mir unmittelbar bewußte Kausalität im Spiel?	214
62 Wenn wir „nach einer bestimmten Regel abbilden“, ist diese Regel in dem Vorgang des Kopierens (Abbildens) enthalten, also aus ihm eindeutig abzulesen? Verkörpert der Vorgang des Abbildens sozusagen diese Regel?	216
63 Wie rechtfertigt man das Resultat der Abbildung mit der allgemeinen Regel der Abbildung?	219
64 Der Vorgang der absichtlichen Abbildung, der Abbildung mit der Intention abzubilden ist nicht wesentlich ein psychischer, innerer. Ein Vorgang der Manipulation mit Zeichen auf dem Papier kann dasselbe leisten.	221
65 Wie hängen unsre Gedanken mit den Gegenständen zusammen, über die wir denken? Wie treten diese Gegenstände in unsre Gedanken ein. (Sind sie in ihnen durch etwas Andres – etwa Ähnliches – vertreten?) Wesen des Porträts; die Intention.	225
<i>Logischer Schluß.</i>	
	229
66 Wissen wir, daß p aus q folgt, weil wir die Sätze verstehen? Geht das Folgen aus einem Sinn hervor?	230
67 „Wenn p aus q folgt, so muß p in q schon mitgedacht sein“.	233
68 Der Fall: unendlich viele Sätze folgen aus einem.	235
69 Kann eine Erfahrung lehren, daß dieser Satz aus jenem folgt?	238
<i>Allgemeinheit.</i>	
	240
70 Der Satz „der Kreis befindet sich im Quadrat“ in gewissem Sinne unabhängig von der Angabe einer bestimmten Lage (er hat, in gewissem Sinne, nichts mit ihr zu tun).	241
71 Der Satz „der Kreis liegt im Quadrat“ keine Disjunktion von Fällen.	244
72 Unzulänglichkeit der Frege- und Russell’schen Allgemeinheitsbezeichnung.	247
73 Kritik meiner früheren Auffassung der Allgemeinheit.	249
74 Erklärung der Allgemeinheit durch Beispiele.	251
75 Bildungsgesetz einer Reihe. „ <i>U.s.w.</i> “	257

TABLE OF CONTENTS

xve

58	The Strict Grammatical Rules of a Game and the Fluctuating Use of Language. Logic as Normative. To what Extent do we Talk about Ideal Cases, an Ideal Language? (“The Logic of a Vacuum.”)	195
59	Kinds of Words are Distinguished only by their Grammar.	206
60	Tell me What you do with a Proposition, How you Verify it, etc., and I Shall Understand It.	207

Intention and Depiction. 213

61	If in Copying I am Guided by a Model and thus <i>Know</i> that I am Now Moving my Pencil in such a Way <i>because</i> the Model Goes <i>that Way</i> , is a Causality Involved Here of which I am Immediately Aware?	214
62	If We “Depict in Accordance with a Particular Rule”, is this Rule Contained in the Process of Copying (Depicting), and can it Therefore be Read out of it Unambiguously? Does the Process of Depicting Embody this Rule, as it Were?	216
63	How Does one Use a General Rule of Representation to Justify the Result of Representation?	219
64	The Process of Copying on Purpose, of Copying with the Intention to Copy, is not Essentially a Psychological, Inner Process. A Process of Manipulating Signs on a Piece of Paper can Accomplish the Same Thing.	221
65	How are our Thoughts Connected with the Objects we Think about? How do these Objects Enter our Thoughts? (Are they Represented in our Thoughts by Something Else – Perhaps Something Similar?) The Nature of a Portrait; Intention.	225

Logical Inference. 229

66	Do we Know that p Follows from q because we Understand the Propositions? Is Entailment Implied by a Sense?	230
67	“If p Follows from q, then p Must Have Been Mentally Included in q.”	233
68	The Case of Infinitely Many Propositions Following from a Single One.	235
69	Can an Experience teach us that one Proposition Follows from Another?	238

Generality. 240

70	In a Certain Sense the Proposition “The Circle is in the Square” is Independent of the Indication of a Particular Position (in a Certain Sense it has Nothing to do with It).	241
71	The Proposition “The Circle is in the Square” not a Disjunction of Cases.	244
72	The Inadequacy of Frege’s and Russell’s Notation for Generality.	247
73	Criticism of my Earlier Understanding of Generality.	249
74	Explanation of Generality by Examples.	251
75	The Law of the Formation of a Series. “ <i>Etc.</i> ”.	257

	<i>Erwartung. Wunsch. etc.</i>	263
76	Erwartung: der Ausdruck der Erwartung. Artikulierte und unartikulierte Erwartung.	264
77	In der Erwartung wurde <i>das</i> erwartet, was die Erfüllung brachte.	266
78	„Wie kann man etwas wünschen, erwarten, suchen, was nicht da ist?“ Mißverständnis des „Etwas“.	270
79	Im Ausdruck der Sprache berühren sich Erwartung und Erfüllung.	275
80	„Der Satz bestimmt, welche Realität ihn wahr macht“. Er scheint einen Schatten dieser Realität zu geben. Der Befehl scheint seine Ausführung in schattenhafter Weise vorzunehmen.	277
81	Intention. Was für ein Vorgang ist sie? Man soll aus der Betrachtung dieses Vorgangs ersehen können, was intendiert wird.	280
82	Kein Gefühl der Befriedigung (kein Drittes) kann das Kriterium dafür sein, daß die Erwartung erfüllt ist.	284
83	Der Gedanke – Erwartung, Wunsch, etc. – und die gegenwärtige Situation.	286
84	Glauben. Gründe des Glaubens.	289
85	Grund, Motiv, Ursache.	295
	<i>Philosophie.</i>	299
86	Schwierigkeit der Philosophie, nicht die intellektuelle Schwierigkeit der Wissenschaften, sondern die Schwierigkeit einer Umstellung. Widerstände des <i>Willens</i> sind zu überwinden.	300
87	Die Philosophie zeigt die irreführenden Analogien im Gebrauch unsrer Sprache auf.	302
88	Woher das Gefühl des Fundamentalen unserer grammatischen Untersuchungen?	304
89	Methode der Philosophie: die übersichtliche Darstellung der grammatischen Tatsachen. Das Ziel: Durchsichtigkeit der Argumente. Gerechtigkeit.	306
90	Philosophie. Die Klärung des Sprachgebrauches. Fallen der Sprache.	311
91	Die philosophischen Probleme treten uns im praktischen Leben gar nicht entgegen (wie etwa die der Naturlehre), sondern erst, wenn wir uns bei der Bildung unserer Sätze nicht vom praktischen Zweck, sondern von gewissen Analogien in der Sprache leiten lassen.	314
92	Methode in der Philosophie. Möglichkeit des ruhigen Fortschreitens.	316
93	Die Mythologie in den Formen unserer Sprache. ((Paul Ernst.))	317
	<i>Phänomenologie.</i>	319
94	Phänomenologie ist Grammatik.	320
95	Kann man in die Eigenschaften des Gesichtsraumes tiefer eindringen? etwa durch Experimente?	323
96	Gesichtsraum im Gegensatz zum euklidischen Raum.	325
97	Das sehende Subjekt und der Gesichtsraum.	334
98	Der Gesichtsraum mit einem Bild (ebenen Bild) verglichen.	336
99	Minima visibilia.	338
100	Farben und Farbmischung.	340

	<i>Expectation. Wish. etc.</i>	263
76	Expectation: the Expression of Expectation. Articulate and Inarticulate Expectation.	264
77	What Fulfillment Brought: <i>that</i> was what was Expected in Expectation.	266
78	“How can one Wish for, Expect, Look for, Something that isn’t There?” Misunderstanding of the “Something”.	270
79	Expectation and Fulfillment Make Contact in Linguistic Expression.	275
80	“The Proposition Determines which Reality Makes it True.” It Seems to Provide a Shadow of this Reality. A Command Seems to Anticipate its Execution in a Shadowy Way.	277
81	Intention. What Kind of a Process is it? From an Examination of this Process one is Supposed to be Able to See What is Being Intended.	280
82	No Feeling of Satisfaction (no Third Thing) Can Be the Criterion that Expectation has been Fulfilled.	284
83	Thought – Expectation, Wish, etc. – and the Present Situation.	286
84	Belief. Grounds for Belief.	289
85	Reason, Motive, Cause.	295
	 <i>Philosophy.</i>	 299
86	Difficulty of Philosophy not the Intellectual Difficulty of the Sciences, but the Difficulty of a Change of Attitude. Resistance of the <i>Will</i> Must be Overcome.	300
87	Philosophy Points out the Misleading Analogies in the Use of our Language.	302
88	Whence the Feeling that our Grammatical Investigations are Fundamental?	304
89	The Method of Philosophy: the Clearly Surveyable Representation of Grammatical Facts. The Goal: the Transparency of Arguments. Justice.	306
90	Philosophy. The Clarification of the Use of Language. Traps of Language.	311
91	We Don’t Encounter Philosophical Problems at all in Practical Life (as we do, for Example, Those of Natural Science). We Encounter them only When we are Guided not by Practical Purpose in Forming our Sentences, but by Certain Analogies within Language.	314
92	Method in Philosophy. The Possibility of Quiet Progress.	316
93	The Mythology in the Forms of our Language. ((Paul Ernst.))	317
	 <i>Phenomenology.</i>	 319
94	Phenomenology is Grammar.	320
95	Can one Penetrate More Deeply into the Properties of Visual Space? Say through Experiments?	323
96	Visual Space in Contrast to Euclidean Space.	325
97	The Seeing Subject and Visual Space.	334
98	Visual Space Compared to a Picture (Two-Dimensional Picture).	336
99	<i>Minima Visibilia.</i>	338
100	Colors and the Mixing of Colors.	340

	<i>Idealismus, etc.</i>	346
101	Die Darstellung des unmittelbar Wahrgenommenen.	347
102	„Die Erfahrung im gegenwärtigen Moment, die eigentliche Realität.“	351
103	Idealismus.	354
104	„Schmerzen <i>haben</i> .“	356
105	Gedächtniszeit.	363
106	„Hier“ und „Jetzt“.	366
107	Farbe, Erfahrung, etc. als formale Begriffe.	369
	 <i>Grundlagen der Mathematik.</i>	 370
108	Die Mathematik mit einem Spiel verglichen.	371
109	Es gibt keine Metamathematik.	376
110	Beweis der Relevanz.	378
111	Beweis der Widerspruchsfreiheit.	380
112	Die Begründung der Arithmetik, in der diese auf ihre Anwendungen vorbereitet wird. (Russell, Ramsey.)	382
113	Ramsey's Theorie der Identität.	388
114	Der Begriff der Anwendung der Arithmetik (Mathematik).	391
	 <i>Über Kardinalzahlen.</i>	 392
115	Kardinalzahlenarten.	393
116	$2 + 2 = 4$.	399
117	Zahlangaben innerhalb der Mathematik.	410
118	Zahlgleichheit. Längengleichheit.	412
	 <i>Mathematischer Beweis.</i>	 417
119	Wenn ich sonst etwas suche, so kann ich das Finden beschreiben, auch wenn es nicht eingetreten ist; anders, wenn ich die Lösung eines mathematischen Problems suche. Mathematische Expedition und Polarexpedition.	418
120	Beweis, und Wahrheit und Falschheit eines mathematischen Satzes.	423
121	Wenn Du wissen willst, <i>was</i> bewiesen wurde, schau den Beweis an.	425
122	Das mathematische Problem. Arten der Probleme. Suchen. „Aufgaben“ in der Mathematik.	430
123	Eulerscher Beweis.	434
124	Dreiteilung des Winkels, etc.	437
125	Suchen und Versuchen.	441

	<i>Idealism, etc.</i>	346
101	The Representation of what is Immediately Perceived.	347
102	“The Experience at the Present Moment, Actual Reality.”	351
103	Idealism.	354
104	“ <i>Having Pain.</i> ”	356
105	Memory-Time.	363
106	“Here” and “Now”.	366
107	Color, Experience, etc., as Formal Concepts.	369
	<i>Foundations of Mathematics.</i>	370
108	Mathematics Compared to a Game.	371
109	There is no Metamathematics.	376
110	Proof of Relevance.	378
111	Consistency Proof.	380
112	Laying the Foundations for Arithmetic as Preparation for its Applications. (Russell, Ramsey.)	382
113	Ramsey’s Theory of Identity.	388
114	The Concept of the Application of Arithmetic (Mathematics).	391
	<i>On Cardinal Numbers.</i>	392
115	Kinds of Cardinal Numbers.	393
116	$2 + 2 = 4$.	399
117	Statements of Number within Mathematics.	410
118	Sameness of Number. Sameness of Length.	412
	<i>Mathematical Proof.</i>	417
119	If I am Looking for Something in Other Cases I Can Describe Finding it, Even if it Hasn’t Happened; it is Different if I am Looking for the Solution to a Mathematical Problem. Mathematical Expeditions and Polar Expeditions.	418
120	Proof, and the Truth and Falsity of Mathematical Propositions.	423
121	If you Want to Know <i>What</i> was Proved, Look at the Proof.	425
122	Mathematical Problems. Kinds of Problems. Searching. “Tasks” in Mathematics.	430
123	Euler’s Proof.	434
124	The Trisection of an Angle, etc.	437
125	Trying to Find and Trying.	441

	<i>Induktionsbeweis. Periodizität.</i>	443
126	Inwiefern beweist der Induktionsbeweis einen <i>Satz</i> ?	444
127	Der rekursive Beweis und der Begriff des Satzes. Hat der Beweis einen Satz als wahr erwiesen und sein Gegenteil als falsch?	445
128	Induktion, $(x)\phi x$ und $(\exists x)\phi x$. Inwiefern erweist die Induktion den allgemeinen Satz als wahr und einen Existentialsatz als falsch?	448
129	Wird aus der Anschreibung des Rekursionsbeweises <i>noch ein weiterer Schluß</i> auf die Allgemeinheit gezogen, sagt das Rekursionschema nicht schon alles was zu sagen war?	452
130	Inwiefern verdient der Rekursionsbeweis den Namen eines „Beweises“? Inwiefern ist der Übergang nach dem Paradigma A durch den Beweis von B gerechtfertigt?	454
131	Der rekursive Beweis reduziert die Anzahl der Grundgesetze nicht.	464
132	Periodizität. $1 : 3 = 0,3$.	466
133	Der rekursive Beweis als Reihe von Beweisen.	468
134	Ein Zeichen auf bestimmte Weise sehen, auffassen. Entdecken eines Aspekts eines mathematischen Ausdrucks. „Den Ausdruck in bestimmter Weise <i>sehen</i> “. Hervorhebungen.	473
135	Der Induktionsbeweis, Arithmetik und Algebra.	480
	<i>Das Unendliche in der Mathematik. Extensive Auffassung.</i>	482
136	Allgemeinheit in der Arithmetik.	483
137	Zur Mengenlehre.	489
138	Extensive Auffassung der reellen Zahlen.	496
139	Arten irrationaler Zahlen. (π', P, F)	499
140	Regellose unendliche Dezimalzahl.	504
	<i>Anhang I</i>	506
	<i>Register</i>	507

<i>Inductive Proofs. Periodicity.</i>	443
126 To what Extent does a Proof by Induction Prove a <i>Proposition</i> ?	444
127 Recursive Proof and the Concept of a Proposition. Did the Proof Prove a Proposition True and its Contradictory False?	445
128 Induction, $(x).\phi x$ and $(\exists x).\phi x$. To what Extent does Induction Prove a Universal Proposition True and an Existential Proposition False?	448
129 <i>Is a Further Inference</i> to Generality Drawn from Writing Down the Recursive Proof? Doesn't the Recursion Schema Already Say all that Needed to be Said?	452
130 To what Extent does a Recursive Proof Deserve the Name "Proof"? To what Extent is a Step in Accordance with the Paradigm A Justified by the Proof of B?	454
131 The Recursive Proof Doesn't Reduce the Number of Fundamental Laws.	464
132 Periodicity. $1 \div 3 = 0.\dot{3}$.	466
133 The Recursive Proof as a Series of Proofs.	468
134 Seeing and Understanding a Sign in a Particular Way. Discovering an Aspect of a Mathematical Expression. " <i>Seeing</i> an Expression in a Particular Way." Marks of Emphasis.	473
135 Proof by Induction, Arithmetic and Algebra.	480
 <i>The Infinite in Mathematics. The Extensional Viewpoint.</i>	 482
136 Generality in Arithmetic.	483
137 On Set Theory.	489
138 The Extensional Conception of the Real Numbers.	496
139 Kinds of Irrational Numbers. (π' , p, f)	499
140 Irregular Infinite Decimals.	504
<i>Appendix I</i>	506
<i>Index</i>	507

0

Verstehen.

Understanding.

1

1 Das Verstehen, die Meinung, fällt aus unsrer Betrachtung heraus.

¹Kann man denn etwas Anderes als² einen Satz *verstehen*?

Oder aber: Ist es nicht erst ein Satz, wenn man es versteht. Also: Kann man Etwas anders, als *als Satz* verstehen?

³Man möchte⁴ davon reden, „einen Satz zu erleben“.

Läßt sich dieses Erlebnis niederschreiben?⁵

⁶Da ist es wichtig, daß es in einem gewissen Sinne keinen halben Satz gibt.

Das heißt, vom halben Satz gilt, was vom Wort gilt, daß er⁷ nur im Zusammenhang des Satzes Sinn⁸ hat.

⁹„Das Verstehen fängt aber erst mit dem Satz an. (Und darum interessiert es uns nicht.)“¹⁰

¹¹Wie es keine Metaphysik gibt, so gibt es keine Metalogik. Das Wort „Verstehen“, der Ausdruck „einen Satz verstehen“, ist auch nicht metalogisch, sondern ein Ausdruck wie jeder andre der Sprache.

¹²Man könnte sagen: Was soll uns das Verstehen bekümmern? Wir müssen ja den Satz verstehen, daß er für uns ein Satz ist!¹³

2 Es wäre ja auch seltsam, daß die Wissenschaft und die Mathematik die Sätze gebraucht, aber von ihrem Verstehen nicht spricht.

¹⁴Man sieht in dem Verstehen das Eigentliche, im Zeichen das Nebensächliche. – Übrigens, wozu dann das Zeichen überhaupt? – Nur um sich Andern verständlich zu machen? Aber wie geschieht dies?¹⁵ – Man sieht hier das Zeichen als eine Medizin an,¹⁶ die im Andern die gleichen Zustände¹⁷ hervorrufen soll, wie ich sie habe.

-
- 1 (M): ✓
2 (V): als ~~er~~
3 (M): ((R): S 7
4 (V): ~~könnte~~
5 (M):)
6 (R): [Zu: „das Wort hat nur im Satz Sinn“]
7 (V): es
8 (V): Bedeutung
9 (M): Prüfen: Überlegen: ✓
10 (V): Das Verstehen . . . an (und . . . uns nicht).
Das Verstehen fängt aber erst mit dem Satz an.

- 11 (M): ✓
12 (M): ×××
13 (V): ××× Wir haben es also in unsern Betrachtungen mit dem Verstehen des Satzes nicht zu tun; denn wir selbst müssen ihn verstehen, damit er für uns ein Satz ist.
14 (M): ✓
15 (V): Aber wie ist das // dies // möglich?
16 (V₁): – Hier wird das Zeichen als eine Medizin betrachtet // angesehen (V₂): – ~~Wir sehen~~ hier . . . an, (V₃): Man sieht da . . . an,
17 (V): ~~Magenschmerzen~~ // Schmerzen

1

Understanding, Meaning, Drop Out of Our Considerations.

¹Can one *understand* something other than² a proposition?

Or, conversely: Doesn't it only become a proposition when one understands it? So: Can one understand something other than *as a proposition*?

³One would like to⁴ talk about "experiencing a proposition".

Can this experience be written down?⁵

⁶Here it is important that in a certain sense there is no half a proposition.

That is, what is true of a word holds true for half a proposition: it⁷ only has a sense⁸ in the context of the proposition.

⁹"Understanding doesn't begin until there's a proposition. (And therefore it doesn't interest us.)"¹⁰

¹¹Just as there is no metaphysics, there is no metalogic; and the word "understanding", the expression "understanding a proposition", aren't metalogical. They are expressions of language, just like all others.

¹²Someone might say: Why should understanding be of any concern to us? After all, we have to understand the proposition for it to be a proposition for us!¹³

Indeed it's strange that science and mathematics use propositions, but don't talk about understanding them.

¹⁴Understanding is seen as essential, the sign as incidental. – By the way, in that case what is the point of the sign, anyway? – Only to make oneself understood to others? But how does this happen?¹⁵ – Here the sign is seen as¹⁶ a drug that is supposed to produce in someone else the same feelings¹⁷ that I'm experiencing.

1 (M): ✓
2 (V): than ~~only~~
3 (M): ((R): P 7
4 (V): One ~~could~~
5 (M):)
6 (M): [To: "a word has sense only in a proposition"]
7 (V): proposition: a ~~word~~
8 (V): meaning
9 (M): Try out: Consider: ✓
10 (V): Understanding . . . (and . . . doesn't interest us). // ~~Understanding doesn't begin until there's a proposition.~~ //

11 (M): ✓
12 (M): XXX
13 (V): XXX So in our considerations we don't deal with understanding a proposition; for we ourselves have to understand it for it to be a proposition for us.
14 (M): ✓
15 (V): But how is that // this // possible?
16 (V₁): – Here the sign is viewed // seen // as (V₂): – ~~Here we see~~ the sign as (V₃): Here one sees the sign as
17 (V): ~~stomach~~-ache // pains //

¹⁸Auf die Frage „was meinst du“, kommt zur Antwort: „ich meine p“, & nicht¹⁹ „ich meine das, was ich mit ‚p‘ meine“.

²⁰Die gesamte Sprache kann nicht mißverstanden werden; sonst gäbe es²¹ zu diesem Mißverständnis wesentlich keine Aufklärung.²²

Die Sprache²³ muß für sich selbst sprechen.²⁴

²⁵Man kann es auch so sagen: wenn man sich immer in einem Sprachsystem ausdrückt und also, was ein Satz meint, nur durch Sätze dieses Systems erklärt, so fällt am Schluß die Meinung²⁶ ganz aus der Sprache, also aus der Betrachtung, heraus und es bleibt die Sprache, das Einzige, was wir betrachten können.

Was ein Satz *meint, sagt* eine Erklärung.

²⁷Gesprochenes erklärt man durch die Sprache; darum²⁸ kann man *die Sprache* (in diesem Sinne) nicht erklären.

²⁹Ich will doch sagen: Die ganze Sprache kann man nicht interpretieren.

Eine Interpretation ist immer nur *eine* im Gegensatz zu einer *andern*. Sie hängt sich an das Zeichen und reiht es in ein weiteres System ein.

3 ³⁰Alles was ich in der Sprache tun kann, ist *etwas* sagen: das *eine* sagen. (Das eine sagen im Raume der Möglichkeiten dessen, was ich hätte sagen können.) (Keine Metalogik.)

³¹Wenn Frege gegen die formale Auffassung der Arithmetik spricht, so sagt er gleichsam: diese kleinlichen Erklärungen, die Symbole betreffend, sind müßig, wenn wir diese verstehen. Und das Verstehen ist quasi das Sehen³² eines Bildes, aus dem dann alle Regeln folgen (wodurch sie verständlich werden). Frege sieht aber nicht, daß dieses Bild nur wieder ein Zeichen ist, oder ein Kalkül, der uns den geschriebenen Kalkül erklärt.

Und, was wir Verstehen einer Sprache nennen, gleicht überhaupt dem Verständnis, welches³³ wir³⁴ für einen Kalkül kriegen, wenn wir die Gründe seiner Entstehung,³⁵ oder seine praktische Anwendung kennen lernen. Und auch da lernen wir nur einen übersichtlichen Symbolismus statt³⁶ des fremden kennen. (Verstehen heißt hier etwa übersehen.)

³⁷Wenn komplizierte psychische³⁸ Vorgänge hinter der Front der Symbole beim Verstehen des Wortes „und“ eine Rolle spielen und das Verstehen etwas für uns Wesentliches ist, wie³⁹ kommt es, daß⁴⁰ von ihnen in der Logik nie die Rede ist, noch sein braucht?

18 (M): ✓

19 (V): du“, muß zur Antwort kommen: p; und nicht

20 (M): u (R): S. 11 oder S. 172

21 (V): mißverstanden werden. Denn sonst gäbe es

22 (V): ~~Erklärung.~~

23 (V): ~~Das heißt eben, die ganze Sprache~~

24 (R): [dazu 3/1]; dazu 3/1

25 (M): u ✓

26 (V): am Schluß Meinung

27 (M): u ✓

28 (V): Gesprochenes kann man nur durch die Sprache erklären, darum

29 (M): u ✓

30 (M): ✓ (R): Zu S. 2/3 etwa zu S. 94

31 (M): ✓✓

32 (V): das Verstehen besteht quasi im Sehen

33 (V): Aber das Verständnis gleicht überhaupt immer dem, welches

34 (V): wir ~~z.B.~~

35 (V): wenn wir z.B. seine Entstehung // Genesis,

36 (V): Und natürlich lernen wir auch da wieder nur einen ~~uns~~ übersichtlichen statt

37 (M): ✓ (R): Zu S. 108 oder zum Kapitel: „Begleitet eine Kenntnis der gr. Regeln den Ausdr. d. Satzes wenn etc.“

38 (V): seelische

39 (V): spielen, wie

40 (V): kommt es, ~~daß diese Vorgänge in der symbolischen Logik nie erwähnt werden? Wie kommt es, daß~~ (M):)

¹⁸The question “What do you mean?” is answered by “I mean p”,¹⁹ and not “I mean what I mean by ‘p’.”

²⁰Language cannot be misunderstood in its entirety; if it could,²¹ it would be inherently impossible to clear up²² this sort of misunderstanding.

Language²³ must speak for itself.²⁴

²⁵It can also be put this way: If one always expresses oneself in a system of language and so uses only propositions of this system to explain what a proposition means, then in the end meaning drops out of language completely, and thus out of consideration; what remains is language, the only thing we can consider.

An explanation says what a proposition *means*.

²⁶What is spoken is explained by means of language;²⁷ therefore one cannot explain *language* (in this sense).

²⁸I want to say: one can't interpret language in its entirety.

An interpretation is always just *one* interpretation, in contrast to *another*. It attaches itself to a sign and integrates it into a wider system.

²⁹All I can do in language is to say *something*: *one* thing. (To say one thing within the realm of the possibilities of what I could have said.) (No metalogic.)

³⁰When Frege argues against a formal conception of arithmetic he is saying, as it were: These pedantic explanations of symbols are idle if we understand the symbols. And understanding is like³¹ seeing a picture from which all the rules follow (and by means of which they become understandable). But Frege doesn't see that this picture is in turn nothing but a sign, or a calculus, that explains the written calculus to us.

And in general, what we call “understanding a language” is like the understanding³² we get³³ of a calculus when we come to know the reasons for its existence³⁴ or its practical application. In that case too, we merely come to know a more surveyable symbolism³⁵ in place of the strange one. (Here “understanding” means something like “having an overview”.)

³⁶If in understanding the word “and”, complicated psychological³⁷ processes play a role behind the facade of the symbols, and understanding is something that is essential for us, then³⁸ why are they never talked about in logic, nor do they need to be?³⁹

18 (M): ✓

19 (V): mean?” must be answered by: p;

20 (M): r (R): P. 11 or P. 172

21 (V): entirety. For otherwise

22 (V): impossible to explain

23 (V): ~~And this means~~, language ~~in its entirety~~

24 (M): [to 3/1]; to 3/1

25 (M): r ✓

26 (M): r ✓

27 (V): What is spoken can only be explained with language,

28 (M): r ✓

29 (M): ✓ (R): To p. 2/3 perhaps to p. 94

30 (M): ✓ ✓

31 (V): understanding consists in

32 (V): But understanding in general is ~~always~~ like the understanding

33 (V): get ~~for example~~

34 (V): know, for example, its origin // genesis

35 (V): application. And ~~of course~~ we come to know ~~in turn~~ a more surveyable symbolism ~~for us~~

36 (M): ✓ (R): To p. 108 or to the chapter: “Does a knowledge of gr. rules accompany the expr. of a sentence when etc.”

37 (V): mental

38 (V): symbols, then

39 (V): why ~~are these processes never mentioned in symbolic logic?~~ Why are they never talked about in logic, nor do they need to be? (M):)

⁴¹Wenn⁴² ich jemandem einen Befehl gebe, so ist es mir *ganz*⁴³ *genug*, ihm Zeichen zu geben. Und ich würde nie sagen: das sind ja nur Worte, und ich muß hinter die Worte dringen. Ebenso, wenn ich jemand etwas gefragt hätte und er gibt mir eine Antwort (also ein Zeichen), bin ich zufrieden – das war gerade, was ich erwartete – und wende nicht ein: das ist ja eine bloße Antwort. Es ist klar, daß nichts anderes erwartet werden konnte, und daß die Antwort den Gebrauch des bestimmten Sprachspiels voraussetzte; wie alles, was wir sagen können.⁴⁴

4 ⁴⁵Wenn man aber sagt „wie soll ich wissen, was er meint, ich sehe ja nur seine Zeichen“, so sage ich: „wie soll *er* wissen, was er meint, er hat ja auch nur seine Zeichen“.

⁴⁶„Etwas habe ich aber doch gemeint, als ich das sagte!“ – Gut, aber wie können wir, was es ist, herausbringen? Doch wohl nur dadurch, daß er es uns sagt. Wenn wir nicht sein übriges Verhalten als⁴⁷ Kriterium nehmen sollen, dann also das, was er uns erklärt.

Du meinst, was Du sagst.

41 (M): ✓✓

42 (V): (~~Im gewöhnlichen Leben,~~) wenn

43 (V): ~~gan~~

44 (V): den Gebrauch der Sprache // einer Sprache
// voraussetzte. Wie alles, was zu sagen ist.

45 (M): ✓

46 (M): ✓

47 (V): zum

⁴⁰If ⁴¹I give someone an order then it is *quite enough* for me to give him signs. And I would never say: These are mere words, and I have to get behind them. Likewise, if I've asked someone something and he gives me an answer (i.e. a sign), then I'm content – that was exactly what I expected – and I don't object: But that is merely an answer. It is clear that nothing else could be expected, and that the answer presupposed the use of a particular language-game; as does everything we can say.⁴²

⁴³But if someone says “How am I supposed to know what he means, all I see are his signs?”, then I say: “How is *he* supposed to know what he means? – He too has only his signs.”

⁴⁴“But I *meant* something when I said that!” – Fine, but how can we recover what it was? Surely only by his telling us. If we're not to take his other behaviour as⁴⁵ a criterion, then we'll have to take the explanation he gives us.

You mean what you say.

40 (M): ✓ ✓

41 (V): (~~In ordinary life,~~) if

42 (V): the use of language. // a language. // As does
everything we say.

43 (M): ✓

44 (M): ✓

45 (V): for

2

5 „Meinen“¹ amorph gebraucht. „Meinen“² mehrdeutig.

³„Du hast mit der Hand eine Bewegung gemacht; hast Du etwas damit gemeint? – Ich dachte, Du meintest, ich solle zu Dir kommen.“

Wie meinte er etwas? Hat er also etwas⁴ Anderes gemeint, als, was er zeigte.⁵ Oder ist die Frage nur: *hat* er gemeint was er zeigte?

Also er konnte etwas meinen, oder auch nichts meinen. Und wenn er etwas meinte, war es eben was er zeigte oder etwas Anderes?

Darf man hier fragen: „*was* hast Du gemeint“?⁶ – Auf diese Frage⁷ kommt ein Satz zur Antwort. Darf man so nicht fragen, so ist das Meinen – sozusagen – amorph.⁸ Und „ich meine etwas mit dem Satz“ ist dann von ähnlicher Form wie:⁹ „dieser Satz ist nützlich“, oder „dieser Satz greift in mein Leben ein“.

Könnte man auch¹⁰ antworten: „ich habe etwas mit dieser Bewegung gemeint, was ich nur durch diese Bewegung ausdrücken kann“?¹¹

¹²Wir unterscheiden¹³ Sprache, von dem, was nicht Sprache ist, Schrift von dem, was keine Schrift ist. Wir sehen Striche etwa auf einer Mauer und sagen,¹⁴ wir verstehen sie; und wir sehen andere, und¹⁵ sagen, sie bedeuten nichts (oder, *uns* nichts). Damit ist doch eine sehr allgemeine Erfahrung charakterisiert, die wir nennen könnten: „etwas als Sprache verstehen“ – ganz abgesehen von dem,¹⁶ *was* wir aus den Strichen (etc.)¹⁷ herauslesen. – (Vergleiche: die Handlungen¹⁸ zweier Personen als Züge (Handlungen) eines Spiels verstehen.)

¹⁹Ich sehe eine deutsche Aufschrift und eine chinesische: Ist die chinesische etwa ungeeignet etwas mitzuteilen?

– Ich sage, ich habe Chinesisch nicht gelernt. Aber dies fällt als²⁰ Ursache, Geschichte, aus der gegenwärtigen Situation²¹ heraus. Nur auf seine Wirkungen kommt es an, und die sind

1 (V): „Verstehen“

2 (V): „Verstehen“

3 (M): ✓✓

4 (V): Hat er etwas

5 (V): ausdrückte.

6 (V): Die Frage ist, ob man fragen darf, „*was* hast Du gemeint“.

7 (V): Frage (aber)

8 (V): Während, wenn man so nicht fragen darf, das Meinen – sozusagen – amorph ist.

9 (V): von derselben Form, wie:

10 (V): aber

11 (V): {Könnte . . . ausdrücken kann“?}

12 (M): ✓

13 (V): unterscheiden ~~doch~~

14 (V₁): Striche und sagen, (V₂): Striche etwa folgen von Strichen auf einer Mauer stehen und sagen,

15 (V): sie; und andere, und ~~wir~~

16 (V): abgesehen davon,

17 (V): aus dem gegebenen Gebilde

18 (V): herauslesen. (Die Handlungen

19 (M): ✓

20 (V): Aber das Lernen der Sprache fällt als ~~bloße~~

21 (V): aus der Gegenwart

2

“Meaning”¹ Used Amorphously. “Meaning”² Used Equivocally.

³“You made a motion with your hand; did you mean something by it? – I thought you meant I should come to you.”

How did he mean something? Did he mean something other than what he indicated?⁴ Or is the question just: *Did* he mean what he indicated?

So he was able to mean something, or nothing. And if he meant something, was it exactly what he indicated, or something else?

Is it legitimate to ask here:⁵ “*What* did you mean?”? This⁶ question is answered by a proposition. If this kind of question is not legitimate⁷ then meaning is – so to speak – amorphous. And then “I mean something by the proposition” is similar in form to:⁸ “This proposition is useful”, or “This proposition affects my life.”

Could one also⁹ answer: “I meant something by this motion that I can express only with this motion”?¹⁰

¹¹We distinguish¹² language from what is not language, writing from what is not writing. We see lines, say on a wall, and we say¹³ we understand them; and we see other lines and say¹⁴ that they mean nothing (or nothing *to us*). Surely this sums up a very general common experience that we might call: “Understanding something as language” – leaving aside *what* it is we read out of the lines (etc.).¹⁵ (Compare: understanding¹⁶ the actions of two people as moves (actions) in a game.)

¹⁷I see an English inscription and a Chinese one: Is the Chinese one perhaps unsuited for communicating something?

– I say that I haven’t learned Chinese. But as a cause, or background, this is immaterial¹⁸ to the present situation.¹⁹ All that matters are the effects, and they are phenomena

1 (V): “Understanding”	11 (M): ✓
2 (V): “Understanding”	12 (V): do distinguish
3 (M): ✓ ✓	13 (V ₁): lines and we say (V ₂): see sequences of
4 (V): expressed?	lines on a wall and we say
5 (V): The question is whether one can ask:	14 (V): and we say
6 (V): (But) this	15 (V): out of the given structure.
7 (V): proposition. Whereas, if one isn’t allowed	16 (V): (Understanding)
to ask this	17 (M): ✓
8 (V): is of the same form as:	18 (V): But as a mere cause learning a language is
9 (V): But could one	immaterial
10 (V): Could one also answer: “I meant something	19 (V): to the present.
by this motion that I can express only with this	
motion”?}	

6a²² Phänomene, die eben nicht eintreten, wenn ich das Chinesische anschau²³. (Warum sie nicht eintreten, ist²⁴ gleichgültig.)

Geben wir denn den Worten, die uns gesagt werden, willkürliche Interpretationen? Kommt nicht das Erlebnis des Verstehens mit dem Erlebnis des Hörens der Zeichen, wenn wir „die Sprache der Andern verstehen“?²⁵

Wenn mir jemand etwas sagt und ich verstehe es, so geschieht mir dies ebenso, wie, daß ich, was er sagt, höre.²⁶

²⁷Und hier ist Verstehen das Phänomen, welches²⁸ sich einstellt, wenn ich einen deutschen Satz höre, und welches dieses Hören vom Hören eines Satzes einer mir fremden²⁹ Sprache unterscheidet.

³⁰Denken wir an eine Chiffre: Ein Satz sei mir³¹ in der Chiffre gegeben und auch der Schlüssel, dann ist mir³² natürlich, in einer Beziehung,³³ alles zum Verständnis der Chiffre gegeben. Und doch würde ich, gefragt: „verstehst Du diesen Satz in der Chiffre“,³⁴ antworten: Nein, ich muß ihn erst entziffern; und erst, wenn ich ihn z.B. ins Deutsche übertragen hätte, würde ich sagen „jetzt verstehe ich ihn“.

Wenn man hier die Frage stellte: „In welchem Augenblick der Übertragung (aus der Chiffre ins Deutsche) verstehe ich den Satz“, so würde man einen Einblick in das Wesen des Verstehens erhalten.³⁵

³⁶Ich sage einen Satz „ich sehe einen schwarzen Kreis“; aber auf die Wörter³⁷ kommt es doch nicht an; setzen³⁸ wir also statt dieses Satzes „a b c d e“. Aber nun kann ich nicht ohne weiteres mit diesem Zeichen den oberen Sinn verbinden (es sei denn, daß ich es als *ein* Wort auffasse und dies als Abkürzung des oberen Satzes). Diese Schwierigkeit ist doch aber sonderbar. Ich könnte sie so ausdrücken: Ich bin nicht gewöhnt statt „ich“, „a“ zu sagen und statt „sehe“ „b“, und statt „einen“ „c“, etc. Aber damit meine ich nicht, daß ich, wenn ich daran gewöhnt wäre, mit dem Worte „a“ sofort das Wort „ich“ assoziieren würde; sondern, daß ich nicht gewöhnt bin, „a“ an der Stelle von „ich“ zu gebrauchen – in der Bedeutung von „ich“.

³⁹„Ich sage das nicht nur, ich meine auch etwas damit“. – Wenn man sich überlegt, was dabei in uns vorgeht, wenn wir Worte *meinen* (und nicht nur sagen), so ist es uns, als wäre dann etwas mit diesen Worten gekuppelt, während sie sonst leer liefen. – Als ob sie gleichsam in uns eingriffen.

⁴⁰Ich verstehe einen Befehl als Befehl, d.h., ich sehe in ihm nicht nur diese Struktur von Lauten oder Strichen, sondern sie hat – sozusagen – einen Einfluß auf mich. Ich reagiere auf einen Befehl (auch ehe ich ihn befolge) anders, als etwa auf eine Mitteilung oder Frage. (Ich lese ihn in anderem Tonfall mit anderer Geste.)

22 (E): 6a ist die spätere von zwei Versionen von S. 6.

23 (V): sehe.

24 (V): ist ~~ganz~~

25 (V): „Geben wir denn . . . wenn wir ‚die Sprache der Andern verstehen?‘“

26 (V): ebenso, ~~wie, daß ich höre, was er sagt.~~

27 (M): ✓

28 (V): Verstehen die Phänomene welche

29 (V): einer mir nicht ~~geläufigen~~ // ~~bekanntem~~

30 (M): ✓

31 (V): uns

32 (V): uns

33 (V): in gewisser Beziehung, // in gewissem Sinne,

34 (V): Chiffre“, ~~etwa~~ // ~~vielleicht~~

35 (V): in das Wesen dessen erhalten, was wir „verstehen“ nennen.

36 (M): ✓

37 (V): Worte

38 (V): sagen

39 (M): / ✓✓

40 (M): / ✓✓ (R): ∇ S. 1/2

that simply don’t occur when I look at²⁰ Chinese script. (Why they don’t occur is irrelevant.²¹)

Do we assign arbitrary interpretations to the words that are addressed to us? Doesn’t the experience of understanding accompany the experience of hearing the signs when we “understand other people’s language”?²²

If someone tells me something and I understand it, then this is as much something that happens to me as is hearing what he says.²³

²⁴And here understanding is the phenomenon²⁵ that occurs when I hear an English sentence, and that distinguishes this type of hearing from hearing a sentence in a foreign²⁶ language.

²⁷Let’s think about a code: Say I’ve²⁸ been given a sentence in the code as well as the key to it; then of course, in one respect,²⁹ I’ve been given everything necessary to understand the sentence. And yet if I were asked: “Do you understand this sentence in the code?” I would answer:³⁰ “No, first I have to decode it”; and only after having transcribed it into English, for example, would I say “Now I understand it”.

If one were now to ask: “At what moment in the transcribing (from the code into English) do I understand the sentence?”, that would give us an insight into the nature of understanding.³¹

³²I utter the sentence “I see a black circle”; but it’s not the words that matter, so instead of that sentence let’s write³³ “a b c d e”. But now I can’t connect the above sense with this sign straightaway (unless I understand it as *one* word, and this as an abbreviation of the sentence above). But this awkwardness is certainly strange. I could express it this way: I’m not used to saying “a” instead of “I” and “b” instead of “see” and “c” instead of “a”, etc. But I don’t mean by this that if I were used to it I would immediately associate the word “I” with the word “a”; rather, that I am not used to using “a” in place of “I” – in the sense of “I”.

³⁴“I’m not merely saying that, I mean something by it.” – When we consider what goes on in us when we *mean* words (and don’t just say them), then it seems as if they are geared with something, whereas otherwise they run in neutral. – As if, so to speak, they meshed gears with us.

³⁵I understand a command as a command, i.e. I see in it not merely this structure of sounds or lines, but this structure influences me, so to speak. I react differently to a command (even before I obey it) than, for example, to a piece of information or a question. (I read it as having a different intonation, a different gesture.)

20 (V): I see

21 (V): is ~~entirely~~ irrelevant.

22 (V): “Do we really assign . . . when we ‘understand other people’s language?’”

23 (V): me ~~as is hearing what he says.~~

24 (M): ✓

25 (V): the phenomena

26 (V): in an ~~unfamiliar~~ // ~~unknown~~

27 (M): ✓

28 (V): we’ve

29 (V): in a certain respect, // in a certain sense,

30 (V) would answer, ~~say~~: // would ~~maybe~~ answer:

31 (V): of what we call “understanding”.

32 (M): ✓

33 (V): let’s say

34 (M): / ✓ ✓

35 (M): / ✓ ✓ (R): ∀ p. 1/2

⁴¹Der Satz, wenn ich ihn verstehe, bekommt für mich Tiefe.

⁴²Ich sage: Das Verstehen bestehe darin, daß ich eine bestimmte *Erfahrung* habe. –

Daß diese Erfahrung aber ein Verstehen ist⁴³ besteht darin, daß diese Erfahrung ein Teil meiner *Sprache* ist.

⁴⁴In einer Erzählung steht: „Nachdem er das gesagt hatte, verließ er sie, wie am vorigen Tage“. Fragt⁴⁵ man mich, ob ich diesen Satz verstehe, so ist nicht leicht,⁴⁶ darauf zu antworten. Es ist ein deutscher Satz und insofern verstehe ich ihn. Ich wüßte, wie man diesen Satz etwa gebrauchen *könnte*, ich könnte selbst einen Zusammenhang für ihn erfinden. Und doch verstehe ich ihn nicht *so*, wie ich ihn verstünde, wenn ich die Erzählung⁴⁷ bis zu dieser Stelle gelesen hätte. (Vergleiche Sprachspiele.)

⁴⁸Was heißt es, ein gemaltes Bild zu verstehen? Auch da gibt es Verstehen und Nichtverstehen; und auch da kann „verstehen“⁴⁹ und „nicht verstehen“ verschiedenerlei heißen. – Das Bild stellt eine Anordnung von Gegenständen im Raum dar,⁵⁰ aber einen Teil des Bildes bin ich unfähig, körperlich zu sehen; sondern sehe dort nur Farbflecke auf der Bildfläche.⁵¹ Wir können dann sagen, ich verstehe⁵² diese Teile des Bildes nicht. Es⁵³ können aber auch Gegenstände⁵⁴ auf dem Bild dargestellt sein, die wir noch nie gesehen haben. Und da gibt es wieder den Fall, wo etwas (z.B.) wie ein Vogel ausschaut,⁵⁵ nur nicht wie einer, dessen Art ich kenne; oder aber ein räumliches Gebilde ist dargestellt,⁵⁶ desgleichen⁵⁷ ich⁵⁸ nie gesehen habe. Vielleicht aber kenne ich alle Gegenstände, verstehe aber – in anderem Sinne – ihre Anordnung nicht.⁵⁹

⁶⁰Angenommen,⁶¹ das Bild stellte⁶² Menschen dar⁶³ und die Menschen darauf wären etwa ein Zoll⁶⁴ lang. Angenommen nun, es gäbe Menschen, die diese Länge hätten, so könnten wir diese⁶⁵ in dem Bild erkennen und es würde uns nun einen ganz andern Eindruck machen, als den gewöhnlichen.⁶⁶ D.h.⁶⁷ es spielt in diesen Eindruck nicht die Erinnerung

41 (M): ✓✓ (R): V S. 19/2

42 (M): ///

43 (V): aber das Verstehen *dessen* ist – was ich verstehe –

44 (M): / ✓✓

45 (V): Bedenke auch: ~~Man kann manchen Satz nur im Zusammenhang mit anderen verstehen.~~ Wenn ich z.B. irgendwo lese: „nachdem er das gesagt hatte, verließ er sie, wie am vorigen Tage“; fragt

46 (V): so ~~wäre~~-(es) nicht ganz leicht,

47 (V): ich ~~das Buch~~

48 (M): ✓

49 (V): gibt es Verständnis und Nichtverstehen. Und auch hier kann „Verstehen“

50 (V): – ~~Wir können uns ein Bild denken, das eine Anordnung von Gegenständen im dreidimensionalen Raum darstellen soll, // Das Bild soll eine Anordnung von Gegenständen im dreidimensionalen Raum darstellen,~~

51 (V): aber ~~wir sind // ich bin //~~ für einen Teil des Bildes unfähig, ~~Körper im Raum darin~~ zu sehen; sondern sehen nur ~~die gemalte~~ Bildfläche.

52 (V): sagen, ~~wir~~ verstehen

53 (V): nicht. ~~Es kann sein, daß die räumlichen Gegenstände, die dargestellt sind, uns bekannt, d.h. Formen sind, die wir aus der Anschauung von Körpern her kennen; es~~

54 (V): ~~Formen~~

55 (V): wo etwas – z.B. – wie ein Vogel aussieht,

56 (V): oder aber, ~~wo~~ ein räumliches Gebilde dargestellt ~~ist,~~

57 (O): dergleichen

58 (V): ich ~~noch~~

59 (V): habe. ~~Auch in diesen Fällen kann man von einem Nichtverstehen des Bildes reden, aber in einem anderen Sinne als im ersten Fall.~~

60 (M): ✓

61 (V): ~~Aber noch etwas:~~ Angenommen,

62 (O): stellte ~~den~~

63 (V): dar, ~~wäre aber klein~~

64 (V): etwa einen Meter

65 (V): so würden wir *sie*

66 (V): machen, obwohl doch die Illusion der dreidimensionalen Gegenstände ganz dieselbe wäre.

67 (O): d.h.

³⁶When I understand it, a proposition acquires depth for me.

³⁷I say: Understanding consists in my having a particular *experience*. – –

But that this experience is understanding³⁸ consists in its being a part of my *language*.

³⁹In a story it says:⁴⁰ “After he said that he left her, as he had done the day before”. If I am asked whether I understand this sentence, there’s no easy answer.⁴¹ It’s an English sentence and in that respect I understand it. I would know, for instance, how one *could* use this sentence, I could come up with a context of my own for it. And yet I don’t understand it *in the way* I would understand it if I had read the story⁴² up to that point. (Cf. language-games.)

⁴³What does it mean to understand a painted picture? Here too there is understanding and a failure to understand! And here too “understanding” and “failure to understand” can mean different things. – The picture represents an arrangement of objects in space,⁴⁴ but I am incapable of seeing a part of the picture three-dimensionally; rather, in that part I see only patches of colour on the surface of the picture.⁴⁵ So we can say that I⁴⁶ don’t understand those parts of the picture. But it’s⁴⁷ also possible that objects⁴⁸ we’ve never seen are portrayed in the picture. And under this rubric there’s the case where something looks like a bird, for instance, but just not like one whose species I know; or on the other hand a⁴⁹ three-dimensional object is represented, the likes of which I’ve never seen.⁵⁰ Or maybe I know all of the objects, but – in another sense – don’t understand how they’re arranged.⁵¹

⁵²Let’s assume⁵³ that the picture portrayed people,⁵⁴ and the people were about an inch⁵⁵ tall. Now let’s further assume that there were people of this height: then we could⁵⁶ recognize them in the picture, but the impression it would make on us would be quite different

36 (M): ✓ ✓ (R): √ p. 19/2

37 (M): ////

38 (V): is an understanding *of* – what I understand –

39 (M): / ✓ ✓

40 (V): ~~Also consider: Some propositions can only be understood in connection with others. If for instance I read somewhere:~~

41 (V): sentence, ~~(+)~~ ~~wouldn’t be very~~ easy to answer.

42 (V): ~~book~~

43 (M): ✓

44 (V): – ~~We can imagine a picture that is supposed to represent an arrangement of objects in three-dimensional space, // The picture is supposed to represent an arrangement of objects in three-dimensional space,~~

45 (V): but ~~we are // I am~~ // incapable of seeing ~~bodies in space in~~ one part of the picture; rather, we see only ~~the painted~~ surface.

46 (V): ~~we~~

47 (V): picture. ~~It’s possible for the three dimensional objects that are represented to be known to us, i.e. to be forms that we know from observing bodies;~~ but it’s

48 (V): ~~forms~~

49 (V): hand where a

50 (V): ~~yet~~ seen.

51 (V): arranged. ~~In these cases too one can speak of not understanding the picture, but in a different sense than in the first case.~~

52 (M): ✓

53 (V): ~~But something else:~~ let’s assume

54 (V): people, ~~but that it were small,~~

55 (V): about a ~~metre~~

56 (V): would recognize *them*

9 hinein,⁶⁸ daß ich einmal Menschen in der gewöhnlichen Größe, und nie Zwerge, gesehen habe, wenn auch dies die Ursache des Eindrucks ist.

⁶⁹Dieses Sehen der gemalten Menschen als Menschen (im Gegensatz etwa zu Zwergen) ist ganz analog dem Sehen der Zeichnung⁷⁰ als dreidimensionalem⁷¹ Gebilde. Wir können hier nicht sagen, wir sehen immer dasselbe und fassen es nachträglich, einmal als das Eine,⁷² einmal als das Andre auf, sondern wir sehen jedes Mal etwas Anderes.

⁷³Und so auch, wenn wir einen Satz mit Verständnis und ohne Verständnis lesen. (Erinnere Dich daran, wie es ist, wenn man einen Satz mit falscher Betonung liest, ihn daher nicht versteht, und nun auf einmal daraufkommt, wie er zu lesen ist.)

⁷⁴(Lesen einer schleuderhaften Schrift.)⁷⁵

⁷⁶Wenn man eine Uhr abliest, so sieht man einen Komplex von Strichen, Flecken etc., aber auf ganz bestimmte Weise, wenn man ihn als Uhr und Zeiger auffaßt.⁷⁷

⁷⁸Wir könnten uns den Marsbewohner denken, der auf der Erde erst nach und nach den Gesichtsausdruck der Menschen als solchen verstehen lernte und den drohenden erst nach gewissen Erfahrungen als solchen empfinden lernt. Er hätte bis dahin diese Gesichtsform angesehen,⁷⁹ wie wir die Form eines Steins betrachten.

⁸⁰Kann ich⁸¹ nicht sagen: er *lernt* erst die befehlende Geste in einer gewissen Satzform verstehen?

10 ⁸²Chinesische Gesten verstehen wir so wenig, wie chinesische Sätze. [D.h. es gibt nicht nur⁸³ Unverständnis für Sätze. Wie aber lernen wir die Sprache fremder Gesten? Sie können uns durch Worte erklärt werden. Man kann uns sagen „das ist bei diesem Volk eine höhnische Gebärde“, etc. Oder aber wir lernen die Gebärden verstehen wie wir als Kind die Gebärden & Mienen der Erwachsenen – ohne Erklärung – verstehen lernen. Und verstehen lernen heißt eben in diesem Sinne nicht erklären lernen & wir verstehen dann die Miene, können sie aber nicht durch einen andern Ausdruck erklären.]

68 (V₁): gewöhnlichen. Und doch ist // besteht // der tatsächliche // dieser tatsächliche // Eindruck, wie er da ist, unabhängig davon, (V₂): Und doch spielt in den Eindruck, den ich habe // den ich beim Anblick des Bildes habe // nicht die Erinnerung hinein,

69 (M): ✓

70 (V): dem Sehen des Bildes

71 (O): dreidimensionales

72 (V): Eine ~~und~~

73 (M): ✓

74 (M): ✓

75 (V): (~~Beim~~ Lesen einer schleuderhaften Schrift kann man erkennen, was es heißt, etwas in das gegebene Bild hineinschauen.)

76 (M): ✓

77 (V): Zeiger auffassen will.

78 (R): Zu „lernen der Sprache“

79 (V): angeschaut,

80 (R): Zu „lernen der Sprache“

81 (V): ich ~~so~~

82 (R): Zu: „lernen der Sprache“

83 (V): nur für Sätze

from the usual one.⁵⁷ That is, my memory that I have seen humans of normal size and never dwarfs is not a factor in this impression⁵⁸, even if it is its cause.

⁵⁹Seeing people in paintings as people (as opposed, for example, to dwarfs) is completely analogous to seeing a drawing⁶⁰ as something three-dimensional. Here we can't say that each time we see the same thing and subsequently understand it now as one thing, now⁶¹ as another; rather, we see something different each time.

⁶²And that's the way it is when we read a sentence with and without understanding. (Remember how it is when you read a sentence with the wrong intonation and as a result you don't understand it, and then suddenly you discover how it ought to be read.)

⁶³(Reading a sloppy handwriting.)⁶⁴

⁶⁵When one reads a clock one sees an aggregate of lines, spots, etc., but in a very particular way if one takes the aggregate as⁶⁶ a clock and hands.

⁶⁷We can imagine a Martian who on earth only gradually learns to understand human facial expressions for what they are and doesn't learn to sense a threatening one until after he has suffered certain experiences. Until then he would have looked at this facial shape the way we regard the shape of a stone.

⁶⁸Can't I say:⁶⁹ He doesn't *learn* to understand the gesture of commanding until it appears in a certain sentential form?

⁷⁰We don't understand Chinese gestures any better than Chinese sentences. [That is, the failure to understand isn't limited⁷¹ to sentences. For how do we learn the language of foreign gestures? They can be explained to us in words. We can be told "Among these people this is a derisive gesture", etc. Or, on the other hand, we learn to understand these gestures the way we learned as children to understand the gestures and facial expressions of grown-ups – without explanation. And in this sense learning to understand does *not* mean learning to explain, and so we understand the facial expression, but can't explain it by any other means.]

<p>57 (V): usual one, even though the illusion of the three-dimensional objects would be precisely the same.</p> <p>58 (V₁): And yet the // this // actual impression, as it occurs, is independent // exists independently // of the fact that I have seen humans of normal size, and never dwarfs. (V₂): And yet my memory is not a factor in the impression that I have // that I have when I see the picture // that I have seen humans of normal size, and never dwarfs.</p> <p>59 (M): ✓</p> <p>60 (V): a picture</p> <p>61 (V): and now</p>	<p>62 (M): ✓</p> <p>63 (M): ✓</p> <p>64 (V): (In reading a sloppy handwriting one can see what it means to project something into a given image.)</p> <p>65 (M): ✓</p> <p>66 (V): one wants to take it as</p> <p>67 (R): To "learning a language"</p> <p>68 (R): To "learning a language"</p> <p>69 (V): therefore say:</p> <p>70 (R): To: "learning a language"</p> <p>71 (V): limited to sentences</p>
---	--

3

11 Das Verstehen als Korrelat einer *Erklärung.*

¹Ich meine mit dem Wort „Verstehen“ ²ein Korrelat der Erklärung des Sinnes, *nicht* einer – etwa medizinischen – Beeinflussung.

Mit dem Worte „Mißverständnis“ meine ich also wesentlich etwas, was sich durch Erklärung beseitigen läßt. Eine andere Nichtübereinstimmung nenne ich nicht „Mißverständnis“.

³Verständnis entspricht der Erklärung; soweit es aber der Erklärung nicht entspricht, ist es unartikuliert und interessiert uns darum nicht;⁴ oder es ist artikuliert und entspricht dem Satz selbst, dessen Sinn wir wiedergeben wollen.⁵

⁶Wissen, was der Satz besagt, kann nur heißen: die Frage beantworten können „was sagt er?“.

⁷Den Sinn eines Satzes kennen,⁸ kann nur heißen:⁹ die Frage „was ist sein Sinn“ beantworten können.

¹⁰Denn ist hier „Sinn haben“ quasi intransitiv gebraucht, so daß man also nicht *den* Sinn eines Satzes von dem eines anderen Satzes unterscheiden kann, dann ist das Sinnhaben ein¹¹ den Gebrauch des Satzes begleitender Vorgang, der¹² uns nicht interessiert.

¹³Das Triviale, was ich zu sagen habe, ist, daß auf den Satz „ich *sage* das nicht nur, ich meine etwas damit“ und die Frage „was?“ ein weiterer Satz, in irgend welchen Zeichen, zur Antwort kommt.

12 ¹⁴Aber man kann fragen: Ist denn das Verständnis nicht etwas anderes als der Ausdruck des Verständnisses? Ist es nicht so, daß der Ausdruck des Verständnisses eben ein unvollkommener Ausdruck ist?

Das heißt doch wohl, ein Ausdruck, der etwas ausläßt, was wesentlich unausdrückbar ist. Denn sonst könnte ich ja¹⁵ einen bessern finden. Also wäre der Ausdruck ein vollkommener *Ausdruck*. –

1 (M): u

2 (V): „Verstehen“, damit meine ich

3 (M): u (R): S. 2/3 ∨ ?

4 (V): und geht uns deswegen nichts an;

5 (V): selbst, dessen Verständnis wir beschreiben wollten.

6 (M): ✓

7 (M): ✓

8 (V): verstehen,

9 (V): kennen, soll heißen:

10 (M): u

11 (V): ein ~~Vorgang~~

12 (V): Sinnhaben eine, den Gebrauch des Satzes begleitende, Angelegenheit, die

13 (M): ¡

14 (M): ? /

15 (V): ja ~~eben~~

3

Understanding as a Correlate of an *Explanation.*

¹I mean by the word “understanding”² a correlate of an explanation of sense, *not* of an – say, a medicinal – influence.

So by the word “misunderstanding” I essentially mean something that can be removed with an explanation. I don’t call just any sort of lack of agreement a “misunderstanding”.

³Understanding correlates with explanation; and in so far as it doesn’t, it is unarticulated and therefore doesn’t interest us;⁴ or it is articulated and correlates with the proposition itself, whose sense we want to render.⁵

⁶To know what a proposition says can only mean: to be able to answer the question “What does it say?”.

⁷To know⁸ the sense of a proposition can only mean:⁹ being able to answer the question “What is its sense?”.

¹⁰For if “to have sense” is used intransitively, as it were, so that one can’t distinguish *the* sense of one proposition from that of another, then having sense is a process that accompanies the use of the proposition,¹¹ and this process doesn’t interest us.

¹²The trivial thing I have to say is that the sentence “I’m not only *saying* this, I mean something by it” and the question “What?” are answered by a further sentence that is expressed in some sort of signs.

¹³But one can ask: Isn’t understanding something different from the expression of understanding? Isn’t it the case that the expression of understanding is inherently an incomplete expression?

And that surely means – an expression that omits something that is essentially inexpressible. For otherwise I could find a better expression. And such an expression would be a complete *expression*. –

1 (M): r

2 (V): “Understanding” – by this I mean

3 (M): r (R): P 2/3 $\forall?$

4 (V): therefore is of no concern to us;

5 (V): itself, whose understanding we wanted to describe.

6 (M): ✓

7 (M): ✓

8 (V): understand

9 (V): proposition is supposed to mean:

10 (M): r

11 (V): sense is a matter accompanying the use of the sentence,

12 (M): ∫

13 (M): ? /

¹⁶Es ist eine sehr häufige Auffassung: daß Einer gleichsam nur unvollkommen sein Verständnis zeigen kann.¹⁷

Daß er gleichsam nur immer aus der Ferne darauf deuten, auch sich ihm nähern, es aber nie mit der Hand ergreifen¹⁸ kann. Und das Letzte immer ungesagt bleiben muß.

¹⁹Man will etwa sagen: Er versteht was Du ihm befohlen hast²⁰ zwar ganz, kann dies aber nicht ganz zeigen, da er sonst schon tun müßte, was ja erst in²¹ Befolgung des Befehls geschehen darf.²² So kann er also nicht zeigen, daß er es ganz versteht. D.h. also, er weiß immer mehr, als er zeigen kann.

²³Man möchte sagen: er ist mit seinem Verständnis *bei*²⁴ der Ausführung,²⁵ aber die Erklärung kann nie die Ausführung enthalten.

Aber das Verständnis enthält nicht die Ausführung, sondern ist nur das Symbol, das bei der Ausführung übersetzt wird.

²⁶Der Weg dazu, die Grammatik des Wortes „meinen“ klar zu sehen, führt über die Fragen „welches²⁷ ist das Kriterium dafür, daß wir etwas *so* meinen“ und welcher Art ist der Ausdruck, den dieses „so“ vertritt. ²⁸Die Antwort auf die Frage „wie ist das gemeint“ stellt²⁹ die Verbindung zwischen zwei Sprachen³⁰ her. Also fragt auch die Frage nach dieser Verbindung. Der Gebrauch der Hauptwörter „Sinn“, „Bedeutung“, „Auffassung“ und anderer Wörter verleitet uns zu glauben, daß dieser Sinn etc. dem Zeichen so gegenübersteht, wie das Wort – der Name – dem Ding,³¹ das sein Träger ist. So daß man sagen könnte: „Das Zeichen hat eine ganz bestimmte Bedeutung,³² ist in einer ganz bestimmten Weise gemeint, die ich nur faute de mieux wieder durch ein Zeichen ausdrücken muß“. Die Meinung, die Intention wäre quasi seine Seele, die ich am liebsten direkt zeigen möchte, aber auf die ich leider nur indirekt durch ihren Körper hinweisen kann. –

³³Wenn ich um den Sinn eines Pfeils zu erklären sage: „ich meine diesen Pfeil so, daß man ihm durch eine Bewegung in der Richtung vom Schwanz zur Spitze folgt“, so gebe ich eine Definition (ich setze ein Zeichen für ein andres), während es scheint, als hätte ich sozusagen die Angabe die der Pfeil meint³⁴ ergänzt. Ich habe den Pfeil durch ein neues Zeichen ersetzt, das wir statt des Pfeiles gebrauchen können. – *Gebrauchen können* – . Während es *scheint*, als wäre der Pfeil selbst wesentlich unvollständig,³⁵ ergänzungsbedürftig, und als hätte ich ihm nur³⁶ die nötige Ergänzung gegeben. Wie man eine Beschreibung eines Gegenstandes als unvollkommen erkennt und vervollständigen kann.³⁷ Als hätte der Pfeil die Beschreibung angefangen und wir sie durch den Satz vollendet. – Auch so: Wenn ich, wie oben, sage „ich meine

16 (M): /

17 (V): Es ist eine häufige // geläufige // Auffassung, daß Einer gleichsam nur unvollkommen zeigen kann, ob er einen Satz [ein Zeichen (einen Befehl)] verstanden hat.

18 (V): berühren

19 (M): ? /

20 (V): versteht es // den Befehl

21 (V): die

22 (V): soll.

23 (M): /// /

24 (V): bei

25 (V): bei der Tatsache,

26 (M): J

27 (V): Die Schwierigkeit ist, die Grammatik des Wortes „meinen“ klar zu sehen. Aber der Weg

dazu ist nur der, über die Antwort auf die Frage „welches

28 (M): /

29 (V): hat

30 (V): zwischen zwei sprachlichen Ausdrücken

31 (V): das Wort, – der Name, – dem Ding,

32 (V): könnte: „Der Pfeil hat eine ganz bestimmte Bedeutung“,

33 (M): ? /

34 (V₁): sozusagen die Aussage // Angabe // des Pfeils (V₂): sozusagen die Aussage die der Pfeil meint

35 (V): unvollkommen,

36 (V): nun

37 (V): und vervollständigt.

¹⁴It's an often held view that one can show one's understanding only incompletely, as it were.¹⁵

That one can only point to it from afar, as it were, can get closer to it, but can never grab¹⁶ it with one's hand. And that what finally matters must always remain unsaid.

¹⁷One wants to say, for instance: There's no doubt he understands completely what you told him to do,¹⁸ but he can't show this completely. If he could, he would have to do what isn't allowed¹⁹ to happen until he obeys the order. So he cannot show that he understands it completely. That is to say, he always knows more than he can show.

²⁰One would like to say: His understanding is *right next to*²¹ the execution of an order²², but his explanation can never contain this execution.

And understanding an order doesn't contain its execution; understanding is just a symbol that is translated in the process of the execution.

²³The road to a clear view of the grammar of the word "mean" goes via the questions²⁴ "What is the criterion for our meaning something *thus*?", and what sort of thing is the expression for which this "thus" stands?²⁵ The answer to the question "How is that meant?" establishes the connection between two languages.²⁶ Therefore the question too asks about this connection. The use of the nouns "sense", "meaning", "understanding", and of other words seduces us into believing that this sense, etc., stands opposite the sign in the same way as a word – a name – stands opposite the thing that is its bearer. So one could say: "The sign²⁷ has a very specific meaning, is meant in a very specific way, which I have to express through yet another sign, only because I lack something better." Meaning, intention, is as it were its soul, which I would prefer to point at directly, but to which, unfortunately, I can only point indirectly, via its body. –

²⁸If in order to explain the sense of an arrow, I say: "This is how I mean this arrow: you follow it by moving in the direction from the tail to the point", then I'm giving a definition (I'm substituting one sign for another), whereas it seems as if I had supplemented the indication that the arrow intended²⁹, so to speak. I have replaced the arrow with a new sign that we can use instead of the arrow. – *Can use* –. Whereas it *seems* as if the arrow itself were essentially incomplete³⁰, requiring completion, and as if all I had done³¹ was to give it the requisite completion. As one recognizes a description of an object as incomplete and can complete it.³² As if the arrow had begun the description and we had completed it with our sentence. – Here is another way of putting it: If I say, as I did above, "This is how I mean this arrow: . . .", then this gives the impression that only now have I described what is essential, the meaning; as if the arrow were merely a musical instrument, but the meaning was the music, or better still: as if the arrow were the sign – i.e. in this case, the cause of my

14 (M): /

15 (V): It's an ~~often~~ // ordinary // view that one ~~can~~, as it were, only ~~show~~ incompletely ~~whether he has understood~~ a proposition [a sign (a command)].

16 (V): touch

17 (M): ? /

18 (V): understands ~~it~~ completely // understands the command completely

19 (V): isn't ~~supposed~~

20 (M): /// /

21 (V): right next to

22 (V): *right next to* the fact

23 (M): J

24 (V): The difficulty lies in seeing clearly the grammar of the word "mean". But the only way there is via the answer to the question

25 (M): /

26 (V): two linguistic expressions.

27 (V): "The arrow

28 (M): ? /

29 (V₁): supplemented the statement // indication // of the arrow (V₂): supplemented the statement that the arrow makes

30 (V): essentially ~~imperfect~~

31 (V): had done then

32 (V): and completes it.

diesen Pfeil so, daß . . .“, so macht es den Eindruck, als hätte ich jetzt erst das Eigentliche beschrieben, die Meinung; als wäre der Pfeil gleichsam nur das Musikinstrument, die Meinung aber die Musik, oder besser: der Pfeil, das Zeichen – das heißt in diesem Falle – die Ursache des inneren, seelischen, Vorgangs, und die Worte der Erklärung erst die Beschreibung dieses Vorgangs. Hier spukt die Auffassung des Satzes als eines Zeichens des Gedankens; und des Gedankens als eines Vorgangs in der Seele, oder im Kopf.

- 14 ³⁸Was die Erklärung des Pfeiles betrifft, so ist es klar, daß man sagen kann: „Dieser Pfeil sagt³⁹ nicht, daß Du dorthin (mit der Hand zeigend) gehen sollst, sondern dahin.“ – und daß diese Erklärung verstanden werden könnte.⁴⁰

38 (M): ? / ///

39 (V): bedeutet

40 (V): dahin.“ – Und ich würde diese Erklärung natürlich verstehen. – „~~Das müßte man aber dazuschreiben~~“.

inner mental process, and its description had to wait for the words of the explanation. Here the idea of a proposition as a sign of a thought is haunting us; as is that of a thought as a process in one's soul, or in one's head.

³³As far as the explanation of the arrow is concerned, it's clear that one can say: "This arrow doesn't say³⁴ that you should go that way (motioning with one's hand), but this way" – and that this explanation could be understood.³⁵

33 (M): ? / / / /

34 (V): mean

35 (V): but this way." – And of course I would understand this explanation. – ~~"But one would have to add that in writing."~~

4

- 15 Das Verstehen des Befehls, die
Bedingung dafür, daß wir ihn
befolgen können.
Das Verstehen des Satzes, die
Bedingung dafür, daß wir
uns nach ihm richten.

¹„Das Verständnis eines Satzes kann nur die Bedingung dafür sein, daß wir ihn anwenden können. D.h., es kann nichts sein, als die² Bedingung und es muß die Bedingung der Anwendung sein.“

³Wenn „einen Satz verstehen“ heißt, in bestimmter Weise⁴ nach ihm handeln, dann kann das Verstehen nicht die logische Bedingung dafür sein, daß wir nach ihm handeln.

- 14v ⁵Das Kriterium des Verstehens⁶ ist manchmal ein Vorgang des Übersetzens⁷ des Zeichens in eine⁸ Handlung; wir übertragen den Satz in andere Zeichen,⁹ wir zeichnen nach der Beschreibung ein Bild oder stellen uns eins vor; etc.¹⁰

- 15 ¹¹Das Verstehen einer Beschreibung kann man mit¹² dem Zeichnen eines Bildes nach dieser Beschreibung vergleichen. (Und hier ist wieder das Gleichnis ein besonderer Fall dessen, wofür es ein Gleichnis ist.) Und es wird¹³ auch in vielen Fällen als das Kriterium¹⁴ des Verständnisses aufgefaßt.

- 14v ¹⁵Wir reden von dem Verständnis eines Satzes vielfach als der Bedingung dafür, daß wir ihn anwenden können. Wir sagen „Wir können einen Befehl nicht befolgen, wenn wir ihn nicht verstehen“ oder „ehe wir ihn verstehen“. (das Wort „können“, „muß“ verdächtig)¹⁶

- 15 ¹⁷Ich verstehe dieses Bild genau, ich könnte es in Ton kneten.¹⁸ – Ich verstehe diese Beschreibung genau, ich könnte eine Zeichnung nach ihr machen.

1 (M): ? / ✓

2 (V): diese

3 (M): / ✓

4 (V): in gewissem Sinn

5 (M): ? /

6 (V): Was wir „verstehen lernen“ nennen

7 (V): des Übertragens, Übersetzens,

8 (V): eine andere

9 (V): Satz in eine andere Sprache,

10 (R): √ 15/3

11 (M): / ✓

12 (V): man, mit

13 (V): würde

14 (V): als der Beweis

15 (M): ? / (R): Zu § 4

16 (O): verdächtig] (M): √ 15/4 √ 17/1,2

17 (M): / ✓

18 (V): es plastisch wiedergeben.

4

Understanding a Command the Condition for Our Being Able to Obey It. Understanding a Proposition the Condition for Our Acting in Accordance with It.

¹“Understanding a proposition can only be the condition for our being able to apply it. That is, it can’t be anything other than the² condition, and it must be the condition for the application.”

³If “understanding a proposition” means acting in accordance with it in a particular way⁴, then understanding cannot be the logical condition for our acting in accordance with it.

⁵The criterion of understanding⁶ is sometimes a process of translating⁷ a sign into an⁸ action; we transcribe the sentence into other signs⁹, we draw a picture based on a description, or we imagine a picture; etc.¹⁰

¹¹One can compare understanding a description with drawing a picture based on that description. (And here again the simile is a particular case of what it is a simile of.) And indeed in many cases it is¹² taken as the criterion¹³ of understanding.

¹⁴We often speak of understanding a proposition as the prerequisite for being able to apply it. We say “We can’t obey a command if we don’t understand it” or “until we understand it”. (The words “can”, “must”, are fishy.)¹⁵

¹⁶I understand this picture exactly. I could knead it in clay.¹⁷ – I understand this description exactly, I could make a drawing from it.

1 (M): ? / ✓

2 (V): this

3 (M): / ✓

4 (V): in a certain sense

5 (M): ? /

6 (V): ~~What we call “understanding”~~

7 (V): ~~transcribing~~, translating,

8 (V): a ~~different~~

9 (V): into another language

10 (R): √ 15/3

11 (M): / ✓

12 (V): it would be

13 (V): proof

14 (M): ? / (R): To § 4

15 (M): √ 15/4 √ 17/2

16 (M): / ✓

17 (V): I could reproduce it as a sculpture.

- 14v ¹⁹Wenn hier unter dem „Verstehen“ ein psychischer Vorgang gemeint ist²⁰ & gesagt werden soll, daß dieser Vorgang *erfahrungsgemäß* eintreten muß²¹ ehe ein Mensch einen Befehl befolgen kann, so interessiert uns diese Aussage nicht. – Sollte definiert werden, den Befehl befolgen²² heiße man es nur, wenn jener psychische Vorgang eingetreten sei, so wäre diese Definition müßig.
Soll aber „verstehen“ hier heißen: erklären können, – warum sollte das notwendig sein um den Befehl zu befolgen. Natürlich handelt es sich hier nicht um logische Notwendigkeit.²³
- 15 ²⁴Man könnte es in gewissen Fällen²⁵ als Kriterium des Verstehens²⁶ festsetzen, daß man den Sinn des Satzes muß zeichnerisch darstellen können.
- 16 ²⁷Es ist sonderbar: eine Geste möchten wir durch Worte erklären und Worte durch diesen entsprechende Gesten.²⁸
²⁹Und wirklich werden wir Worte durch eine Geste und eine Geste durch Worte erklären.
³⁰Wenn man mir sagt „bringe eine gelbe Blume“ und ich stelle mir vor, wie ich eine gelbe Blume hole, so kann das zeigen, daß ich den Befehl verstanden habe. Aber ebenso, wenn ich ein Bild des Vorgangs male. – Warum? Wohl, weil das, was ich tue, mit Worten des Befehls beschrieben werden muß. Oder soll ich sagen, ich habe tatsächlich einen (dem ersten) verwandten Befehl ausgeführt.
³¹Nun ist die Frage: Muß ich wirklich in so einem Sinne das Zeichen verstehen, um etwa darnach handeln zu können? – Wenn jemand sagt: „gewiß! sonst wüßte ich ja nicht, was ich zu tun habe“, so würde ich antworten: Aber vom Wissen zum Tun ist ja doch wieder ein Sprung.³²
³³Was heißt dann also der Satz: „Ich muß den Befehl verstehen, ehe ich nach ihm handeln kann“? Denn dies zu sagen, hat³⁴ natürlich einen Sinn. Aber jedenfalls³⁵ wieder keinen metalogischen.
- 17 ³⁶Die Idee, die man von dem Verstehen hat, ist etwa, daß man dabei von dem Zeichen näher an die verifizierende Tatsache kommt, von den Worten des Befehls näher zur Ausführung, etwa durch die Vorstellung. Und wenn man auch nicht wesentlich, d.h. logisch, näher kommt, so ist doch etwas an der Idee richtig, daß das Verstehen in dem Vorstellen der Tatsache besteht. Die Sprache der Vorstellung ist in dem gleichen Sinne wie die Gebärdensprache primitiv.

19 (M): ///

20 (V): Wenn hier das Verstehen ein psychischer Vorgang ist ~~der~~

21 (V): *erfahrungsgemäß* eintritt

22 (V): werden, befolgen

23 (O): Notwendigkeit

24 (M): / ✓

25 (V): Fällen ~~geradezu~~

26 (V): Verständnisses

27 (M): / ✓ (R): Zu S. 42

28 (V₁): Es ist ~~sehr~~ sonderbar: Das Verstehen einer Geste möchten // werden // wir durch ihre // mit Hilfe ihrer // Übersetzung in Worte erklären und das Verstehen von Worten durch eine Übersetzung in Gesten. (V₂): Es ist sehr sonderbar: Wir sind versucht, das Verstehen

einer Geste durch ihr entsprechende Worte zu erklären, und das Verstehen von Worten durch diesen entsprechende Gesten. // . . . das Verstehen einer Geste als Fähigkeit zu erklären, sie in Worte zu übersetzen, . . .

29 (M): / ✓ (R): Zu S. 42

30 (M): XXXX

31 (M): umgearb. / ✓

32 (V): antworten: „Aber es gibt ja keinen Übergang vom Wissen zum Tun. /// Und keine prinzipielle Rechtfertigung dessen, daß es *das* war, was dem Befehl entsprach“.

33 (M): J ✓

34 (V): Denn dieser Satz hat

35 (V): gewiß

36 (M): überarb. / ✓

¹⁸If what is meant by “understanding” is a psychological process¹⁹, and if it’s insisted that *empirically* this event must occur²⁰ before someone can obey a command, then such a statement wouldn’t interest us. – If it were so defined that one could only call it obeying the command if²¹ that psychological process had taken place, then such a definition would be idle.

But if in this context “understanding” is to mean: to be able to explain – why should this be necessary in order to obey the command? Of course, here it isn’t a matter of logical necessity.

²²In certain cases one could stipulate that the ability to represent the sense of a proposition with a drawing is a criterion of understanding it.

²³It’s strange: we’d like to explain a gesture with words, and words with the gestures that correspond to them.²⁴

²⁵And indeed, we do explain words with a gesture, and a gesture with words.

²⁶If I’m told “Bring me a yellow flower” and I imagine myself getting a yellow flower, that can show that I understood the command. But so can my painting a picture of this process. – Why? Most likely because what I’m doing has to be described in the words of the command. Or should I say that what I’ve really done is to carry out a command that’s related (to the original one)?

²⁷So the question is: Do I really have to understand the sign in a particular way if I’m to be able to follow it? – If someone says: “Certainly! For otherwise I wouldn’t know what I’m supposed to do”, then I’d answer: “But there’s still another leap to be made from knowing to doing.”²⁸

²⁹So what does this proposition mean: “I have to understand the command before I can follow it”? For saying this³⁰ does of course have a sense. But once again, not³¹ a metalogical one.

³²The idea one has about understanding is roughly that it is a process that takes one – let us say through one’s imagination – from the sign closer to the fact that verifies it, from the words of the command closer to its execution. And even if one doesn’t get essentially, i.e. logically, closer there still is something right about the idea that understanding consists in imagining the fact. The language of imagining is primitive, in the same sense as the language of gestures is.

18 (M): ////

19 (V): If understanding is a psychological process

20 (V): event occurs

21 (V): it obeying if

22 (M): / ✓

23 (M): / ✓ (R): To p. 42

24 (V₁): It’s ~~very~~ strange: we’d like to // will // explain the understanding of a gesture with its // with the help of its // translation into words, and the understanding of words through a translation into gestures. (V₂): It’s very strange: we’re tempted to explain the understanding of a gesture with words that correspond to it, and the understanding of words with gestures

that correspond to them. // the understanding of a gesture as the ability to translate it into words . . .

25 (M): / ✓ (R): To p. 42

26 (M): XXX

27 (M): Reworked / ✓

28 (V): answer: “But there is no transition from knowing to doing. /// And there is no justification in principle for *that* being what corresponded to the command.”

29 (M): J ✓

30 (V): this proposition

31 (V): again, certainly not

32 (M): Rework / ✓

³⁷„Aber ich muß doch einen Befehl verstehen, um nach ihm handeln zu können.“ Hier ist das „muß“ verdächtig. Wenn das wirklich ein Muß ist – ich meine – wenn es ein logisches Muß ist, so handelt es sich hier um eine grammatische Anmerkung.

³⁸Auch wäre da die Frage möglich: Wie lange vor dem Befolgen muß Du denn den Befehl verstehen?

³⁹(Es kann keine notwendige Zwischenstufe zwischen dem Auffassen eines Befehls und dem Befolgen geben.)

16v Das Verstehen, wenn es eine Vorbereitung des Befolgens war, kann man so auffassen, daß es dem
17 Zeichen (des Befehls) etwas hinzufügt; aber etwas was⁴⁰ jedenfalls nicht die Ausführung war.

⁴¹Wenn gesagt würde, daß der, der den Befehl erhält, wenn er ihn versteht eben außer den Worten Vorstellungen erhält, die der Ausführung des Befehls ähnlich sind (während es die Worte nicht sind), so will ich noch weiter gehen & annehmen,⁴² daß der Befehl dadurch gegeben wird, daß wir den Andern veranlassen die Bewegungen, die er in 5 Minuten ausführen soll, jetzt durch mechanische Beeinflussung auszuführen;⁴³ und näher kann ich doch wohl der Ausführung des Befehls in seinem Ausdruck⁴⁴ nicht kommen. Dann haben wir die Ähnlichkeit
18 der Vorstellung durch eine viel größere Ähnlichkeit ersetzt. Und der Weg vom Zeichen zur wirklichen Ausführung⁴⁵ scheint nun⁴⁶ sehr verkürzt zu sein.⁴⁷

Es ist damit auch gezeigt, wie⁴⁸ Phantasiebilder, Vorstellungen, für den Gedanken unwesentlich sind.⁴⁹

17v $\frac{x}{x^2} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right.$ ⁵⁰Ich könnte auch sagen: Es scheint uns, als ob⁵¹ wir dem Befehl durch
18 das Verstehen etwas hinzufügen, was⁵² ⁵³die Lücke zwischen Befehl & Ausführung füllt. Das heißt doch: was den Befehl in schattenhafter Weise aus-

17v, 18, führt. So daß wir dem, der sagt „aber Du verstehst ihn ja, er ist also nicht unvollständig“⁵⁴ antworten
17v, 18 können: „Ja, aber ich verstehe ihn nur, weil⁵⁵ ich noch etwas hinzufüge: die Deutung nämlich.“⁵⁶

37 (M): ü / ✓

38 (M): / ✓

39 (M): ///

40 (V): [Wenn das Verstehen eine notwendige Vorbereitung des Folgens war, so muß es dem Zeichen etwas hinzugefügt haben; aber etwas, was // , so hat es wohl dem Zeichen // dem Zeichen des Befehls // etwas hinzugefügt. – Aber etwas, was (V₂): Wenn das Verstehen eine Vorbereitung des Befolgens war, so kann man es // das Verstehen // so auffassen, daß es dem Zeichen (des Befehls) etwas hinzufügt; aber etwas was

41 (M): ? / (R): [Zu: Die Kluft zwischen Befehl & Ausführung nicht durch Ähnlichkeit überbrücken]

42 (V): so gehe ich noch weiter und nehme an,

43 (V): wird, daß wir den Andern die Bewegungen, die er ~~etwa~~ in 5 Minuten ausführen soll, jetzt durch mechanische Beeinflussung (~~etwa indem wir seine Hand führen~~) auszuführen veranlassen;

44 (V): Befehls im Ausdruck ~~des Befehls~~

45 (V): vom Symbol zur Wirklichkeit

46 (V): hier

47 (V): sein. (~~Ebenso könnte ich, um zu beschreiben, in welcher Stellung ich mich bei der und der Gelegenheit befunden habe, diese Stellung einnehmen.~~) (R): (Siehe: Erwarten, Wünschen, etc.)

48 (V): daß

49 (V): Es ist damit auch gezeigt, daß ~~das Vorkommen von Phantasiebildern, & Vorstellungen, für den Gedanken ganz unwesentlich ist. // Es ist damit auch das Unwesentliche der Phantasiebilder für den Gedanken gezeigt.~~

50 (M): / ✓ (R): [siehe S. 89/4] Zu: „Deuten“?

51 (V): ob ~~das Verstehen~~

52 (V): sagen: Es scheint uns, als ob, wenn wir den Befehl – (z.B. $\frac{x}{x^2} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right.$) – verstehen, wir etwas hinzufügen, was

53 (F): MS 114, S. 128.

54 (V): sagt „aber Du verstehst ihn ja also ist er ja vollkommen // vollständig //“

55 (V): können: „Ja, aber nur, weil

56 (R): siehe: Erwarten, etc.

³³“But I have to understand a command in order to be able to follow it.” Here the “have to” is suspicious. If this really is a Have To – I mean, if it is a logical Have To, then we’re dealing with a grammatical remark.

³⁴This question is also possible here: How long before you obey the command do you have to understand it?

³⁵(There can be no intermediate step required between grasping a command and following it.)

Understanding – when it’s a preparation for obeying – can be understood as adding something to the sign (of the command); but³⁶ that something is certainly not its execution.

³⁷If it were said that when a person who receives a command understands it, he receives, in addition to the words, mental images that are similar to the execution of the command (whereas the words are not), then I am prepared to go even further and assume³⁸ that the command is given by our mechanically causing the other person to carry out now the movements that he is supposed to carry out in five minutes;³⁹ and surely in expressing the command I can’t get any closer to its execution. Then we have replaced the similarity of the mental image with a much greater similarity. And the path from the sign to its actual execution⁴⁰ now seems⁴¹ to have been shortened considerably.⁴²

This also shows how⁴³ phantasms, mental images, are inessential to a thought.⁴⁴

$\frac{x}{x^2} \quad \bigg \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$	⁴⁵ I could also say: It seems to us that by understanding the command we add something to it ⁴⁶ that ⁴⁷ fills the gap between the command and its execution. And surely that means, something that executes the command in a shadowy way. So that to someone who says “But you do understand it, so it isn’t incomplete,” ⁴⁸ we can answer: “Yes, but I understand it only ⁴⁹ because I add something to it: namely, the interpretation.” ⁵⁰
--	--

33 (M): r / ✓

34 (M): / ✓

35 (M): / / /

36 (V₁): ∫ When it is a necessary preparation for obeying, understanding must have added something to the sign; but // understanding most likely has added something to the sign // of the command // . – But (V₂): If understanding is a preparation for obeying, then one can conceive of it // understanding // in such a way that it adds something to the sign (of the command); but

37 (M): ? / (R): [To: don’t bridge the gap between command and execution with similarity]

38 (V): then I am going even further and assuming

39 (V): is given by our mechanically causing the other person (~~say by our moving his hand~~) to carry out now the movements that he is to carry out ~~say~~ in five minutes;

40 (V): from the symbol to reality

41 (V): seems here

42 (V): considerably. (~~Likewise, in order to describe the position I was in on this or that occasion, I could assume that position.~~)

(R): (See: expect, wish, etc.)

43 (V): that

44 (V): This also shows that the occurrence of phantasms & mental images ~~is utterly~~ inessential to a thought. // ~~This also shows how inessential phantasms are for a thought.~~

45 (M): / ✓ (R): [see p. 89/4] To: “Interpreting” ?

46 (F): MS 114, p. 128.

47 (V): say: It seems to us that when we understand the command –

(for example, $\frac{x}{x^2} \quad \bigg| \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$) we add something to it that

48 (V): “But you do understand it, therefore it is complete // perfect // ,”

49 (V): “Yes, but only

50 (R): see: expecting, etc.

⁵⁷Aber⁵⁸ was veranlaßt Dich gerade zu *dieser*⁵⁹ Deutung? Ist es der Befehl, dann war er ja schon eindeutig, da er diese Deutung befahl. Oder hast⁶⁰ Du die Deutung willkürlich hinzugefügt –, dann hast Du ja auch den Befehl nicht *verstanden*, sondern erst das, was Du aus ihm⁶¹ gemacht hast.

⁶²Eine „Interpretation“ ist doch wohl etwas, was in Zeichen⁶³ gegeben wird. Es ist *diese* Interpretation im Gegensatz zu einer anderen (die anders lautet). – Wenn man also sagen wollte⁶⁴ „jeder Satz bedarf noch einer Interpretation“, so hieße das: kein Satz kann ohne einen Zusatz *verstanden* werden.

⁶⁵„Ich kann den Befehl nicht ausführen, weil ich nicht verstehe, was Du meinst. – Ja, jetzt verstehe ich Dich“.

17v Was ging da vor, als ich plötzlich den Andern verstand?⁶⁶ ⁶⁷Da gab es viele Möglichkeiten: Der Befehl konnte z.B. mit⁶⁸ falscher Betonung gegeben worden sein, & es fiel mir plötzlich die richtige Betonung ein. Einem Dritten würde ich dann sagen: „jetzt verstehe ich ihn, er meint: . . .“ & nun würde ich den Befehl in richtiger Betonung wiederholen. Und in der richtigen Betonung verstünde ich nun den Befehl, das heißt.⁶⁹ ich müßte nun nicht noch einen Abstrakten Sinn erfassen sondern es genügt mir vollkommen der wohlbekannte deutsche Wortlaut.⁷⁰ – Oder⁷¹ der Befehl ist⁷² mir in verständlichem Deutsch gegeben worden schien mir aber ungereimt, da ich ihn in irgend einer Weise mißverstand,⁷³ dann fiel mir eine Erklärung ein „ach, er meint . . .“ & nun kann ich den

19 Befehl ausführen. Oder es konnten mir auch vor diesem Verstehen „mehrere Deutungen vorschweben“,⁷⁴ für deren eine ich mich endlich entscheide.⁷⁵

18v ⁷⁶Wer zwischen zwei⁷⁷ Arten einen B. zu verst. schwankt, der schwankt⁷⁸ zwischen zwei Deutungen, zwischen zwei Erklärungen.

19 ⁷⁹Was heißt es: verstehen, daß etwas ein Befehl ist, wenn man auch den Befehl selbst noch nicht versteht? („Er meint: ich soll etwas tun, aber *was* er wünscht, weiß ich nicht.“)

57 (M): / ✓ (R): Zu: „Deuten“

58 (V): ~~Nun müßte man allerdings darauf sagen: Aber~~

59 (V): veranlaßt Dich denn zu gerade *dieser*

60 (V): da er ~~nur~~ diese Deutung befahl. Oder, hast

61 (V): ihm (~~auf eigene Faust~~)

62 (M): / (R): Zu: „Deuten“

63 (V): Worten

64 (V): also sagt

65 (M): / (R): (Dieser Satz bleibt im §)

66 (V): verstand? ~~Ich konnte mich natürlich irren, und daß ich den Andern verstand, war eine Hypothese. Aber es fiel mir etwa plötzlich eine Deutung ein, die mir einleuchtete. Aber war diese Deutung etwas anderes als ein Satz der Sprache? // sprachlicher Ausdruck? // als eine Erklärung?~~

67 (M): /

68 (V): konnte mit

69 (V): ich ihn nun; d.h.,

70 (V): vollkommen den wohlbekanntesten deutschen Wortlaut ~~zu haben.~~

71 (V): Oder ~~aber~~

72 (V): ~~wäre~~

73 (V): worden schiene mir aber ungereimt, da ich ihn ~~in~~ auf irgend eine Weise mißverstehe;

74 (V): Es konnten mir . . . mehrere Deutungen vorschweben, // Oder es schwebten mir . . .

75 (V): entscheide. ~~Aber das Vorschweben der Deutungen // von Bedeutungen // war das Vorschweben von Ausdrücken einer Sprache.~~

(M): ∇ S. 20/4

76 (M): /

77 (O): zei

78 (V): Wer zwischen zwei Arten schwankt einen Befehl zu verstehen, schwankt

79 (M): / (R): →S. 7/2

⁵¹But⁵² what causes you to arrive at *this* particular interpretation? Is it the command? – If so, then it was already unambiguous, since it commanded this interpretation.⁵³ Or did you add the interpretation arbitrarily? – In that case you didn’t *understand* the command, but only what you then made of it.⁵⁴

⁵⁵To be sure, an “interpretation” is something that is given in signs.⁵⁶ It is *this* interpretation, as opposed to another (which reads differently). – So if one wanted to say⁵⁷ “Every proposition needs an interpretation,” that would mean: No proposition can be understood without a rider.

⁵⁸“I can’t execute the order because I don’t understand what you mean. – Oh, now I understand you.”

What was going on when I suddenly understood the other person?⁵⁹ ⁶⁰Many things could have been happening: for example, the⁶¹ order could have been given with an improper intonation, and suddenly the right one occurred to me. In that case I would say to a third person: “Now I understand him, he means: . . .” and then I’d repeat the command with the right intonation. And now, given the right intonation I’d understand the command, that is:⁶² now I wouldn’t have to grasp an additional abstract sense, but the familiar English wording would be quite adequate for me.⁶³ – Or⁶⁴ I was⁶⁵ given the command in understandable English, but it seemed to make no sense to me because I misunderstood⁶⁶ it in some way; then I hit upon an explanation: “Oh, he means . . .” and then I could carry out the command. Or possibly before understanding it in this way “several interpretations were in my mind”⁶⁷, one of which I finally decided upon.⁶⁸

⁶⁹Whoever wavers between two ways of understanding a command wavers between two interpretations, two explanations.

⁷⁰What does this mean: Understanding that something is a command before understanding the command itself? (“He means: I should do something, but I don’t know *what* it is he wants.”)

51 (M): / ✓ (R): To: “Interpreting”
 52 (V): ~~Now, to be sure, one ought to respond to this by saying:~~ But
 53 (V): commanded ~~only~~ this interpretation.
 54 (V): it (~~going it alone~~).
 55 (M): / (R): To: “Interpreting”
 56 (V): words.
 57 (V): So if one says
 58 (M): / (R): (This sentence stays in the §)
 59 (V): person? ~~Of course possibly I was mistaken, and that I understood the other person was a hypothesis. But, say, suddenly an interpretation came to my mind that made sense to me. But was this interpretation something other than a linguistic proposition? // a linguistic expression? // other than an explanation?~~
 60 (M): /

61 (V): happening: the
 62 (V): I’d now understand it; i.e.,
 63 (V): but it would be quite sufficient for me ~~to have~~ the familiar English wording.
 64 (V): Or ~~on the other hand~~
 65 (V): Or ~~say I were~~
 66 (V): but it would seem to make no sense to me because I misunderstand
 67 (V): Possibly before . . . in my mind // Or, before understanding . . . in my mind
 68 (V): upon. ~~But the “being in mind” of the interpretations // of meanings // was the “being in mind” of expressions in a language.~~
 (M): √ p. 20/4
 69 (M): /
 70 (M): / (R): → p. 7/2

5

20

Deuten.

Deuten wir jedes Zeichen?

¹Deuten wir denn etwas, wenn uns jemand einen Befehl gibt? Wir fassen auf, was wir hören oder sehen; oder: wir sehen, was wir sehen.

19v ²Ein Zeichen deuten, ihm eine Deutung hinzufügen, ist ein Vorgang der wohl in manchen³ Fällen geschieht aber durchaus nicht immer wenn ich ein Zeichen verstehe.

20 ⁴Es gibt Fälle, in denen wir einen erhaltenen Befehl deuten und Fälle, in denen wir es nicht tun.

Eine Deutung ist eine Ergänzung des gedeuteten Zeichens durch ein Zeichen.

⁵Wenn mich jemand fragt: „wieviel Uhr ist es“, so geht in mir dann keine Arbeit des Deutens vor. Ich⁶ reagiere unmittelbar auf das, was ich sehe und höre.

⁷Der Zerstreute der⁸ auf den Befehl „rechtsum“ sich nach links gedreht hätte und nun, an die Stirne greifend, sagte „ach so – ,rechtsum!“ und rechtsum machte.⁹ Ist ihm eine Deutung eingefallen?

¹⁰Ich deute die Worte; wohl; aber deute ich auch die Mienen? *Deute* ich, etwa, einen Gesichtsausdruck als drohend,¹¹ oder freundlich? – Auch das kann übrigens geschehen.¹²

21 ¹³Wenn ich nun sagte: Es ist nicht genug, daß ich das drohende Gesicht wahrnehme, sondern ich muß es erst deuten. – Es zückt jemand das Messer und ich sage: „ich verstehe das als eine Drohung“.

¹⁴Welchen Sinn hat es, jemandem zu befehlen,¹⁵ einen Satz zu verstehen?

Hier muß man verschiedene Fälle unterscheiden.

¹⁶(Denken wir an verschiedene Befehle, die wir nicht ausführen können:

ein Gewicht zu heben das uns zu schwer ist,

einen Arm zu heben der gelähmt¹⁷ ist,

1 (M): ///

2 (M): /

3 (V): gewissen

4 (M): ? /

5 (M): /

6 (V): vor. **Sondern** ich

7 (M): / (R): Zu S. 18

8 (V): Denken wir uns einen Zerstreuten, der

9 (R): [gehört eigentlich zu einer Bemerkung: „das Wort, wenn wir es verstehen gewinnt Tiefe“]

10 (M): /

11 (V): drohend?,

12 (V): freundlich? – **Es kann** geschehen.

13 (M): /

14 (M): / (R): [Zu: „Behauptung, Frage, etc.“] § 47

15 (V): Kann man jemandem befehlen,

16 (M): ü /

17 (O): gelämt

5

Interpreting. Do We Interpret Every Sign?

¹Do we really interpret something when someone gives us an order? We grasp what we hear or see; or: We see what we see.

²Interpreting a sign, adding an interpretation to it, is a process that does take place in some³ cases, but certainly not every time I understand a sign.

⁴There are cases where we interpret an order we have been given and cases where we don't. An interpretation is a supplementation of the interpreted sign with another sign.

⁵If someone asks me: "What time is it?" then no work of interpretation goes on inside me. ⁶I react immediately to what I see and hear.

⁷The absent-minded person who⁸, responding to the order "Right turn", turns left, and then, hitting himself on the forehead, says "Oh – 'right turn'!" and turns right.⁹ Did he think of an interpretation?

¹⁰I interpret the words; fine; but do I also interpret the facial expressions? Do I, for example, *interpret* a facial expression as threatening¹¹, or friendly? – That too can happen, by the way.¹²

¹³What if I were to say: It isn't enough for me to perceive a threatening face – first I have to interpret it. – Someone pulls a knife and I say: "I understand this as a threat".

¹⁴What sense is there to ordering someone¹⁵ to understand a proposition?

Here one has to distinguish various cases.

¹⁶(Let's think about various commands that we cannot carry out:

To lift a weight that is too heavy for us,
to raise an arm that is paralysed,

1 (M): ///

2 (M): /

3 (V): certain

4 (M): ? /

5 (M): /

6 (V): me. ~~Rather~~, I

7 (M): / (R): To p. 18

8 (V): Let's imagine an absent-minded person who

9 (R): [really belongs to the remark: "a word acquires depth when we understand it"]

10 (M): /

11 (V): threatening?

12 (V): friendly? – ~~That can~~ happen.

13 (M): /

14 (M): / (R): [To: "statement, question, etc."] § 47

15 (V): Can one order someone

16 (M): r /

ein Haar aufzustellen,
sich eines Namens zu erinnern der uns entfallen ist,
einen Satz zu verstehen).

Kann man sagen, daß man den Befehl, den gelähmten¹⁸ Arm zu heben in gewissem Sinne nicht versteht? (Bewegen der Finger bei verschränkten Händen.) Den Befehl verstehen, heißt etwa darstellen können wie es wäre wenn er ausgeführt würde. Und nun kann ich mir wohl vorstellen oder zeichnen etc. wie es wäre wenn sich die Bewegung des Arms vollzöge; aber, wenn er sich auf den Befehl hin höbe, so würden wir doch nicht sagen, wir haben ihn gehoben. Wir hätten also den Befehl nicht ausgeführt. Denken wir an die Befehle: „habe Schmerzen!“ & „rufe Dir Schmerzen hervor!“ Ferner: „Stelle¹⁹ Dir einen roten Kreis vor!“

18 (O): geläimten

19 (V): stelle

to stand a hair on its end,
to remember a name we've forgotten,
to understand a proposition.)

Can one say that, in a certain sense, one doesn't understand the command to raise one's paralysed arm? (Moving one's fingers when one's hands are intertwined.) Understanding a command means, for example, being able to show what it would be like if it were carried out. And I can very well imagine or draw, etc., what it would be like if the movement of the arm took place; but if it were to rise at the command, then surely we wouldn't say that we had raised it. So we wouldn't have carried out the command. Let's think of the commands: "Have pain!" and "Elicit pain in yourself!" Further: "Imagine a red circle!"

6

22 ¹Man sagt: ein Wort verstehen heißt,
wissen, wie es gebraucht wird.
Was heißt es, das zu wissen?
Dieses Wissen haben wir
sozusagen im Vorrat.

21v ²Wissen, wie ein Wort gebraucht wird = Es anwenden können.

³Vergleiche:

„Ich sehne mich nach ihm“

„Ich erwarte ihn“

„Ich weiß, daß er kommen wird“

oder auch:

1 „ich habe mich vom Morgen an⁴ nach ihm geseht“

2 „ich habe ihn vom Morgen an⁵ erwartet“

3 „ich wußte vom Morgen an daß er kommen werde“

4 „ich hatte vom Morgen an Zahnschmerzen“

Kann man sagen „ich wußte vom Morgen an ununterbrochen daß er kommen werde“?

Vergleiche N° 4 mit jedem der anderen Sätze.

5 „Ich konnte von meinem 10ten Jahr an Schachspielen“

6 „Ich konnte seit damals nicht mehr hoch springen“

22 ⁶Es ist merkwürdig, daß wir uns bei dem Gedanken, daß es jetzt 3 Uhr sein dürfte, die Zeigerstellung meist gar nicht genau oder überhaupt nicht vorstellen, sondern das Bild wie in⁷ einem Werkzeugkasten der Sprache haben, aus dem wir wissen, das Werkzeug jederzeit herausnehmen⁸ zu können, wenn wir es brauchen. – Dieser Werkzeugkasten, ist er aber nicht die Grammatik mit ihren Regeln?⁹ (Denken wir aber, welcher Art dieses Wissen ist.)

1 (R): gehört zu § 35 (p. 134)

2 (M): /

3 (M): ? /

4 (V): mich ~~den ganzen Tag~~

5 (V): ihn ~~den ganzen Tag~~

6 (M): ? / (R): [Zu: „das augenblickliche Verstehen etc.“]

7 (V): Bild, gleichsam, in

8 (V): hervorziehen

9 (V): Dieser Werkzeugkasten scheint mir die Grammatik mit ihren Regeln zu sein.

6

¹One Says: Understanding a Word Means Knowing How it is Used. What Does it Mean to Know That? We Have this Knowledge in Reserve, as it Were.

²Knowing how a word is used = *being able* to use it.

³Compare:

"I long for him"

"I'm expecting him"

"I know that he'll come"

or also:

1 "I've longed for him ever since this morning"⁴

2 "I've expected him ever since this morning"⁵

3 "I've known ever since this morning that he'd come"

4 "I've had a toothache ever since this morning"

Can one say "Ever since this morning I knew continuously that he would come?"

Compare no. 4 with each of the other sentences.

5 "Ever since I was ten I've been able to play chess"

6 "Ever since that time I've no longer been able to jump very high"

⁶It's remarkable that in thinking that now it's probably three o'clock we usually don't picture the position of the hands exactly, or don't do so at all; rather, we have the image as⁷ in a toolbox of language, from which we know that we can take out⁸ the tools any time we need them. – But this toolbox – isn't it grammar, with its rules?⁹ (But let's think about what kind of knowledge this is.)

1 (R): belongs to § 35 (p. 134)

2 (M): /

3 (M): ? /

4 (V): him ~~the entire day~~

5 (V): him ~~the entire day~~

6 (M): ? / (R): [To: "immediate understanding etc."]

7 (V): as it were

8 (V): can pull out

9 (V): toolbox seems to me to be grammar, with its rules.

¹⁰Es ist so, wie wenn ich mir im Werkzeugkasten der Sprache Werkzeuge zum künftigen Gebrauch herrichtete. Oder im Malkasten Farben. (Ein Werkzeug ist ja auch das Abbild seines Zwecks.)¹¹

¹²Was heißt es, zu sagen „ich sehe zwar kein Rot, aber wenn Du mir einen Farbkasten gibst, so kann ich es Dir darin zeigen“? Wie kann man *wissen*, daß man es zeigen kann, wenn . . . ; daß man es also erkennen kann, wenn man es sieht?

¹³Betrachte nun den Satz: Weißt Du,¹⁴ welche Farbe „rot“ bedeutet? Ja, wenn hier etwas rotes wäre so¹⁵ *könnte* ich es erkennen.

21v ¹⁶„Ich könnte Dir die genaue Farbe der Tapete zeigen, wenn hier etwas wäre was diese Farbe hat“ .
– „Wie weißt Du, daß Du sie erkennen würdest?“ – „Weil ich sie jetzt vor mir sehe.“¹⁷

Andererseits:¹⁸ „ich kann mir jederzeit wenn ich will einen roten Kreis vorstellen.“¹⁹ – „Wie weißt Du, daß Du es²⁰ kannst?“

22 a | e ²¹Es ist etwa dies mein Wörterbuch und ich übersetze mit ihm²² den Satz bdca
b | f in fhge. Nun habe ich im gewöhnlichen Sinne gezeigt, daß ich den Gebrauch
23 c | g des Wörterbuchs verstehe und kann sagen, daß ich auf gleiche Weise den Satz
d | h cdab übersetzen kann, wenn ich will. – Wenn also der Satz cdab ein Befehl ist, den
entsprechenden Satz in der zweiten Sprache hinzuschreiben, so verstehe ich diesen
Befehl, wie ich etwa den Befehl verstehe, | | | | Schritte zu gehen, wenn mir gezeigt wurde,
wie die entsprechenden Befehle mit den Zahlen |, |, | |, ausgeführt werden.

²³Aber natürlich kann das nicht anders sein, als wenn ich z.B. sage „ich will diesen Fleck rot anstreichen“, eine Vorstellung von der Farbe habe und nun „*weiß*“, wie diese Vorstellung in die Wirklichkeit zu übersetzen ist.

²⁴Ja, das ganze Problem ist schon darin enthalten: Was heißt es, zu wissen, wie der Fleck aussähe, wenn er meiner Vorstellung entspräche?

„Du weißt, wie er aussähe? – Nun wie sieht er aus?“

²⁵Wenn ich die Vorstellung, die bei der Erwartung etc. im Spiel ist, durch ein wirklich gesehenes Bild ersetzen will, so scheint etwa folgendes zu geschehen: Ich sollte einen dicken schwarzen Strich ziehen und habe als Bild einen dünnen gezogen. Aber die Vorstellung geht noch weiter und sagt, sie weiß auch schon, daß der Strich dick sein soll. So ziehe ich einen dicken, aber etwas blasseren Strich; aber die Vorstellung sagt, sie weiß auch schon, daß er nicht grau sondern schwarz sein sollte. (Ziehe ich aber den dicken schwarzen Strich, so ist das kein Bild mehr.)

10 (M): ? / /// (R): [Zu: „das augenbl. Verstehen etc.“] Zu MS p. 21/1?

11 (R): [Dazu: Hypothese „ich sehe eine Kugel“] Verwendung der Vorstellg. des Bildes einer Kugel.

12 (M): /

13 (M): /

14 (V): Weißt Du,

15 (V): Ich sage: Hier ist zwar nichts Rotes um mich, aber wenn hier etwas wäre, so

16 (M): ? /

17 (V): „Weil ich sie mir jetzt vorstellen kann // vorstelle //.“

18 (V): Andererseits ~~aber~~:

19 (V): Andererseits: „Ich kann mir jederzeit einen roten Kreis vorstellen, ~~wenn ich will~~“.

20 (V): das

21 (M): ? / ///

22 (V): übersetze darnach

23 (M): ? / ///

24 (M): ? / /// (R): [Zu: Erwartung] S. 364

25 (M): ? / /// (R): [Zu: Die Erwartung erwartet das was sie erfüllen wird] § 77

¹⁰It's as if, in the toolbox of language, I lay out tools for future use. Or colours in a paint box. (A tool, after all, is also an illustration of its purpose.)¹¹

¹²What does it mean to say "I don't see any red, but if you give me a box of paints, I can point it out to you in there"? How can one *know* that one can point it out if . . . ; i.e. that one can recognize it when one sees it?

¹³Now look at the sentence: Do you¹⁴ know what colour is meant by "red"? Yes, if there were something red here, I¹⁵ *could* recognize it.

¹⁶"I could show you the exact colour of the wallpaper if there were something here of that colour." – "How do you know that you'd recognize it?" – "Because it's now before my mind's eye."¹⁷

On¹⁸ the other hand: "If I want to I can imagine a red circle at any time".¹⁹ – "How do you know you can do that?"

a | e ²⁰Say this is my dictionary, and with it²¹ I translate the sentence bdca into fhge.
 b | f I have shown in the ordinary sense that I know how to use a dictionary and I can
 c | g say that I'm able to translate the sentence cdab in the same way, if I want to. – So
 d | h if the sentence cdab is a command to write down the corresponding sentence in
 the second language, then I understand this command, as for example I understand
 the command to walk ||||| steps if I'm shown how the corresponding commands are
 carried out with the numbers |, ||, |||.

²²But of course that can't be different from my saying, for example, "I want to paint this spot red", having a mental image of the colour, and "*knowing*" how this mental image is to be translated into reality.

²³Indeed the whole problem is already included in: What does it mean to know what the patch would look like if it corresponded to my mental image?

"You know what it would look like? – Well, what *does* it look like?"

²⁴If I want to replace the mental image that is involved in expectation, etc., with a picture I really saw, then something like the following seems to happen: I was supposed to draw a thick black line and drew a thin one as a picture of it. But my mental image jumps ahead and says it knows that the line should have been thick. So then I draw a thick but somewhat paler line; but my mental image says that it knows that it shouldn't have been grey, but black. (But if I do draw the thick black line then that isn't a picture any more.)

10 (M): ? / /// (R): [To: "immediate understanding etc."] To MS p. 21/1?

11 (R): [To: Hypothesis "I see a sphere"] Use of the mental image of the picture of a sphere.

12 (M): /

13 (M): /

14 (V): Do you

15 (V): I say: To be sure, there's nothing red around me here, but if something were here, I

16 (M): ? /

17 (V): "Because I can now imagine it." // "Because I am now imagining it."

18 (V): ~~But~~ on

19 (V): On the other hand: "I can imagine a red circle any time I ~~want to~~".

20 (M): ? / ///

21 (V): and following it

22 (M): ∫ ///

23 (M): ? / /// (R): [To: Expectation] P. 364

24 (M): ? / /// (R): [To: Expectation expects what will fulfil it] § 77

²⁶Etwas wissen, ist damit²⁷ zu vergleichen:²⁸ einen Zettel in meiner Tasche²⁹ zu haben, auf dem es aufgeschrieben ist.³⁰

³¹Wie ist es, wenn ich jemandem den Befehl gebe „stelle Dir einen roten Fleck vor“ & nun sage: den Befehl verstehen heiße, wissen wie es ist, wenn er ausgeführt ist; oder gar sich vorstellen können, wie es ist, wenn. . . .

26 (M): ? /

27 (V): darin

28 (V): wissen, ist von der Art ~~dessen~~

29 (V): in der Lade meines Schreibtisches

30 (V): steht.

31 (R): [Zu S. 182]

²⁵To know something can be compared to:²⁶ having a slip of paper in my pocket²⁷ on which it is written down.

²⁸What's it like if I give someone the command "Imagine a red patch" and then say: Understanding that command means knowing what it's like when it has been carried out; or even being able to imagine what it's like when. . . .

25 (M): ? /

26 (V): something is of the nature of:

27 (V): in my desk drawer

28 (R): [To p. 182]

6a¹

23a

Einen Satz im Ernst oder Spaß meinen, etc.

Man wird sagen: der Maler der „Malheurs de Chasse“ hat *nicht gemeint*, daß es wirklich so zugeht; hätte er aber seine Bilder lehrhaft (um zu zeigen, wie es zugeht) gemeint, so wäre er im Unrecht gewesen.

„Hast Du das im Ernst oder im Spaß gemeint?“ – Das „im Ernst Meinen“ besteht nicht darin, daß zu dem ausgesprochenen Satz im Stillen noch etwas hinzugesetzt wird, etwa die Worte „ich meine das im Ernst“. Von dem *ganzen* Satz, dem ausgesprochenen mit den dazugedachten Worten, könnte man wieder fragen: wie war er gemeint? Von Ernst oder Spaß kann man das aber nicht fragen. Also ist die Meinung (Auffassung) in diesem Sinne ein bestimmtes Erlebnis, das mit dem Aussprechen² des Satzes Hand in Hand geht, aber an dem Sinn des Satzes nichts ändert, ob es nun so oder anders ist.

23b Wie geht das vor sich, wenn man einen Satz ausspricht und dabei den anderen nur aufsitzen lassen will? Man spricht, lächelt, sieht zu, was der Andere macht,³ fühlt eine Spannung.

Aber nirgends ist der amorphe Sinn.⁴ Diesen⁵ stellt man sich gleichsam vor, wie den Inhalt eines Tiegels dessen Aufschrift der Satz ist.

„Ich habe gesagt ‚sie ist nicht zu Hause‘, habe aber *dabei* gewußt, daß sie zu Hause war.“ Wie geht dieses Wissen zeitlich mit dem Sagen des Satzes zusammen? Wie eine kontinuierliche Begleitung, ein Orgelpunkt, zu einem Thema?

Hast Du es in jedem Augenblick gewußt, und braucht das Wissen keine Zeit?

Ein falsches Bild verführt uns.

1 (E): Der nun folgende nicht numerierte Abschnitt weist im Typoskript (TS) die Seitenzahlen 1 bzw. 2 auf und unterbricht damit die fortlaufende Seitenzählung. Wir haben ihn eingereiht, indem wir ihm die Nummer 6a gegeben haben und den Seiten, auf denen er sich befindet, die Zahlen 23a bzw. 23b.

2 (V): mit den Zeichen

3 (V): lächelt, beobachtet den andern,

4 (V): ist die amorphe Meinung.

5 (V): Diese

23b

6a¹

Meaning a Proposition Seriously or in Jest, etc.

It will be said: the painter of “*Malheurs de Chasse*” *didn’t mean* that things really go on like that; but if he *had* intended his pictures to be didactic (in order to show what does go on), he would have been wrong.

“Did you mean that seriously or in jest?” – “Meaning something seriously” does not consist in something’s being silently added to a spoken sentence, say the words “I’m serious about that”. As for the *whole* sentence, the one uttered along with the mentally added words, one could ask of it as well: How was it meant? But one can’t ask this about seriousness or jest. So intention (understanding) in this sense is a specific experience that goes hand in hand with the utterance² of a sentence, but leaves the sense of the sentence unchanged, no matter the kind of experience.

What happens when you utter a sentence just to make someone else look foolish? You speak, smile, watch the other person react³, feel a tension in the air.

But nowhere is there the amorphous sense.⁴ One imagines this sense as being, as it were, like the contents of a jar, with the sentence as its label.

“I said ‘She’s not at home’, knowing *all the while* that she was at home.” How does this knowing fit together chronologically with the utterance of the sentence? Like a continuous accompaniment, a pedal point to a theme?

Did you know it at every moment, and doesn’t knowing take time?

A false image is leading us astray.

1 (E): The pages of the following (unnumbered) section are numbered 1 and 2 in the TS, thus interrupting the continuous numbering of pages. We have inserted this section here, and given it the number 6a. 2 (V): signs
3 (V): smile, observe the other person
4 (V): the amorphous meaning.

Bedeutung.

Meaning.

25 **Der Begriff der Bedeutung stammt
aus einer primitiven philosophischen
Auffassung der Sprache her.¹**

²Augustinus, wenn er vom Lernen der Sprache redet, redet ausschließlich davon, wie wir den Dingen Namen beilegen, oder die Namen der Dinge verstehen. Hier scheint also das Benennen Fundament und Um und Auf der Sprache zu sein.

Diese Betrachtungsweise der Sprache ist wohl die, welche die³ Erklärungsform „das ist . . .“ als fundamental auffaßt. – Von einem Unterschied der Worte redet Augustinus nicht, meint also mit „Namen“ offenbar Wörter, wie „Baum“, „Tisch“, „Brot“, und gewiß die Eigennamen der Personen; dann aber wohl auch „essen“, „gehen“, „hier“, „dort“; kurz, alle Wörter. Gewiß aber denkt er zunächst an *Hauptwörter* und an die übrigen als etwas, was sich finden wird. (Und Plato sagt, daß der Satz aus Haupt- und Zeitwörtern besteht.)⁴

Sie beschreiben eben das Spiel einfacher, als es ist.

Dieses Spiel kommt aber wohl in der Wirklichkeit vor. – Nehmen wir etwa an, ich wollte aus Bausteinen,⁵ die mir ein Anderer zureichen soll, ein Haus aufführen, so könnten wir erst ein Übereinkommen dadurch treffen, daß ich auf einen Stein zeigend sagte „das ist eine Säule“, auf einen andern zeigend, „das heißt Würfel“, – „das heißt Platte“ u.s.w. Und nun bestünde die Anwendung im Ausrufen jener Wörter „Säule“, „Platte“, etc. in der Ordnung, wie ich
26 die Bausteine brauche. Und ganz ähnlich ist ja das Übereinkommen

a	↓
b	↑
c	→
d	←

und etwa eines, das mit Farben arbeiten würde.

⁶Augustinus beschreibt wirklich einen Kalkül; nur ist nicht alles, was wir Sprache nennen, dieser Kalkül.

(Und das muß man in einer großen Anzahl von Fällen sagen, wo es sich fragt: ist diese Darstellung brauchbar oder unbrauchbar. Die Antwort ist dann: „ja, brauchbar; aber nur *dafür*, nicht für das ganze Gebiet, das Du darzustellen vorgabst.“)⁷

24v 1 (V): / primitiven Philosophie der Sprache her.

2 (M): ////

3 (V): Diese Auffassung des Fundaments der Sprache ist offenbar äquivalent mit der, die die

4 (E): Vgl. *Sophist*, 261e.

5 (V): Bausteinen ~~ein Haus aufführen~~,

6 (M): (

7 (M):)

7

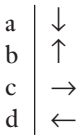
The Concept of Meaning Originates in a Primitive Philosophical Conception of Language.¹

²When Augustine talks about learning language he talks exclusively about how we attach names to things, or understand the names of things. So naming here appears as the foundation, the be-all and end-all of language.

This way of looking at language is the one that³ takes the form of explanation “That is . . .” as fundamental. – Augustine does not speak of there being any difference among words, and so by “names” he evidently means words such as “tree”, “table”, “bread”, and certainly the proper names of people; but probably also “eat”, “go”, “here”, “there”; in short, all words. Certainly he’s thinking primarily of *nouns*, and of the remaining words as something that will take care of itself. (And Plato says that a sentence consists of nouns and verbs.)⁴

They just describe the game as simpler than it is.

But this game does occur in reality. – Let’s assume for instance that I wanted to build a house out of building blocks that someone else is to pass to me; we might first create a convention by my pointing to one block and saying “That’s a pillar” and to another saying “That’s called a cube”, “That’s called a slab”, and so on. And now the application would consist in calling out the words “pillar”, “slab”, etc. in the order in which I need the building blocks. And indeed, the convention



is quite similar to this, as is one that works with colours.

⁵Augustine really does describe a calculus; it’s just that not everything that we call language is this calculus.

(And that is what one has to say in a great many cases where the question is: Is this portrayal fitting, or not? The answer to that is: “Yes, it is fitting; but only *here*, not for the whole region you claimed you were portraying.”)⁶

1 (V): in a Primitive Philosophy of Language.

2 (M): ////

3 (V): This conception of the foundation of language is obviously equivalent to the one that

4 (E): Cf. *Sophist*, 261e.

5 (M): (

6 (M):)

⁸Es ist so, als erklärte jemand:⁹ „spielen besteht darin, daß man Dinge, gewissen Regeln gemäß, auf einer Fläche verschiebt . . .“ und wir ihm antworteten: Du denkst da gewiß an die Brettspiele, und auf sie ist Deine Beschreibung auch anwendbar. Aber das sind nicht die einzigen Spiele. Du kannst also Deine Erklärung richtigstellen, indem Du sie ausdrücklich auf diese Spiele einschränkst.

Man könnte also sagen, Augustinus stelle die Sache zu einfach dar;¹⁰ aber auch: er stelle eine einfachere Sache dar.

(Wer das Schachspiel einfacher beschreibt – mit einfacheren Regeln – als es ist, beschreibt damit dennoch ein Spiel, aber ein anderes.)¹¹

¹²Wie¹³ Augustinus das Lernen der Sprache beschreibt, das kann uns zeigen, von welchem primitiven Bild¹⁴ sich diese Auffassung der Bedeutung eigentlich schreibt.¹⁵

Man könnte den Fall mit dem einer Schrift vergleichen, in der Buchstaben zum Bezeichnen von Lauten benützt würden, aber auch zur Bezeichnung der Betonung¹⁶ und als Interpunktionszeichen. Fassen wir dann diese Schrift als eine Sprache zur Beschreibung des Lautbildes auf, so könnte man sich denken, daß Einer diese Schrift so auffaßte, als entspräche einfach jedem Buchstaben ein Laut und als hätten die Buchstaben nicht auch ganz andere Funktionen. – Und so einer – zu einfachen – Beschreibung der Schrift gleicht Augustinus' Beschreibung der Sprache völlig.

26v, 27 ¹⁷Hierher gehört auch: Man kann – für Andere verständlich –¹⁸ von *Kombinationen von Farben mit Formen* sprechen (etwa der Farben rot und blau mit den Formen Quadrat und Kreis)¹⁹ ebenso wie von Kombinationen verschiedener Formen oder Körper. Und hier haben wir die Wurzel meines²⁰ irleitenden Ausdrucks, die Tatsache sei ein Komplex von Gegenständen. Es wird also, daß ein Mensch krank ist, *verglichen* mit der Zusammenstellung zweier Dinge, wovon das eine der Mensch,²¹ das andere die Krankheit wäre. Vergessen wir nicht, daß das nur ein Gleichnis ist.²²

Oder man muß sagen, es verhält sich hier mit dem Wort „Kombination“, oder „Komplex“, wie mit dem Wort „Zahl“, das auch in verschiedenen – mehr oder weniger logisch ähnlichen – Weisen (Bedeutungen) gebraucht wird.

²³„Bedeutung“ kommt von „deuten“.

Was wir Bedeutung nennen, muß mit der primitiven Gebärdensprache (Zeigesprache) zusammenhängen.

²⁴Wenn ich etwa die wirkliche Sitzordnung an einer Tafel nach einer Aufschreibung kollationiere, so hat es einen guten Sinn, beim Lesen jedes Namens auf einen bestimmten Menschen zu zeigen. Sollte ich aber etwa die Beschreibung eines Bildes mit dem Bild

8 (M): (

9 (V): Es ist ~~also~~ so, ~~wie wenn jemand~~ erklärte:

10 (V): stelle das Lernen der Sprache zu einfach dar;

11 (M):)

12 (M): (

13 (V): ~~Ich wollte ursprünglich sagen:~~ Wie

14 (V): von welcher primitiven Anschauung

15 (V): zeigen, woher sich diese Auffassung überhaupt // eigentlich // schreibt.

16 (V): ~~Stärke~~

17 (R): [Vielleicht auch zu „Komplex & Tatsache“]

[MS Gretl S. 113]

18 (V): Man kann ~~z.B.~~ – für Andere verständlich –

19 (V): Kreis) ~~zusammengeschlossen~~, (E) darüber: unleserliches Wort in eckiger Klammer.

20 (V): des

21 (V): Mensch, ~~ist~~

22 (V): Hüten wir uns ~~davor~~, // Hüten wir uns davor, // zu vergessen, daß das nur ein Gleichnis ist.

23 (M): ×××

24 (M): ///

⁷It's as if someone were to declare:⁸ "Playing a game consists in moving objects about on a surface according to certain rules . . ." and we replied: You must be thinking of board games, and your description is quite applicable to them. But they are not the only games. So you can make your definition correct by expressly restricting it to those games.

So one could say that Augustine was portraying the matter too simply;⁹ but also: that he was portraying a simpler matter.

(Someone who describes the game of chess as simpler than it is – with simpler rules – is still describing a game, but a different one.)¹⁰

¹¹The¹² way Augustine describes the learning of language can show us how primitive the picture¹³ is from which this conception of meaning is really derived.¹⁴

One could compare this case to a writing system in which letters were used to signify sounds, but also to signify intonation,¹⁵ and as punctuation marks. If we then conceive of this system as a language for describing phonetic patterns, then one could imagine that someone might understand this system as simply linking a sound to each letter – as if the letters didn't have completely different functions as well. And Augustine's description of language is just like such an – oversimple – description of this system of writing.

¹⁶This is also relevant here: One can – in a way others can understand –¹⁷ speak of *combinations of colours with shapes* (for example, of the colours red and blue with the shapes square and circle)¹⁸ just as one can speak of combinations of various shapes or bodies. And here we're at the root of my¹⁹ misleading claim that a fact is a complex of objects. So the fact that a person is ill is *compared* with a conjunction of two things, one of them the person, the other the illness. Let's not forget that that's only a simile.²⁰

Or one has to say that here the word "combination", or "complex", is like the word "number", which is also used in various – logically more or less similar – ways (meanings).

²¹"Meaning" ("*Bedeutung*") comes from "point" ("*deuten*").

What we call meaning must be connected with the primitive language of gestures (pointing-language).

²²If for example I correlate the actual seating order at a dinner table with a written seating plan, then pointing to a particular person when reading each name makes good sense. But if I were to compare, say, the description of a picture with the picture itself, and if in

7 (M): (16 (R): [Perhaps also cf. "complex and fact"] [MS Gretl p. 113]
8 (V): Thus it's as if someone were to declare:	17 (V): One can for example – in a way others can understand –
9 (V): portraying learning a language too simply;	18 (V): circle) all brought together (E): Above this: unreadable word in brackets.
10 (M):)	19 (V): the
11 (M): (20 (V): Let's beware of // Let's beware of // forgetting that that's only a simile.
12 (V): Originally I wanted to say: The	21 (M): XXX
13 (V): view	22 (M): ///
14 (V): show us whence this conception is derived in the first place // is really derived.	
15 (V): intensity,	

28 vergleichen und außer dem Personenverzeichnis sagte die Beschreibung auch, daß eine gewisse Person eine andere küßt, so wüßte ich nicht, worauf ich als Korrelat des Wortes „küssen“ zeigen sollte. Oder, wenn etwa stünde „A ist größer als B“, worauf soll ich beim Wort „größer“ zeigen? – Ganz offenbar kann ich ja gar nicht auf etwas diesem Wort entsprechendes in dem Sinne zeigen, wie ich etwa auf die Person A im Bilde zeige.

Es gibt freilich einen Akt „die Aufmerksamkeit auf die Größe der Personen richten“, oder auf ihre Tätigkeit, und in diesem Sinne kann man auch das Küssen und die Größenverhältnisse kollationieren. Das zeigt, wie der allgemeine Begriff der Bedeutung entstehen konnte. Es geschieht da etwas Analoges, wie wenn²⁵ das Pigment an Stelle der Farbe tritt.

Und der Gebrauch des Wortes „kollationieren“ ist hier so schwankend, wie der Gebrauch des Wortes „Bedeutung“.²⁶

²⁷Die Wörter haben offenbar ganz verschiedene Funktionen im Satz und diese Funktionen erscheinen uns ausgedrückt in den Regeln, die von den Wörtern gelten.²⁸

Die Bedeutg. des Wortes – & auf die Bedeutg. zeigen.

²⁹Wie in einem Stellwerk mit Handgriffen die verschiedensten Dinge ausgeführt werden, so mit den Wörtern der Sprache, die Handgriffen entsprechen. Ein Handgriff ist der einer Kurbel und diese kann kontinuierlich verstellt werden; einer gehört zu einem Schalter und kann nur entweder umgelegt oder aufgestellt werden; ein dritter gehört zu einem Schalter, der drei oder mehr Stellungen zuläßt; ein vierter ist der Handgriff einer Pumpe und wirkt nur, solange³⁰ er auf- und abbewegt wird; etc.: aber alle sind Handgriffe, werden mit der Hand angefaßt.³¹

29 ³²Vergleich der Linien mit verschiedenen Funktionen³³ auf der Landkarte mit den Wortarten im Satz. Der Unbelehrte sieht eine Menge Linien und weiß nicht, daß sie sehr verschiedene Bedeutungen haben. Grenzen, Meridiane, Straßen, Schichtenlinien, Buchstaben.

Ein solches Zeichen sei durch einen Strich durchstrichen um zu zeigen daß es falsch ist.³⁴ Auf dem Plan sind viele Striche gezogen, aber der, der ihn durchstreicht, hat eine gänzlich andere Funktion als die anderen.

³⁵Der Unterschied der Wortarten ist wie der Unterschied der Spielfiguren, oder, wie der noch größere, einer Spielfigur und des Schachbrettes.³⁶

25 (V): wenn ~~man~~

26 (M):)

27 (M): (// /

28 (M):)

29 (M): (

30 (V): wenn

31 (M):)

32 (M): / (R): \forall S. 42/1

33 (V): Vergleich der verschiedenen Arten von Linien

34 (V): Denken wir uns den Plan eines Weges gezeichnet und mit einem Strich durchstrichen, der anzeigen soll, daß dieser Plan nicht auszuführen ist. // daß dieser Weg nicht zu gehen ist.

35 (M): ? /

36 (R): \forall S. 42/1

addition to giving a list of people the description also said that one particular person was kissing another, then I wouldn't know what I should point to in the picture as a correlate of the word "kiss". Or if the description said, e.g., "A is taller than B" what should I point to when I come to the word "taller"? – Quite obviously, I can *not* point to something corresponding to this word in the sense that I point to person A in the picture.

To be sure, there is an act of "directing attention to the size of people" or to their actions, and in this sense one can also give correlatives for kissing and size-relationships. This shows how it was possible for the general concept of meaning to come about. What happens here is analogous to pigment taking the place of colour.

And here the use of the word "correlate" fluctuates as much as the use of the word "meaning".²³

²⁴Obviously, words have completely different functions in a sentence, and these functions appear to us as expressed in the rules that apply to the words.²⁵

The meaning of a word – and *pointing* to the meaning.

²⁶As in a signal tower, where the most varied things are done with handles – that's how it is in language with words, which correspond to handles. One handle is that of a crank and it can be adjusted continuously; another is part of a switch and can only be turned on or off; a third is part of a switch that allows for three or more positions; a fourth is the handle of a pump and only has an effect so long as²⁷ it is moved up and down; etc.: but all of them are handles, are gripped by hand.²⁸

²⁹Compare lines on a map that have different functions³⁰ with the types of words in a sentence. Someone who hasn't been taught sees a large number of lines and doesn't know that they have very different meanings. Borders, meridians, streets, strata-lines, letters.

Let such a sign be crossed out by a line in order to show that it is wrong.³¹ Many lines are drawn on the map, but the one that crosses out the sign has an entirely different function from the others.

³²The difference between kinds of words is like the difference between pieces in games, or the even greater one between a chess piece and a chess-board.³³

23 (M):)

24 (M): (///

25 (M):)

26 (M): (

27 (V): effect when

28 (M):)

29 (M): / (R): \forall p. 42/1

30 (V): Compare different kinds of lines

31 (V): Let's imagine a drawing of a path on a map, and it is crossed out with a line to show that this map cannot be followed. // that this path cannot be taken.

32 (M): ? /

33 (R): \forall p. 42/1

8

30 Bedeutung, der Ort des Wortes im grammatischen Raum.

29v, 30, 29v Wir können in der alten Ausdrucksweise sagen: Das Wesentliche ist die Bedeutg. des Wortes, nicht das Wort. Wir können also das Wort durch ein anderes ersetzen, das die gleiche Bedeutg. hat.¹ 30 Damit ist gleichsam ein Platz für das Wort fixiert und man kann ein Wort für das andere setzen, wenn man es an den gleichen Platz setzt.

29v ²Kann man aber in diesem Sinne in einem Gedicht Worte durch andere ersetzen? Welche Art Unterschied macht es, wenn ich in einer Betrachtung der Gesetze des freien Falls³ „Schnelligkeit“ statt „Geschwindigkeit“ sage oder statt des Buchstabens v⁴ einen Hebräischen gebrauche; andererseits aber, wenn ich ein Wort eines Gedichts durch das Zeichen A ersetze, wobei ich erkläre, A solle die Bedeutung⁵ des Wortes haben. Das wäre als wollte ich ein finsternes Gesicht machen & dazu sagen, daß es das gleiche bedeuten solle wie ein freundliches Lächeln.

30 ⁶Wenn ich mich entschlosse (in meinen Gedanken) statt „rot“ ein neues Wort zu sagen, wie würde es sich zeigen, daß dieses an dem Platze des Wortes „rot“ steht? Wodurch ist der Platz⁷ eines Wortes bestimmt? Angenommen etwa, ich wollte auf einmal alle Wörter meiner Sprache durch andere ersetzen, wie könnte ich wissen, an welcher Stelle eines der neuen Worte steht?⁸ Sind es etwa immer die Vorstellungen, die⁹ den Platz des Wortes halten? ¹⁰So daß an einer Vorstellung quasi ein Haken ist, – und hänge ich an den ein Wort, so ist ihm dadurch¹¹ der Platz angewiesen?

Oder: Wenn ich mir den Platz merke, was merke ich mir da?

31 ¹²Man könnte z.B. ausmachen, im Deutschen statt „nicht“ immer „non“¹³ zu setzen und dafür statt „rot“ „nicht“. So daß das Wort „nicht“ in der Sprache bliebe und doch könnte man nun sagen, daß „non“¹⁴ so gebraucht wird, wie früher „nicht“, und daß jetzt „nicht“ anders gebraucht wird als früher.

¹⁵Die Bedeutung könnte ich den Ort eines Wortes in der Grammatik nennen.¹⁶

1 (V): /// Wir können in der alten Ausdrucksweise sagen: das Wesentliche am Wort ist seine Bedeutung.

/ Wir sagen: das Wesentliche am Wort ist seine Bedeutung: wir können das Wort durch ein anderes ersetzen, das die gleiche Bedeutung hat.

2 (M): ? / ///

3 (V): Falls ~~das Wo~~

4 (V): v etwa

5 (V): solle die gleiche Bedeutung haben wie.

6 (M): / (R): ∀ S. 31/1

7 (V): ist die Stelle

8 (V): wissen, welches Wort an der Stelle eines früheren steht. // steht?

9 (V): die ~~bleiben und~~

10 (M): ///

11 (V): damit

12 (M): ? /

13 (V): „not“

14 (V): „not“

15 (M): ? /

16 (V): Der Ort eines Wortes in der Sprache # Grammatik # ist seine Bedeutung.

8

Meaning, the Position of the Word in Grammatical Space.

In the old way of putting it we can say: What really counts is the meaning of a word, not the word. So we can replace the word with another that has the same meaning.¹ A place has thereby been set for the word, as it were, and we can substitute one word for another if we put it in the same place.

²But in a poem, can one in this sense replace words with other words? What sort of difference does it make if in an examination of the laws of free fall I say "speed" instead of "velocity", or use a Hebrew letter instead of v?³ On the other hand, what if I replace a word in a poem by the sign A, explaining that A is to have the meaning of⁴ the word? That would be like frowning and saying that this is to mean the same thing as a friendly smile.

⁵If I decided to use a new word instead of "red" (in my mind), how would it show that it stood in the place of the word "red"? What determines the place of a word? Say, for example, I wanted simultaneously to replace all the words in my language with others, how could I know at which point one of the new words stood?⁶ Is it perhaps mental images that always reserve⁷ the place of a word? ⁸So that a mental image is equipped with a hook, as it were – and if I attach a word to *the hook* then the word has thereby been assigned a place?

Or: When I remember the place, what am I remembering?

⁹One could agree for instance always to put "non"¹⁰ in place of "not" in English, and in turn to put "not" in place of "red". So that the word "not" would remain in the language, and yet one could now say that "non"¹¹ is used *in such a way* as "not" was before, and that "not" is now used *differently* from before.

¹²I could call "meaning" the location of a word in grammar.¹³

1 (V): /// In the old way of putting it we can say: what really counts about a word is its meaning.

/ We say: what really counts about a word is its meaning: we can replace the word with another that has the same meaning.

2 (M): ? / ///

3 (V): v perhaps?

4 (V): have the same meaning as

5 (M): / (R): ∇ p. 31/1

6 (V): know which word stands in the place of a previous one. // one?

7 (V): always remain and reserve

8 (M): /// /

9 (M): ? /

10 (V): "nicht"

11 (V): "nicht"

12 (M): ? /

13 (V): The location of a word in language # grammar # is its meaning.

¹⁷Wäre es nicht ähnlich, wenn ich mich entschloße, die Formen der Schachfiguren zu ändern, oder etwa die Figur eines Pferdchens als König zu nehmen?¹⁸ Wie würde es sich nun zeigen, daß das hölzerne Pferdchen Schachkönig ist? Kann ich hier nicht sehr gut von einem Wechsel der Bedeutung reden?

30v Unter der Bedeutung eines Namens wird nicht sein Träger verstanden.¹⁹

31 ²⁰Man kann sagen, daß die Worte „der Träger des Namens ‚N‘“ dieselbe Bedeutung haben wie der Name „N“ – also für einander eingesetzt werden können.

Aber heißt es nicht dasselbe, zu sagen „zwei Namen haben *einen* Träger“ und „zwei Namen haben ein- und dieselbe Bedeutung“? (Morgenstern, Abendstern, Venus.)

²¹Wenn mit dem Satz „‚A‘ und ‚B‘ haben denselben Träger“ gemeint ist: „der Träger des Namens²² ‚A‘“ bedeutet dasselbe wie „der Träger des Namens²³ ‚B‘“, so ist alles in Ordnung, weil das dasselbe heißt wie $A = B$. Ist aber mit dem Träger von „A“ etwa der Mensch gemeint, von dem es sich feststellen läßt, daß er auf den Namen „A“ getauft ist; oder der Mensch, der das Täfelchen mit dem Namen „A“ um den Hals trägt; etc., so ist es gar nicht gesagt, daß ich mit „A“ diesen Menschen meine, und daß die Namen, die den gleichen Träger haben, dasselbe bedeuten.²⁴

32 ²⁵Aber zeigen wir nicht zur Erklärung der Bedeutung auf den Gegenstand, den der Name vertritt? Ja; aber dieser Gegenstand ist nicht „die Bedeutung“, obwohl sie durch das Zeigen auf diesen Gegenstand bestimmt wird.

Aber es bestimmt hier schon das richtige Verstehen des Wortes „Träger“ in dem besondern Fall (Farbe, Gestalt, Ton, etc.) die Bedeutung sozusagen bis auf eine letzte Bestimmung. D.h. der²⁶ erklärende Hinweis auf den Träger entscheidet nur noch eine Frage nach der Bedeutung von der Art: „Welcher dieser Leute ist Herr N?“, „Welche Farbe heißt ‚lila‘?“, „Welcher Ton ist das hohe C?“²⁷

31v ²⁸Man kann sagen: Die Bedeutung eines²⁹ Wortes lehren, heißt seinen Gebrauch lehren & das kann man durch Hinweisen auf den Träger eines Namens tun, wenn dieser Gebrauch, sozusagen, schon bis auf eine letzte Bestimmung bekannt ist.

Erinnere Dich daran, daß durch die selbe hinweisende Geste auf denselben Körper die Bedeutung von Worten verschiedener Art erklärt werden kann.³⁰ Z.B.: „das heißt ‚Holz‘“, „das heißt ‚braun‘“, „das heißt³¹ ‚Stab‘“, „das heißt³² ‚Federstiel‘“.

Denken wir aber dagegen³³ an das Zeigen & Benennen von Gegenständen, wie³⁴ man Kindern die Anfänge der Sprache lehrt. Hier kann man natürlich nicht sagen, diese Erklärung (wenn man das eine Erklärung nennen will) gebe noch eine letzte Bestimmung über den Gebrauch des Wortes, & das Kind

17 (M): ♀ /

18 (V): oder etwa eine Figur, die wir jetzt „Rössel“ nennen würden, als Königsfigur zu nehmen?

31 19 (V): Wir verstehen unter „Bedeutung des Namens“ nicht den Träger des Namens. // Unter „Bedeutung des // eines // Namens“ wird nicht . . . verstanden.

20 (M): (

21 (M): – /

22 (V): Träger ~~von~~

23 (V): Träger ~~von~~

24 (M):)

25 (M): (

26 (V): der ♣

27 (M):)

28 (M): (// // //

29 (V): des

30 (V): Körper Worte verschiedener Art erklärt werden können.

31 (V): heißt ein

32 (V): heißt ein

33 (V): wieder

34 (V): Gegenständen, durch das

¹⁴Wouldn't it be similar if I decided to change the shapes of chess pieces or, say, to treat a knight as the king?¹⁵ Then how would it be shown that the wooden knight is a king? Can't I quite rightly speak of a change in meaning here?

By meaning of a name we don't understand its bearer.¹⁶

¹⁷One can say that the words "The bearer of the name 'N'" have the same meaning as the name "N" – and thus can be used for each other.

But doesn't it mean the same thing to say "Two names have *one* bearer" and "Two names have one and the same meaning"? (Morning star, evening star, Venus.)

¹⁸If what is meant by the sentence "'A' and 'B' have the same bearer" is: "The bearer of the name 'A'"¹⁹ means the same as "The bearer of the name 'B'"²⁰, then everything is all right because that means the same as A = B. But if, for instance, "the bearer of 'A'" means the person of whom it can be ascertained that he was given the name "A" at his baptism, or the person who is wearing a little plaque with the name "A" around his neck, etc., then it is by no means certain that by "A" I mean this person, and that names that have the same bearer mean the same thing.²¹

²²But when we want to explain the meaning of a name, don't we point to the object it stands for? Yes, but this object isn't "the meaning", even though that is specified by pointing to the object.

But here understanding the word "bearer" correctly in a particular case (colour, shape, sound, etc.) determines the meaning, except for one final determination, so to speak. That is, what is left for the explanatory reference to the bearer to decide is this sort of question about the meaning: "Which of these people is Mr N?", "Which colour is called 'lilac'?", "Which note is high C?".²³

²⁴One can say: To teach the meaning of a word means teaching its use, and one can do this by pointing to the bearer of a name, if this use is already known except for one final determination, as it were.

Remember that by using the same ostensive gesture toward the same physical object the meaning of different kinds²⁵ of words can²⁶ be explained. For example: "That means 'wood' ", "That means 'brown' ", "That means 'stick' ", "That means 'penholder' ".

But on the other hand,²⁷ let's think about pointing to and naming objects, as²⁸ one teaches children the beginnings of language. Of course one can't say that this explanation (if one wants to call it an explanation) provides one last determination of the use of a word; and the child can't

14 (M): ÷ /

15 (V): or, say, to treat the piece that we now call "knight" as the king?

16 (V): We don't understand by "meaning of the name" its bearer. // By "meaning of the // a // name" we don't understand its bearer.

17 (M): (

18 (M): – /

19 (V): bearer ~~of~~ 'A' "

20 (V): bearer ~~of~~ 'B' "

21 (M):)

22 (M): (

23 (M):)

24 (M): (// // /

25 (V): object, different kinds

26 (V): ~~could~~

27 (V): Then again,

28 (V): objects, by means of which

kann auch noch nicht fragen „wie heißt das?“ . (D.h., diese „Erklärung“³⁵ ist nicht die Antwort auf die Frage „wie heißt dieser Gegenstand“.)³⁶

32 ³⁷Wenn ich sage „die Farbe dieses Gegenstands heißt ‚violett‘“, so muß ich die Farbe mit den ersten Worten „die Farbe dieses Gegenstands“ schon benannt haben, sie schon zur Taufe gehalten haben, damit die Namengebung geschehen kann.³⁸ Denn ich könnte auch sagen „der Name dieser Farbe (der Farbe dieses Dings) ist von Dir zu bestimmen“, und der den Namen gibt, müßte nun schon wissen, wem er ihn gibt (an welchen Platz der Sprache er ihn stellt).

³⁹Ich könnte so⁴⁰ erklären, die Farbe dieses Flecks heißt „rot“, die Form „Kreis“. Und hier stehen die Wörter „Farbe“ und „Form“ für Anwendungsarten (grammatische Regeln) und bezeichnen⁴¹ in Wirklichkeit Wortarten, wie „Eigenschaftswort“, „Hauptwort“. Man könnte sehr wohl in der deutschen Grammatik die Bezeichnungen⁴² „Farbwort“, „Formwort“, „Klangwort“ einführen. (Aber mit demselben Recht auch „Baumwort“, „Buchwort“?)

33 ⁴³Der Name, den ich einem Körper gebe, einer Fläche, einem Ort, einer Farbe, hat in jedem dieser Fälle eine⁴⁴ andere Grammatik. „A“⁴⁵ in „A ist gelb“ hat eine andere Grammatik, wenn es⁴⁶ der Name eines Körpers als⁴⁷ wenn es der Name der Fläche eines Körpers ist, ob nun der⁴⁸ Satz „dieser Körper ist gelb“ sagt, daß die Oberfläche des Körpers gelb ist, oder daß er durch und durch gelb ist. Und man zeigt in anderem Sinne auf einen Körper; auf seine Länge, & auf seine Farbe.⁴⁹ D.h. es ist etwa⁵⁰ eine Definition möglich: auf eine Farbe zeigen heißt auf den Körper zeigen der sie hat. ⁵¹Und so hat auch das hinweisende Fürwort „dieser“ andere Bedeutung (d.h. Grammatik), wenn es sich auf Hauptwörter mit verschiedener Grammatik⁵² bezieht. [Worin soll der Unterschied dieser Grammatiken liegen?]

⁵³Man kann sagen „dieser Körper ist durch & durch gelb“ aber nicht, „seine Oberfläche ist durch & durch gelb“.

Auf eine Zahl deuten.

⁵⁴Und wer⁵⁵ auf einen Körper zeigt, zeigt dadurch, aber eben darum in anderem Sinne, auf seine Farbe, seine Gestalt, den Ort an dem er sich befindet. Wie der, welcher jemand Klavier spielen hört, dadurch in anderem Sinne das Musikstück hört, welches gespielt wird & in noch anderem Sinne die Schönheit des Stückes. – Aber was heißt es „er hört in anderem Sinne“, „er zeigt in anderem Sinne“. Was ich meine wäre jedenfalls in einer Definition ausgedrückt die etwa sagte: auf eine Farbe zeigen, heißt: auf einen Körper zeigen der die Farbe hat. Also etwa $F(\phi) = (\exists x) \cdot \phi x \cdot Fx$.⁵⁶ Daß F von ϕ in andern Sinne ausgesagt wird als von x heißt, daß ich statt Fx nicht wieder einen Ausdruck wie die rechte Seite setzen kann.

35 (V): (Diese „Erklärung“

36 (M):)

37 (M): ? /

38 (V): damit der Akt der Namengebung das sein kann, was er ist.

39 (M): ? /

40 (V): also

41 (V): sind

42 (V): wohl in der (gewöhnlichen) Grammatik neben diesen Wörtern die Wörter

43 (M): ü ? /

44 (V): hat jedes Mal

45 (V): ~~Der Name~~ „A“

46 (V): A

47 (V): ~~und~~

48 (V): ~~ein~~

49 (V): durch gelb ist. „Ich zeige auf A“ hat verschiedene Grammatik, je nachdem A ein Körper, eine Fläche, eine Farbe ist etc. // Und man zeigt in anderem Sinne auf den Körper A, auf die Länge A eines Körpers, & auf die Farbe A. 33 32v

50 (V): ist z.B.

51 (M): ? ///

52 (V): Hauptwörter verschiedener Grammatik

53 (M): J

54 (M): J

55 (V): wer (mit der Hand)

56 (O): $F(\phi) = (\exists x) \cdot \phi x \cdot Fx$

yet ask "What's the name for that?". (That is, such an "explanation"²⁹ is not the answer to the question "What's the name of this object?".)³⁰

³¹If I say "The colour of this object is 'violet'", then I must already have named the colour when I said "the colour of this object"; I must already have presented the colour at the baptismal font so that the naming can take place.³² For I could also say "The name of this colour (of the colour of this thing) is for you to decide", and then the person who is to give the name would have to know to what he is going to give it (at what location in the language he is going to position it).

³³I could explain things this way: the colour of this patch is called "red", the shape "circle". And here the words "colour" and "shape" stand for kinds of application (grammatical rules) and really signify³⁴ kinds of words, such as "adjective", "noun". One could perfectly well introduce the terms "colour-word", "shape-word", "sound-word" into English³⁵ grammar.³⁶ (But also, with the same justification, "tree-word", "book-word"?)

³⁷The name I give to an object, a surface, a place, a colour, has a different grammar in each of these cases.³⁸ "A"³⁹ in "A is yellow" has a different grammar when it⁴⁰ is the name of an object from⁴¹ when it is the name of the surface of an object, regardless of whether the⁴² proposition "This object is yellow" says that the surface of the object is yellow or that it is yellow through and through. And one points in different senses to an object, to its length and to its colour.⁴³ That is to say, one could come up with a definition: pointing to a colour means pointing to the object that has that colour. ⁴⁴Likewise the demonstrative pronoun "this" also has different meanings (i.e. a different grammar) when it refers to nouns with different grammars. [What is the difference between these grammars supposed to consist in?]

⁴⁵One can say "This object is yellow through and through" but not "Its surface is yellow through and through".

To point to a number.

⁴⁶And a person who points to an object⁴⁷ thereby points to its colour, its shape, the place where it is; but for that very reason he is pointing to it in a different sense in each case. Just as whoever hears someone playing a piano hears the piece that is being played in a different sense, and he hears the beauty of the piece in yet another sense. – But what does "He hears in a different sense", "He points to in a different sense", mean? Whatever the case, what I mean can be expressed by a definition something like this: Pointing to a colour means: pointing to an object that has that colour. So for example: $F(\phi) = (\exists x).\phi x \cdot Fx$.⁴⁸ That F is asserted of ϕ in a different sense than it is of x means that I can't replace Fx with another expression such as that on the right side.

29 (V): (This "explanation"

30 (M):)

31 (M): ? /

32 (V): so that the act of name-giving can be what it is.

33 (M): ? /

34 (V): really are

35 (V): (ordinary)

36 (V): grammar to stand alongside the latter terms.

37 (M): r ? /

38 (V): grammar every time.

39 (V): ~~The name~~ "A"

40 (V): ~~A~~

41 (V): ~~and~~

42 (V): ~~is~~

43 (V): through. "I'm pointing to A" has a different grammar depending on whether A is a solid, a surface, a colour, etc. // And one points in a different sense to the object A, to the length A of an object, and to the colour A.

44 (M): ? // /

45 (M): ∫

46 (M): ∫

47 (V): physical object (with his hand)

48 (O): $F(\phi) = (\exists x) \cdot \phi x \cdot Fx$

9

34 Die Bedeutung eines Wortes ist das, was die¹ Erklärung der Bedeutung erklärt.²

33v ³„Bedeutung, das was die Erklärung der B. erklärt“ d.h.: Fragen wir nicht was⁴ Bedeutung sei, sondern sehen wir nach⁵ was man die „Erklärung⁶ der B.“ nennt.

34 ⁷Man sagt dem Kind: „nein, kein Stück Zucker mehr!“ und nimmt es ihm weg. So lernt das Kind die Bedeutung des Wortes „kein“.

Hätte man ihm mit denselben Worten ein Stück Zucker gereicht, so hätte es gelernt, das Wort anders zu verstehen. Es hat damit gelernt, das Wort gebrauchen, aber auch ein bestimmtes Gefühl mit ihm zu verbinden, es in bestimmter Weise zu erleben.

⁸Veranlassen wir es dadurch nicht, Worten einen Sinn beizulegen, ohne daß wir sie durch ein anderes Zeichen ersetzen, also ohne diesen Sinn auf andere Weise auszudrücken? Veranlassen wir es nicht gleichsam, für sich etwas zu tun, dem kein äußerer Ausdruck gegeben wird, oder wozu der äußere Ausdruck nur im Verhältnis einer Hindeutung steht? Die Bedeutung ließe sich nicht aussprechen, sondern nur auf sie von ferne hinweisen. Sie ließe sich gleichsam nur verursachen. Aber welchen Sinn hat es dann überhaupt, wenn wir von dieser Bedeutung reden? (Schlag und Schmerz)

33v ⁹Was wollen wir unter „Bedeutung“ eines Worts verstehen? Ein charakteristisches Gefühl, das das Aussprechen (Hören) des Wortes begleitet? (Das und-Gefühl, wenn-Gefühl James's) Oder wollen wir das Wort „Bedeutung“ ganz anders gebrauchen; &, z.B., sagen zwei Worte haben die gleiche Bedeutung wenn dieselben gramm. Regeln von beiden gelten? Wir können es halten, wie wir wollen, müssen aber wissen¹⁰ daß dies zwei gänzlich verschiedene Gebrauchsweisen (Bedeutungen) des Wortes „Bedeutung“ sind. (Man kann vielleicht auch von einem spezifischen Gefühl reden welches der Schachspieler bei Zügen mit dem König empfindet.)

34 ¹¹Gibt mir die Erklärung des Wortes die Bedeutung, oder verhilft sie mir nur zur
33v Bedeutung? Ist die Bedeutung das Gefühl, dann ist die Bedeutung in der Erklärung nicht
34 niedergelegt, aber durch sie etwa bewirkt wie¹² die Krankheit durch eine Speise.

1 (V): die (~~grammatische~~)

2 (R): [Dazu der letzte Satz dieses §] Siehe auch §41 S. 179

3 (M): ✓

4 (V): was ~~die~~

5 (V): wir uns an

6 (V): die „Erklärung“

7 (M): ? / ✓

8 (M): ? / XXX

9 (M): ✓

10 (V): wollen, ~~aber wir~~ müssen wissen

11 (M): / ✓

12 (V): Bedeutung? So daß also das Verständnis in der Erklärung nicht niedergelegt wäre, sondern durch sie nur äußerlich bewirkt, wie

9

The Meaning of a Word is What the¹ Explanation of its Meaning Explains.²

³“Meaning: what the explanation of meaning explains”, that is: Let’s not ask what⁴ meaning is, but instead let’s examine⁵ what is called the “explanation of meaning”.

⁶One says to a child: “Stop, no more sugar!”, and takes the sugar cube away from him. That’s the way a child learns the meaning of the word “no”.

Had one said the same words while handing him a sugar cube, he would have learned to understand the word differently. In this way he has learned to use the word, but also to associate a particular feeling with it, to experience it in a particular way.

⁷Isn’t this the way we cause the child to attribute sense to words, without substituting another sign for them, and thus without expressing the sense in a different way? Aren’t we causing him, as it were, to do something for himself, which is given no outward expression, or for which the outward expression serves only as a suggestion? As if the meaning couldn’t be uttered – one could merely point to it from afar. One could merely trigger it, as it were. But then what’s the point of talking about meaning at all? (Blow and Pain)

⁸What do we want to understand by the “meaning” of a word? A characteristic feeling that accompanies the uttering (hearing) of the word? (James’s and-feeling, if-feeling.) Or do we want to use the word “meaning” completely differently; and say, for instance, that two words have the same meaning if the same grammatical rules apply to both? We can do as we like, but we must⁹ be aware that these are two completely different uses (meanings) of the word “meaning”. (Perhaps one can also speak of a specific feeling felt by a chess player when he moves his king.)

¹⁰Does an explanation of a word give me its meaning, or does it only help me find it? If meaning is a feeling, then meaning isn’t established by the explanation, but is brought about by it, say as¹¹ an illness is by a certain kind of food.

1 (V): the (~~Grammatical~~)

2 (R): [To the last sentence of this §] See also §41 p. 179

3 (M): ✓

4 (V): what ~~the~~

5 (V): let’s look at

6 (M): ? / ✓

7 (M): ? / XXX

8 (M): ✓

9 (V): ~~but~~ we must

10 (M): / ✓

11 (V): it? So that understanding would thus not be recorded in the explanation, but would merely be externally caused by it, as

33v ¹³In *einem* Sinn kann man die Erklärung der Bedeutung die Ausschließung von Mißverständnissen nennen.¹⁴ Sie sagt, das Wort hat diese Bedeutung, nicht jene.

¹⁵Und „Erklärung der Bedeutung“ nennen wir vielerlei.

34 ¹⁶Das Problem äußert sich auch in der Frage: Wie erweist sich ein Mißverständnis? Denn
35 das ist dasselbe wie das Problem: Wie zeigt es sich, daß ich richtig verstanden habe? Und das ist: Wie kann ich die Bedeutung erklären?

Es fragt sich nun: Kann sich ein Mißverständnis darin äußern, daß, was der Eine bejaht, der Andere verneint?

¹⁷Nein, denn dies ist eine Meinungsverschiedenheit und kann als solche aufrecht erhalten werden. Bis wir *annehmen*, der Andere habe Recht. . . .

¹⁸Wenn ich also, um das Wort „lila“ zu erklären, auf einen Fleck zeigend sage „dieser Fleck ist lila“, kann diese Erklärung dann auf zwei Arten funktionieren? einerseits als Definition, die den Fleck als Zeichen gebraucht, andererseits als Erläuterung? Und wie das letztere? Ich müßte annehmen, daß der Andere die Wahrheit sagt und dasselbe sieht, was ich sehe. Der Fall, der wirklich vorkommt, ist etwa folgender: A erzählt dem B in meiner Gegenwart, daß ein bestimmter Gegenstand lila ist. Ich höre das, habe den Gegenstand auch gesehen und denke mir: „jetzt weiß ich doch, was ‚lila‘ heißt“. Das heißt, ich habe aus jener Beschreibung¹⁹ eine Worterklärung gezogen.

Ich könnte sagen: Wenn das, was A dem B erzählt, die Wahrheit ist, so muß das Wort „lila“ *diese* Bedeutung haben.

Ich kann diese Bedeutung also auch quasi hypothetisch annehmen und sagen: wenn ich das Wort *so*²⁰ verstehe, hat A Recht. Aber dem „so“ entspricht eine Hinweisende Definition.

²¹Man sagt: „Ja, wenn das Wort *das* bedeutet, so ist der Satz wahr“.

²²Nehmen wir an, die Erklärung der Bedeutung war nur eine *Andeutung*: konnte man da nicht sagen: Ja, wenn diese Andeutung *so* verstanden wird, dann gibt das Wort in dieser Verbindung einen wahren Satz etc. Aber dann muß²³ nun dieses „so“ ausgedrückt sein.

Die Erklärung immer nur eine Andeutung.

36 ²⁴Die Erklärung eines Zeichens kann jede Meinungsverschiedenheit in Bezug auf seine Bedeutung beseitigen.²⁵

Und ist dann noch eine Frage nach der Bedeutung zu entscheiden?

²⁶Mißverständnis nenne ich das, was durch eine Erklärung zu beseitigen ist. Die Erklärung der Bedeutung eines Wortes schließt Mißverständnisse aus.

²⁷Die Aufklärung wird in einer Spr. gegeben, die²⁸ unabhängig von dem Mißverständnis besteht.

13 (M): ✓

14 (V): In *einem* Sinn ist die Erklärung der Bedeutung die Aufklärung von Mißverständnissen.

15 (M): ✓

16 (M): / ✓ / / / /

17 (M): ? / / / / ✓

18 (M): / (R): [Zu S. 48]

19 (V): aus jenen Sätzen

20 (O): Wort ‚so‘

21 (M): /

22 (M): ? / XXXXX

23 (V): muß ~~man~~

24 (M): / / / / ✓

25 (V): Zeichens muß jede Meinungsverschiedenheit in Bezug auf seine Bedeutung beseitigen können.

26 (M): / / /

27 (M):]

28 (V): Die Aufklärung kann nur verstanden werden, wenn sie in einer Sprache gegeben wird, die

¹²In *one* sense, you can call an explanation of a meaning the exclusion of misunderstandings.¹³ It says that the word has this but not that meaning.

¹⁴And there are all sorts of things we call “explanation of meaning”.

¹⁵The problem also emerges in this question: How does a misunderstanding become evident? For that’s the same as the problem: How does it become evident that I have understood correctly? And that means: How can I explain the meaning?

Now the question is: Can a misunderstanding be revealed in one person’s affirming what another denies?

¹⁶No, because that’s a difference of opinion and it can be adhered to as such. Until we *assume* that the other person is right

¹⁷So if to explain the word “lilac” I point to a patch and say “This patch is lilac”, can this explanation then work in two ways – on the one hand as a definition that uses the patch as a sign, and on the other as an elucidation? And how is the latter possible? I would have to assume that the other person is telling the truth and seeing the same thing I’m seeing. A case that really occurs is something like this: In my presence A tells B that a certain object is lilac. I hear this, and have also seen the object, and think to myself: “Now I know for sure what ‘lilac’ means”. That is, I have extracted an explanation of the word from that description.¹⁸

I could say: If what A told B is the truth, then the word “lilac” must have *this* meaning.

So I can also assume this meaning quasi-hypothetically, and say: if I understand the word *in that way*, then A is right. But an ostensive definition corresponds to the “*in that way*”.

¹⁹We say: “Yes, if the word means *that*, then the proposition is true”.

²⁰Let’s assume that an explanation of meaning were only an allusion. Then couldn’t one say: Well, if this allusion is understood *in such a way*, then the word in this context produces a true proposition, etc.? But then the “*in such a way*” has to be expressed.

An explanation is always just an allusion.

²¹The explanation of a sign can²² remove every disagreement about its meaning.

And then – is there still a question about meaning that needs deciding?

²³What can be removed by an explanation I call a misunderstanding. The explanation of the meaning of a word excludes misunderstandings.

²⁴Clarification is given in a language that²⁵ is free of the misunderstanding.

12 (M): ✓

13 (V): In *one* sense the explanation of a meaning is the elucidation of misunderstandings.

14 (M): ✓

15 (M): / ✓ / / / /

16 (M): ? / / / / ✓

17 (M): / (R): [To p. 48]

18 (V): from those sentences.

19 (M): /

20 (M): ? / ××××

21 (M): / / / / ✓

22 (V): sign must be able to

23 (M): / / /

24 (M): ∫

25 (V): Clarification can only be understood if it is given in a language that

35v ²⁹Was für Konsequenzen will ich daraus ziehen?!³⁰

Hängt damit zusammen daß die Erklärung an Stelle des Zeichens gebraucht werden kann. Der Satz sollte sagen daß die Erklärung nur innerhalb der schon ihrem Wesen nach verstandenen Sprache geschieht. Die Erklärung entscheidet nur zwischen Möglichkeiten die der Fragende selbst voraussehen konnte. Nicht die Sprache als solche wird³¹ für ihn aufgebaut, sondern nur diese Ausdrucksweise. Da die Aufklärung ja verstanden wird so konnte sie auch als Möglichkeit schon früher ins Auge gefaßt werden; es konnte auch nach ihr unmittelbar gefragt werden, so daß der Erklärende nur mehr „ja“ oder „nein“ zu antworten hatte. Und mit „ja“ & „nein“ konnte er nicht das Wesen der Sprache erklären.

³²Wie kann Einer nach der Erklärung einer Wortbedeutung fragen? – Z.B. so: „Welche Farbe heißt ‚violett‘?“, oder:³³ „welches heißt³⁴ das 3 gestrichene C?“; aber auch so: „was heißt das Wort ‚nefas‘?“.

³⁵Auf die erste & zweite Frage³⁶ wird man durch ein Zeigen antworten & die Frage hatte das auch vorausgesehen. Die dritte Frage könnte man durch eine Übersetzung ins Deutsche beantworten (oder auch durch Beispiele der Anwendung). – Wie aber, wenn ein mathematisch nicht vorgebildeter fragte „Was bedeutet das Wort ‚Integral‘?“ . Da müßte man wohl antworten: das ist ein mathematischer Ausdruck, den ich Dir erst dann erklären kann,³⁷ wenn Du mehr Mathematik verstehen wirst.

³⁸Ich habe einmal als Kind nach der Bedeutung des Wortes „etwas“ gefragt [oder war es „vielleicht“?]. Man antwortete mir: „das verstehst Du noch nicht“ Wie aber hätte man es erklären sollen!³⁹ Durch eine Definition? oder sollte man sagen,⁴⁰ das Wort sei undefinierbar? Wie ich es später verstehen gelernt habe, weiß ich nicht; aber ich habe wohl Phrasen, worin das Wort vorkommt anwenden gelernt. Und dieses Lernen hatte wohl am meisten Ähnlichkeit mit einem Abrichten [abgerichtet Werden].

Ich wollte hier [auf dieser⁴¹ Seite] das Wesen des Mißverständnisses im Gegensatz zum Unverständnis der Sprache darstellen.

36 ⁴²Ein Mißverständnis ist:⁴³ „Ist *das* eine Orange? ich dachte *das* sei eine“.

Wie ist es mit diesem: „Ist⁴⁴ *das* rot?⁴⁵ ich dachte, *das* sei ein *Sessel*“⁴⁶?

Kann⁴⁷ man sich nicht einbilden (wenn man⁴⁸ nicht deutsch versteht) „rot“ heiße laut (werde⁴⁹ so gebraucht, wie tatsächlich das Wort „laut“ gebraucht wird)? Wie wäre⁵⁰ die Aufklärung dieses Mißverständnisses? Etwa so: „rot ist diese⁵¹ Farbe, – keine Tonstärke“⁵² – Eine solche Erklärung könnte man natürlich geben, aber sie wäre nur dem verständlich, der sich bereits⁵³ in der Grammatik auskennt.

29 (M): ////

30 (E): Pfeilspitze eines von der vorhergehenden Bemerkung herführenden Pfeiles.

31 (V): Nicht die Sprache wird

32 (M): ? /

33 (V): ‚violett‘? – ~~aber au~~:

34 (V): ist

35 (M): ? /

36 (V): Auf die erste Frage

37 (V): antworten: das kann ich Dir erst dann erklären,

38 (M): ¿ / / /

39 (V): sollen?

40 (V): oder hätte man ~~mir~~ sagen sollen,

41 (E): Pfeil verweist auf TS Seite 36.

42 (M): ¿

43 (V): Das sind Mißverständnisse:

44 (V): ~~Kann man sagen~~: „Ist

45 (V): rot?

46 (V): Sessel

47 (V): ~~Aber~~ kann

48 (V): man ~~etwa~~

49 (V): laut) (~~d. h.~~ werde

50 (V): wäre ~~aber~~

51 (V): ~~eine~~

52 (V): Tonstärke“?

53 (V): bereits ~~gan~~

²⁶What sorts of consequences do I want to draw from this?!²⁷

It's connected with the fact that an explanation can be used in place of a sign. That sentence was supposed to say that an explanation takes place only within a language whose nature is already understood. The explanation only decides between possibilities that the person asking the question could himself foresee. It is not language as such that²⁸ is being constructed for him, just this mode of expression. Since the clarification is in fact understood, it could also have been considered as a possibility earlier; someone could also have asked for the clarification directly, such that the person doing the explaining had only to answer "Yes" or "No". And he couldn't explain the nature of language with "Yes" and "No".

²⁹How can someone ask for an explanation of a word's meaning? – Like this, for instance: "Which colour is called 'violet'?", or "Which note is called³⁰ C with three lines?"; but also like this: "What does 'nefas' mean?".

³¹The first and second questions³² will be answered by pointing, and that is what the questions had anticipated. One could answer the third question by translating the word into English (or also by giving examples of its usage). – But what if someone who had no previous mathematical training were to ask "What does the word 'integral' mean?". One would probably have to answer: That is a mathematical expression that I won't be able to explain to you³³ until you understand more mathematics.

³⁴As a child I once asked about the meaning of the word "something" (or was it "perhaps"?). I was given the answer: "You don't understand that yet". But how should it have been explained!³⁵ By a definition? Or should it be said³⁶ that the word was indefinable? I don't know how I learned to understand it later; but probably I learned how to use phrases in which the word appeared. And this learning most closely resembled training [being trained].

Here [on this page]³⁷ I wanted to portray the nature of misunderstanding, as opposed to a lack of understanding, of a language.

³⁸A misunderstanding is:³⁹ "Is *this* an orange? I thought *that* was one."

What about this:⁴⁰ "Is *that* red?⁴¹ I thought that was a *chair*.⁴²"?

Can't⁴³ one believe (if one⁴⁴ doesn't understand English) that "red" means loud (is⁴⁵ used as the word "loud" actually is)? How⁴⁶ would one clear up this misunderstanding? Something like this: "Red is this⁴⁷ colour – not a volume."⁴⁸ – Of course one could give such an explanation, but it would only be understandable to someone who already⁴⁹ knows his way around in grammar.

26 (M): ////

27 (E): An arrow leads here from the previous remark.

28 (V): not language that

29 (M): ? /

30 (V): note is

31 (M): ? /

32 (V): The first question

33 (V): answer: I won't be able to explain that to you

34 (M):] ///

35 (V): explained?

36 (V): Or should it have been said ~~to me~~

37 (E): An arrow points to p. 36 of the TS.

38 (M):]

39 (V): These are misunderstandings:

40 (V): ~~Can one say:~~

41 (V): red?

42 (V): chair.

43 (V): ~~But~~ can't

44 (V): (if ~~perhaps~~ one

45 (V): ~~is~~, is

46 (V): ~~But~~ how

47 (V): ~~is~~

48 (V): sound~~?~~

49 (V): already ~~completely~~

⁵⁴Der Satz „ist das rot? ich dachte, das sei ein Sessel“ hat nur Sinn, wenn das Wort „das“ beide Male im gleichen Sinn gebraucht wird und dann muß ich entweder „rot“ als Substantiv, oder „ein Sessel“ als Adjektiv auffassen.

„Heißt ‚weak‘ *schwach*? ich dachte, es heiße *Woche*.“

36 ⁵⁵Ist es denn nicht denkbar, daß ein grammatisches System in der Wirklichkeit zwei (oder mehr) Anwendungen hat?

37 Ja, aber wenn wir das überhaupt sagen können, so müssen wir die beiden Anwendungen auch durch eine Beschreibung unterscheiden können.

⁵⁶Zu sagen, daß das Wort „rot“ mit allen Vorschriften, die von ihm gelten, das bedeuten könnte, was tatsächlich das Wort „blau“ bedeutet; daß also durch diese Regeln die Bedeutung nicht fixiert ist, hat nur einen Sinn, wenn ich die beiden Möglichkeiten der Bedeutung ausdrücken kann und dann sagen, welche die von mir bestimmte ist.

(Diese letztere Aussage ist aber eben die Regel, die vorher zur Eindeutigkeit gefehlt hat.)

⁵⁷Die Grammatik erklärt die Bedeutung der Wörter, soweit sie zu erklären ist. Und zu erklären ist sie soweit, als nach ihr gefragt werden kann; und nach ihr fragen kann man soweit, als sie zu erklären ist. Die Bedeutung ist das, was wir in der Erklärung der Bedeutung eines Wortes erklären.

⁵⁸„Das, was 1⁵⁹ cm³ Wasser wiegt, hat man ‚1Gramm‘ genannt“ – „Ja, was wiegt er denn?“ (Bedeutung eines Wortes).⁶⁰

Mißverständnis. Unverständnis. Die Erklärung der Bedeutg immer nur⁶¹ eine Andeutg.

54 (M):]

55 (M):] (R): Zu S. 43

56 (M): ? / /// [Vagueheit des Wortes „Wortart“.]

(R): Zu S. 43

57 (M): ? / ///

58 (M): / ✓

59 (V): ein

60 (V): („Bedeutung eines Wortes“).

61 (V): der Bedeutg nur

⁵⁰The expression “Is that red? I thought that was a chair” only makes sense if the word “that” is used in the same sense both times, and then I have to understand either “red” as a noun or “a chair” as an adjective.

“Does ‘Wagen’ mean ‘cart’? I thought it meant ‘dare’.”

⁵¹Isn’t it conceivable that in reality a grammatical system has two (or more) applications?

Yes, but if we can say that at all, then we have to be able to differentiate between the two applications with a description.

⁵²To say that the word “red”, along with all of the rules that apply to it, could mean what in fact the word “blue” means – i.e. that its meaning isn’t fixed by these rules – only makes sense if I can express the two possibilities of meaning and then say which is the one I’ve specified.

(But this latter statement is precisely the rule that prevented them from meaning the same thing.)

⁵³Grammar explains the meaning of words to the extent that it can be explained. And it can be explained to the extent that questions about it can be asked: and one can ask questions about it to the extent that it can be explained. Meaning is what we explain in explaining the meaning of a word.

⁵⁴“What 1⁵⁵ c.c. of water weighs is called ‘1 gram’ ” – “Yes, but what does it weigh?” (Meaning of a word).⁵⁶

Misunderstanding. Lack of understanding. The explanation of meaning is always just⁵⁷ an allusion.

50 (M): J

51 (M): J (R): To p. 43

52 (M): ? / /// [Vagueness of the words “type of word”.] (R): To p. 43

53 (M): ? / ///

54 (M): / ✓

55 (V): a

56 (V): (“Meaning of a word”).

57 (V): is just

10

38 „Die Bedeutung eines Zeichens
ist durch seine Wirkung
(die Assoziationen,
die es auslöst, etc.) gegeben.“

37v ¹Man möchte mit dem Gedächtnis & der Assoziation den *Mechanismus des Bedeutens* erklären.

²Aber wir fühlen, daß es uns nicht auf eine³ Erklärung eines Mechanismus ankommen kann. Denn diese Erklärung ist wieder eine Beschreibung von Phänomenen in der⁴ Sprache. Sie sagt, etwa:⁵ wenn das Wort „rot“ gehört wird, springt die Vorstellung rot hervor. (Eine Tafel durch den Druck⁶ eines Knopfes) Nun, wenn das eintritt, – was weiter? Wir wollen⁷ eben die⁸ Erklärung eines Kalküls⁹ hören.

38 Und die Erklärung des Mechanismus stellt sich außerhalb des Kalküls.¹⁰ Sie hat mit dem, was uns interessiert, nichts zu tun. Sie ist selbst eine Beschreibung in der Sprache & eine die in den Kalkül, der uns etwa erklärt werden soll, nicht eingreift. Während wir eine Erklärung brauchen, die ein Teil dieses Kalküls ist.

¹¹Wenn ich sage, das Symbol ist das, was diesen Effekt hervorruft, so fragt es sich eben, wie ich von diesem Effekt reden kann, wenn er gar nicht da ist. Und wie ich weiß, daß es *der ist, den ich gemeint habe*, wenn er eintritt.¹²

37v ¹³Der Ausdruck „das was diesen Effect hervorruft“ ist¹⁴ ja wieder ein Symbol. Und¹⁵ erklärt daher das Wesen des Symbols nicht.

38 ¹⁶Es ist darum keine Erklärung, zu sagen: sehr einfach, wir vergleichen die Tatsache mit unserem Erinnerungsbild, – weil vergleichen eine bestimmte Vergleichsmethode voraussetzt, die wieder nur beschrieben ist.¹⁷

¹⁸Wie soll er wissen, welche Farbe er zu wählen hat, wenn er das Wort „rot“ hört? – Sehr einfach: er soll die Farbe nehmen, deren Bild ihm beim Hören des Wortes einfällt. –

1 (M): || 2 /

2 (M): /

3 (V): die

4 (V): Phänomenen durch die

5 (V): etwa,

6 (V): Druck ~~auf~~

7 (V): wollen ja

8 (V): Wir wollen die

9 (V): Kalküls ~~nicht eines Mechanismus~~

10 (V): Kalküls ~~auf~~.

11 (M): /

12 (V): ~~kommt~~.

13 (M): /

14 (V): „Das was diesen Effect hervorruft“ ~~ist~~ // Die Worte „das was diesen Effect hervorruft“ sind

15 (V): Und ~~dieser Satz~~

16 (M): /

17 (V): voraussetzt, die nicht gegeben ist. // die nur wieder beschrieben ist.

18 (M): /

10

“The Meaning of a Sign is Given by its Effect (the Associations that it Triggers, etc).”

¹One would like to use memory and association to explain the *mechanism of meaning*.

²But we feel that an explanation³ of a mechanism can't be what is important to us. For once again this explanation is a description of linguistic phenomena.⁴ It says, for example: when the word “red” is heard the mental image of red pops up. (A tab on⁵ a register by pressing a button.) Well, when that happens – what of it? What we want to hear is the explanation of a calculus.⁶ And the explanation of a mechanism situates itself outside the calculus.⁷ It has nothing to do with what we're interested in. It is itself a description within language and one that doesn't engage with the calculus that's to be explained to us. Whereas we need an explanation that is a part of this calculus.

⁸If I say that a symbol is what produces this particular effect, then the question is how I can talk about this effect if it isn't even there? And when it does occur how do I know that it is *the one I meant*?

⁹The expression¹⁰ “what produces this particular effect” is¹¹ a symbol itself, and¹² therefore doesn't explain the nature of a symbol.

¹³Therefore it's no explanation to say: “It's quite simple, we compare the fact with the image in our memory” – because comparing presupposes a particular method of comparison, which in turn is only described.¹⁴

¹⁵How is he to know which colour to choose when he hears the word “red”? – Quite simple: He's to pick the colour whose image comes to his mind when he hears the word. –

1 (M): || | 2 /

2 (M): /

3 (V): that the explanation

4 (V): of phenomena via language.

5 (V): ef

6 (V): calculus, ~~not a mechanism~~.

7 (V): calculus ef.

8 (M): /

9 (M): /

10 (V): phrase

11 (V): “~~What~~ what produces this effect” is

12 (V): and ~~this proposition~~

13 (M): /

14 (V): comparison, which is not given. // which is only in turn described.

15 (M): /

Aber wie soll er wissen, was die „Farbe“ ist, „deren Bild ihm einfällt“?¹⁹ Braucht es dafür ein weiteres Kriterium? u.s.f.

(Es *gibt* übrigens auch ein Spiel: die Farbe wählen, die einem beim Wort „rot“ einfällt.)

- 37v ²⁰Man kann aber auch sagen, daß dieser Satz (die Bedeutung des Zeichens „rot“ sei die Farbe, die ich mit dem Wort assoziiere)²¹ die²² Erklärung einer bestimmten Bedeutung, d.h. eine Definition, ist; aber nicht die Erklärung²³ des Begriffs der Bedeutung.

„rot“ bedeutet die Farbe, die mir beim Hören des Wortes ‚rot‘ einfällt“ ist eine Definition.

²⁴Bezieht sich auf das, was Frege, & gelegentlich Ramsey,²⁵ vom Wiedererkennen als einer Bedingung des Symbolisierens sagte.

Was ist denn das Kriterium dessen, daß ich die Farbe rot richtig wiedererkannt habe? Etwa so etwas²⁶ wie das Erlebnis der Freude beim Wiedererkennen?

- 38 ²⁷(Die psychologischen – trivialen – Erörterungen über Erwartung, Assoziation, etc. lassen immer das eigentlich Merkwürdige aus und man merkt ihnen an, daß sie herumreden, ohne den springenden Punkt zu berühren.) Und umso mehr, als es nie *notwendig* ist die Wirkungsweise eines Wortes durch Assoziation & Gedächtnis zu erklären & weil man statt²⁸ der Vorstellungsbilder immer wirkliche (gemalte) Bilder verwenden könnte.
- 37v

- 38, 39 ²⁹Wenn ich Worte wählen kann, daß sie der Tatsache – in irgend einem Sinne passen, dann muß ich also schon vorher einen Begriff dieses Passens gehabt haben. Und nun fängt das Problem von Neuem an, denn, wie weiß ich, daß dieser Sachverhalt dem Begriff vom „Passen“ entspricht.

³⁰Aber warum beschreibe ich dann die Tatsache gerade *so*? Was ließ Dich *diese* Worte sagen?

³¹Und wenn ich nun sagen würde: „alles was geschieht, ist eben, daß ich auf diese Gegenstände sehe und dann diese Worte gebrauche“, so wäre die Antwort: „also besteht das Beschreiben in weiter nichts? und ist es immer eine Beschreibung, wenn Einer . . .?“ Und darauf müßte ich sagen: „Nein. Nur kann ich den Vorgang nicht anders, oder doch nicht mit einer andern Multiplizität beschreiben, als, indem ich sage: ‚ich beschreibe, was ich sehe‘; und *darum* ist keine Erklärung mehr möglich, weil mein Satz bereits die richtige Multiplizität hat.“

³²Ich könnte³³ fragen: Warum verlangst Du Erklärungen? Wenn diese gegeben sein werden,³⁴ wirst Du ja doch wieder vor einem Ende stehen. Sie können Dich nicht weiter führen, als Du jetzt bist. („Nähmaschine“)

³⁵In welchem Sinne sagt man, man kennt die Bedeutung des Wortes A, noch ehe man den Befehl, in dem es vorkommt, befolgt hat? Und inwiefern kann man sagen, man hat die Bedeutung durch die Befolgung des Befehls kennengelernt? Können die beiden Bedeutungen miteinander in Widerspruch stehen?

19 (V): wissen, was das ist: „die Farbe, die ihm einfällt“?

20 (M): /

21 (V): assoziiere) ~~zur~~

22 (V): ~~eine~~

23 (O): Erklärung

24 (M): /

25 (V): Ramsey, ~~ab~~

26 (V): Etwa etwas

27 (M): /

28 (V): durch Assoziation zu erklären & man statt

29 (M): /

30 (M): /

31 (M): ∫ ///

32 (M): /

33 (V): könnte ~~auch so~~

34 (V): würden,

35 (M): ∫ XXX

But how is he to know what the “colour” is “whose image comes to his mind”?¹⁶ Is a further criterion necessary for this?, and so forth.

(By the way, there also *is* a game: choosing the colour that comes to mind on hearing the word “red”.)

¹⁷But one can also say that this proposition (that the meaning of the sign “red” is the colour that I associate with the word)¹⁸ is the¹⁹ explanation of a specific meaning, i.e. a definition; but not the explanation of the concept of meaning.

“ ‘Red’ means the colour that comes to mind when I hear the word ‘red’ ” is a definition.

²⁰Refers to what Frege and occasionally Ramsey said about recognizing as a prerequisite for symbolizing.

What *is* the criterion for my having correctly recognized the colour red? Maybe something like experiencing joy upon recognizing it?

²¹(The psychological – trivial – discussions about expectation, association, etc. always leave out what is really remarkable, and you can tell that they’re beating around the bush without touching upon the essential point.) And all the more so because it’s never *necessary* to use association and memory to explain how a word has an effect, and because you could²² always use real (painted) pictures instead of mental images.

²³If I can choose words so that in some sense they fit a particular fact, that means that I must already have had a concept of that fitting. And now the problem begins anew, because how do I know that this state of affairs corresponds to the concept of “fitting”?

²⁴But why do I describe the fact just *this way*? What caused you to say *these* words?

²⁵And now if I were to say: “All that happens is that I look at these objects and then use these words,” the response would be: “So there’s nothing more to describing? And is it always a description if someone . . . ?” And to this I would have to say: “No. It’s just that I can’t describe the process differently, or at any rate with any other multiplicity, than by saying: ‘I describe what I see’; and *for that reason* no further explanation is possible, because my proposition already has the right multiplicity.”

²⁶I could ask:²⁷ Why are you demanding explanations? When these are given you’ll²⁸ just be facing a dead end again. They can’t take you any further than you are now. (“Sewing machine”)

²⁹In what sense does one say that one knows the meaning of word A, even before one has followed the command in which it occurs? And to what extent can one say that one has come to know the meaning by following the command? Can the two meanings contradict each other?

16 (V): what “the colour that comes to mind” is?

17 (M): /

18 (V): word) ~~to the~~

19 (V): ~~an~~

20 (M): /

21 (M): /

22 (V): association to explain . . . effect, and one could

23 (M): /

24 (M): /

25 (M): ∫ ///

26 (M): /

27 (V): I could ~~also~~ ask ~~this~~:

28 (V): If these were given you’d

29 (M): ∫ XXX

³⁶Ich wünsche mir, einen Apfel zu bekommen. In welchem Sinne kann ich sagen, daß ich noch vor der Erfüllung des Wunsches die Bedeutung des Wortes „Apfel“ kenne? Wie äußert sich denn die Kenntnis der Bedeutung? d.h., was versteht man denn unter ihr.

40 Offenbar wird das Verständnis des Wortes durch eine Worterklärung gegeben, welche nicht die Erfüllung des Wunsches ist.

³⁷Die Bedeutung ist eine Festsetzung, nicht Erfahrung. Und damit nicht Kausalität. Was das Zeichen suggeriert, findet man durch Erfahrung. Es ist die Erfahrung, die uns lehrt, welche Zeichen am seltensten mißverstanden werden. Das Zeichen, soweit es suggeriert, also soweit es wirkt, interessiert uns nicht. Es interessiert uns nur als Zug in einem Spiel: Glied in einem System, das selbstbedeutend ist; das seine Bedeutung in sich selbst hat.³⁸

³⁹Unsere Weise von den Wörtern zu reden, können wir durch das beleuchten, was Sokrates im „Kratylos“ sagt. Kratylos: „Bei weitem und ohne Frage ist es vorzüglicher, Sokrates, durch ein Ähnliches darzustellen, was jemand darstellen will, als durch das erste beste.“ – Sokrates: „Wohl gesprochen, . . .“⁴⁰

39v ⁴¹Es ist eine Funktion des Wortes „rot“ uns die Farbe in Erinnerung zu rufen & es könnte z.B. gefunden werden, daß sich dazu das Wort „rot“ besser eignet als ein anderes (daß seine Bedeutung etwa schwerer vergessen oder verwechselt wird).⁴² Aber wir hätten uns, wie gesagt, statt des Mechanismus der Assoziation⁴³ einer Tabelle (oder dergl.) bedienen können; & nun müßte unser Kalkül eben mit dem assoziierten oder gemalten Bild [Muster] weiterschreiten. Die Zweckmäßigkeit eines Zeichens in jenem Sinne interessiert uns nicht. (Im Gegensatz dazu: Kratylos: „Bei weitem . . . erste beste“.)

40 ⁴⁴Ich könnte mir denken, daß ein Philosoph glaubte, einen Satz⁴⁵ in⁴⁶ roter Farbe drucken lassen zu müssen, da er erst so ganz das ausdrücke, was der Autor sagen will. (Hier hätten wir die magische Auffassung der Zeichen statt der logischen.)⁴⁷

39v ⁴⁸Aber wäre das wirklich so unsinnig, verwenden wir denn nicht wirklich Sperrdruck? – Ich wollte sagen: die Wirkung eines Satzes auf das Gemüt ist nicht sein Sinn.

40 ⁴⁹Die Untersuchung, ob die Bedeutung eines Zeichens seine Wirkung ist, ist eine grammatische Untersuchung.

41 ⁵⁰Ich glaube, auf die kausale Theorie der Bedeutung kann man einfach antworten, daß wir, wenn Einer einen Stoß erhält und umfällt, das Umfallen nicht die Bedeutung des Stoßes nennen.⁵¹

36 (M):]

37 (M):] //

38 (V): Spiel: Glied in einem System, das selbstständig ist. // Glied in einem System; das seine Bedeutung in sich selbst hat.

39 (M): / ✓

40 (E): Siehe: Platon, *Kratylos*, 434a.

41 (M): ? /

42 (V): besser eignet (daß seine Bedeutung etwa schwerer vergessen wird). // wird). ~~als~~

43 (V): Assoziation ~~das~~

44 (M): ? / (R): [Zu § 14 S. 58 oder § 89 S. 414]

45 (V): ~~Es wäre charakteristisch für eine bestimmte irrige Auffassung, wenn ein Philosoph glaubte, einen Satz // Ein Philosoph könnte glauben einen Satz~~

46 (V): mit

47 (V): (logischen.) XXX (Das magische Zeichen würde wirken wie eine Droge, und für sie wäre die kausale Theorie richtig.)

48 (M): ? /

49 (M): /

50 (M): /

51 (V): nennen.

³⁰I wish to have an apple. In what sense can I say that I know the meaning of the word “apple” even before my wish is fulfilled? How does the knowledge of the meaning manifest itself? That is to say, what are we to understand by this knowledge?

Obviously the understanding of the word is given by a verbal explanation. But that isn’t the fulfilment of the wish.

³¹Meaning is a stipulation, not an experience. And therefore it is not causality. What the sign suggests is found through experience. It is experience that teaches us which signs are least frequently misunderstood. In so far as the sign is suggestive, i.e. in so far as it has an effect, it doesn’t interest us. It only interests us as a move in a game: as a component in a system that is self-meaning; that means all by itself.³²

³³We can shed light on the way we talk about words by considering what Socrates says in the *Cratylus*. Cratylus: “By far and without question it is more excellent, Socrates, to portray what someone wants to portray by using something similar to it than by using the next best thing.” – Socrates: “Well spoken, . . .”³⁴

³⁵One function of the word “red” is to recall the colour to our memory, and it might be found, for instance, that the word “red” is better suited for this than another one, (that, say, its meaning is less readily forgotten or confused).³⁶ But, as mentioned above, we could have used a table (or something like it) instead of the mechanism of association; and then our calculus would simply have to proceed using the associated or painted image [sample]. We’re not interested in the suitability of a sign in that sense. (In contrast to this: Cratylus: “By far . . . next best thing”.)

³⁷I can imagine that a philosopher might believe³⁸ he had to have a sentence printed in³⁹ red, since only in this way would it express completely what the author wanted to say. (Here we would have a magical, rather than logical, understanding of signs.)⁴⁰

⁴¹But would that really be so nonsensical? Don’t we in fact use spaced type? – I wanted to say: The effect of a sentence on one’s feelings is not its sense.

⁴²Investigating whether the meaning of a sign is its effect is a grammatical investigation.

⁴³I believe that we can respond to the causal theory of meaning simply by saying that – if someone is pushed and falls down, we do not *call*⁴⁴ the falling down the meaning of the push.

30 (M): J

31 (M): J ///

32 (V): as a component in a system that is self-supporting. // as a component in a system that means all by itself.

33 (M): / ✓

34 (E): Cf. Plato, *Cratylus*, 434a.

35 (M): ? /

36 (V): better suited (that, say, its meaning is less readily forgotten).

37 (M): ? / (R): [To § 14 p. 58 or § 89 p. 414]

38 (V): ~~It would be characteristic of a certain erroneous view if a philosopher were to believe~~ // A philosopher might believe

39 (V): printed with

40 (V): signs.) XXX (The magical sign would have the effect of a drug, and for it the causal theory would be correct.)

41 (M): ? /

42 (M): /

43 (M): /

44 (V): ~~call~~

40v ⁵²Die Verwendung einer Landkarte ist, daß wir uns in irgend einer Weise nach ihr⁵³ richten. Daß wir ihr Bild in unsere Handlungen übertragen.⁵⁴ Es ist klar daß hier kausale Zusammenhänge stattfinden; aber würden wir sagen, sie sind es die den Plan zum Plan machen?⁵⁵

⁵⁶Der Sinn der Sprache ist nicht durch ihre Wirkung⁵⁷ bestimmt. Oder: Was man den Sinn, die Bedeutung, in der Sprache nennt, ist nicht ihre Wirkung.⁵⁸

Damit meinte ich,⁵⁹ daß, was wir Sinn eines Satzes nennen & durch eine sprachliche Erklärung erklärt wird, nichts mit dem zu tun hat, was die beabsichtigte Wirkung der Sprache⁶⁰ hervorrufen hilft.

⁶¹Es ist wirklich „the meaning of meaning“, was wir untersuchen: Oder⁶² die Grammatik des Wortes „Bedeutung“.

52 (M): ∫

53 (V): ihm

54 (V): Die Verwendung eines Plans ist eine Übersetzung in unsere Handlungen. Eine Übertragung in unsere Handlungen.

55 (V): Es ist klar, daß da kausale Zusammenhänge gesehen werden, aber es wäre komisch, die als das Wesen eines Planes auszugeben. // aber würde man sagen, sie sind es die den Plan zum Plan machen?

56 (M): ∫ ///

57 (V): durch ~~ihren Zweck~~

58 (V): nicht ihr ~~Zweck~~.

59 (V): ich, ~~ursprünglich~~

60 (V): hat, was ~~diese Wirkung~~

61 (M): ∫

62 (V): Nämlich

⁴⁵The use of a map is that in some way we take our bearings from it. That we transfer its image into our actions.⁴⁶ It's clear that causal connections take place here; but would we say that they are what make the map a map?⁴⁷

⁴⁸The sense of language is not determined by its effect.⁴⁹ Or: What one calls sense, meaning, in language is not its effect.⁵⁰

By this I mean⁵¹ that what we call the sense of a proposition, what is explained by an explanation of language, has nothing to do with what helps produce the intended effect⁵² of language.

⁵³It really is "the meaning of meaning" we're investigating: or⁵⁴ the grammar of the word "meaning".

45 (M): ∫

46 (V): The use of a map is a translation into our actions. A transferral into our actions.

47 (V): It's clear that causal connections are seen here, but it would be comic to represent them as the essence of a map. // but would one say that they make the map into a map?

48 (M): ∫ ///

49 (V): by ~~its purpose~~.

50 (V): its ~~purpose~~.

51 (V): mean ~~primarily~~

52 (V): produce this ~~effect~~

53 (M): ∫

54 (V): namely,

11

42

Bedeutung als Gefühl, hinter dem Wort stehend; durch eine Geste ausgedrückt.

41v ¹Jeder, der einen Satz einer ihm geläufigen Sprache liest, nimmt die Worte der verschiedenen
42 Wortarten in anderer Weise auf² obwohl sich ihr Bild & Klang³ der Art nach nicht unterscheidet.
Wir vergessen ganz, daß „nicht“ und „Tisch“ und „grün“, als Laute oder Schriftbilder
betrachtet sich nicht wesentlich voneinander unterscheiden und sehen es nur klar in einer
uns fremden Sprache. (James.) (Bedeutungskörper.)⁴

⁵Das „Nicht“ macht eine abwehrende⁶ Geste.

Nein, es *ist* eine abwehrende Geste.

„Das Verstehen der Verneinung ist dasselbe, wie das Verstehen einer abwehrenden Geste.“

41v

Den Kopf schütteln.

Verstehen des Wortes „nicht“ im Sinne von „wissen, wie es gebraucht wird“ & dagegen das
Verstehen einer Geste, *der Eindruck* den mir die Geste macht.

Andererseits sagt man: ich verstehe diese Geste, wie: ich verstehe dieses Thema, es sagt mir etwas
& das heißt hier: ich erlebe es, es greift in mich ein:⁷ Ich folge ihm mit bestimmtem Erlebnis.

Wie lernt man eine Geste verstehen, die uns nicht durch Worte erklärt (definiert) wird?

42

⁸Gefragt, was ich mit „und“ im Satze „gib mir das Brot *und* die Butter“ meine, würde
ich mit einer Gebärde antworten, und diese Gebärde würde, was ich meine⁹ illustrieren.
Wie das grüne Täfelchen „grün“ illustriert und wie die W-F-Notation „und“, „nicht“, etc.
illustriert.¹⁰

¹¹Die Geste des Wortes „vielleicht“; des Wortes „bitte“ & „danke“ als Erklärung der Bedeutung
dieser Wörter.¹²

1 (R): Zu: S. 29 (M): als Zitat / (

2 (V): liest, ~~sieht~~ die Worte . . . in anderer Weise

3 (V): Jeder, der einen Satz liest und versteht, sieht
die Worte // die verschiedenen Wortarten // in
verschiedener Weise, obwohl sich ihr Bild und
Klang

4 (M):)

5 (M):]

6 (V): verneinende

7 (V): das heißt hier: es greift in mich ein:

8 (M): / / / /

9 (V): Gebärde würde die Bedeutung

10 (R): \forall S. 16/1,2 \nexists

11 (M): $\times\times\times$

12 (M): [Wo anders besser]

11

Meaning as Feeling, Standing Behind the Word; Expressed with a Gesture.

¹Anyone reading a sentence in a familiar language takes² the various types of words in different ways even though their appearance and sound³ don't differ in kind. We completely forget that "not" and "table" and "green", seen as sounds or written images, don't differ from each other very much, and we see this clearly only in a foreign language. (James.) (Meaning-body.)⁴

⁵"Not" makes a rebuffing⁶ gesture.

No, it *is* a rebuffing gesture.

"Understanding a negation is the same thing as understanding a rebuffing gesture."

To shake one's head.

Understanding the word "not" in the sense of "knowing how it is used" and, in contrast, understanding a gesture, *the impression* a gesture makes on me.

On the other hand one says "I understand this gesture" in the same way as "I understand this theme; it speaks to me", and here that means: I am involved with it, it engages me:⁷ I am involved in a particular way as I follow it.

How do we learn to understand a gesture that isn't explained to us (defined for us) in words?

⁸If I were asked what I mean by "and" in the sentence "Give me the bread *and* the butter," I'd answer with a gesture, and this gesture would illustrate what I mean.⁹ Just as the green colour chip illustrates "green" and the truth-table illustrates "and", "not", etc.¹⁰

¹¹The gestures for the words "maybe", "please", and "thank you" as an explanation of the meaning of these words.¹²

1 (R): To: p. 29; (M): as quotation / (

2 (V): ~~sees~~

3 (V): Anyone reading and understanding a sentence sees the words // the various types of words // in different ways even though their appearance and sound

4 (M):)

5 (M): J

6 (V): denying

7 (V): means: it engages me:

8 (M): / / / /

9 (V): illustrate its meaning.

10 (R): \forall p. 16/1,2; ~~✓~~

11 (M): ~~XXX~~

12 (M): [Better somewhere else]

12

43 Man tritt mit der hinweisenden Erklärung der Zeichen nicht aus der Sprachlehre heraus.

¹Zur Grammatik gehört nur das nicht, was die Wahrheit und Falschheit eines Satzes ausmacht. Nur darum kümmert sich die Grammatik nicht. Zu ihr gehören alle Bedingungen des Vergleichs des Satzes mit den Tatsachen.² Das heißt, alle Bedingungen des Verständnisses. (Alle Bedingungen des Sinnes.)

42v ³Die Deutung der Schrift & Lautzeichen durch hinweisende Erklärungen ist nicht Anwendung der Sprache sondern ist ein Teil der Sprachlehre.⁴ Die Deutung vollzieht sich noch im Allgemeinen, als Vorbereitung auf jede Anwendg. Sie geht in der *Sprachlehre* vor sich und nicht im Gebrauch der Sprache.

⁵Soweit sich die Bedeutung der Wörter in der eingetroffenen Erwartung, in der Befolgung des Befehls zeigt,⁶ kommt sie⁷ in der *Beschreibung* der Tatsache zum Vorschein. (Sie wird also ganz in der Sprachlehre bestimmt.)

(In dem, was sich hat voraussehen lassen; worüber man schon vor dem Eintreffen der Tatsache reden konnte.)

42v ⁸„Das nennt man einen Krautkopf“ ist eine hinw. Def., & gehört zur *Sprachlehre*. „Gib mir diesen Krautkopf“ ist ein Satz der Sprache, der die Wortsprache verläßt da er eine Gebärde & ein Object verlangt worauf gezeigt wird.⁹

43, 44 ¹⁰Der Grund, warum wir glauben, mit der hinweisenden Erklärung das Gebiet der Sprache, des Zeichensystems, zu verlassen, ist,¹¹ daß¹² wir dieses Heraustreten aus den *Schriftzeichen* mit einer Anwendung der Sprache, etwa mit einer Beschreibung dessen, was wir sehen,¹³ verwechseln.

1 (M): ∫ / / / (R): √ S. 36/6, S. 37/1

2 (V): Satzes mit der Wirklichkeit.

3 (M): ? /

4 (V): Die Anwendung der Sprache geht über diese hinaus, aber nicht die Deutung der Schrift- ~~und~~ oder Lautzeichen. // Die Deutung der Schrift & Lautzeichen durch hinweisende erklärungen gehört nicht in die Anwendung der Sprache sondern zu ihrer Grammatik . . .

5 (M): ∫ / / / /

6 (V): Soweit die Bedeutung der Wörter in der Tatsache (Handlung) zum Vorschein kommt,

7 (V): sie (~~schon~~)

8 (M): ? /

9 (V): & ein Object worauf gezeigt wird ~~verlangt~~.

10 (M): ∫

11 (E): „ist“ sinngemäß eingesetzt.

12 (V): Ist nicht der Grund, warum wir glauben, . . . zu verlassen, daß

13 (V): was ~~ich sehe~~,

12

In Giving an Ostensive Explanation of Signs one Doesn't Leave Grammar.

¹The only thing that doesn't belong to grammar is what makes a proposition true or false. That's the only thing grammar is not concerned with. Everything that's required for comparing the proposition with the facts² belongs to grammar. That is, all the requirements for understanding. (All the requirements for sense.)

³The interpretation of written and oral signs by ostensive explanations is not an application of language, but a part of grammar.⁴ The interpretation still takes place in a general realm, as a preparation for any application. It takes place in *grammar* and not in the use of language.

⁵In so far as the meaning of words appears in the fulfilment of an expectation, in the carrying out of a command,⁶ it⁷ makes its appearance in the *description* of a fact. (Thus it is completely determined within grammar.)

(In what could be foreseen, in what one could talk about, even before the fact occurred.)

⁸"This is called a cabbage" is an ostensive definition, and it belongs to *grammar*. "Give me this cabbage" is a sentence in a language, and it goes beyond word-language, since it calls for a gesture and an object to which one points.

⁹The reason we believe that in using an ostensive explanation we are leaving the province of language, of a system of signs, is that¹⁰ we confuse this stepping outside the *written signs* with an application of language, for instance with a description of what we see.¹¹

1 (M): ∫ / / / (R): ∀ p. 36/6, p. 37/1

2 (V): with reality

3 (M): ? /

4 (V): The application of language goes beyond language, but the interpretation of written ~~and~~ or oral signs does not. // The interpretation of written and oral signs by ostensive explanations does not fall under "application of language", but belongs ~~to~~ ~~the grammar of language.~~

5 (M): ∫ / / / /

6 (V): appears in a fact (action)

7 (V): it (~~already~~)

8 (M): ? /

9 (M): ∫

10 (V): Isn't the reason we believe that . . . signs, that

11 (V): what ~~I~~-see.

¹⁴Man könnte fragen wollen: Ist es denn aber ein Zufall, daß ich zur Erklärung von¹⁵ Zeichen, also zur Vervollständigung des Zeichensystems aus den¹⁶ Schrift- oder Lautzeichen heraus-treten muß? Trete ich damit nicht eben in das Gebiet, in dem¹⁷ sich dann das Beschriebene¹⁸ abspielt? Aber ist es nicht seltsam, daß ich dann überhaupt mit dem Schriftzeichen etwas anfangen kann?¹⁹ – Man sagt etwa, daß²⁰ die Schriftzeichen bloß die Vertreter jener Dinge sind, auf die man zeigt. – Aber wie seltsam, daß so eine Vertretung möglich ist. Und es wäre nun das Wichtigste, zu verstehen, wie denn Schriftzeichen die andern Dinge vertreten *können*.

Welche Eigenschaft müssen sie haben, die sie zu dieser Vertretung befähigt. Denn ich kann nicht sagen: statt Milch trinke ich Wasser und esse statt Brot Holz, indem ich das Wasser die Milch und Holz das Brot vertreten lasse. (Erinnert an Frege.)

²¹Ich kann nun freilich doch sagen, daß das Definiendum das Definiens vertritt; und hier steht dieses hinter jenem, wie die Wählerschaft hinter ihrem Vertreter. Und in diesem Sinne kann man auch sagen, daß das in der hinweisenden Definition erklärte Zeichen den Hinweis vertreten kann, da man ja diesen wirklich in einer Gebärdensprache für jenes setzen könnte. Aber doch handelt es sich hier um eine Vertretung im Sinne einer Definition, denn die Gebärdensprache bleibt²² eine Sprache.

Ich möchte sagen: Von einem Befehl in der Gebärdensprache zu seiner Befolgung ist es ebenso weit, wie von diesem Befehl in der Wortsprache.

Denn auch die hinweisenden Erklärungen müssen ein für allemal gegeben werden.

45 D.h., auch sie gehören zu dem Grundstock von Erklärungen, die den Kalkül vorbereiten, und nicht zu seiner Anwendung ad hoc.

14 (M): ∫ (R): [Zu § 13]

15 (V): vom

16 (V): dem

17 (V): Gebiet, worin

18 (V): dann das zu Beschreibende

19 (V): abspielt? Aber dann ist // erscheint // es seltsam, daß ich überhaupt . . . kann.

20 (V): Man faßt es etwa so auf, daß

21 (M): ∫

22 (V): ist

¹²One might want to ask: But is it really a coincidence that in order to explain signs, i.e. in order to complete the system of signs, I have to step outside the written or oral signs? In doing this, am I not entering the very area in which¹³ what was described¹⁴ takes place? But in that case isn't it odd¹⁵ that I can use the written sign at all? – One says, for instance, that¹⁶ the written signs are merely substitutes for the things that one points to. – But how strange that such a substitution is possible. And now the most important thing would be to understand how written signs *can* substitute for other things.

What property must they have that qualifies them for this substitution? For, letting water stand for milk and wood for bread, I can't say: I'll drink water instead of milk and eat wood instead of bread. (Reminiscent of Frege.)

¹⁷But I *can* say that the definiendum represents the definiens; and here the latter stands behind the former as does the electorate behind its representative. And in this sense one can also say that the sign explained by an ostensive definition can represent the ostension, since in a language of gestures one really could replace the ostension with the sign. And yet what we have here is a matter of representation in the sense of a definition, for the language of gestures is still¹⁸ a language.

I'd like to say: The distance from a command to its being followed is just as great in the language of gestures as it is in word-language.

For ostensive explanations too have to be given once and for all.

That is, they too belong to the basic stock of explanations that prepare the calculus, and not to its *ad hoc* application.

12 (M): ∫ (R): [To § 13]

13 (V): where

14 (V): described then

15 (V): But then it's // it seems // odd

16 (V): One conceives of it in such a way that

17 (M): ∫

18 (V): is

46 „Primäre und sekundäre Zeichen“.
Wort und Muster.
Hinweisende Definition.

¹Der falsche Ton in der Frage, ob es nicht primäre Zeichen (hinweisende Gesten) geben *müsse*, während unsere Sprache auch ohne die andern, die Worte, auskommen könnte, liegt darin, daß man eine *Erklärung* der bestehenden Sprache zu erhalten erwartet, statt der einfachen² Beschreibung.

³Nicht die Farbe Rot tritt an Stelle des Wortes „rot“, sondern die Gebärde, die auf einen roten Gegenstand hinweist, oder das rote Täfelchen.

45v Man kann nun sagen: ein rotes Täfelchen ist ein primäres⁴ Zeichen für rot, ein Wort⁵ ein sekundäres, weil⁶ es die Bedeutung des Wortes „rot“⁷ erklärt wenn ich auf ein rotes Täfelchen zeige⁸ etc., dagegen nicht, wenn ich sage „rot“ heiße soviel wie „rouge“. Aber ist dies unter allen Umständen so? Muß immer ein roter Gegenstand oder ein rotes Vorstellungsbild gegenwärtig sein, wenn ich das Wort rot verstehen soll? Denke an den Befehl „stelle Dir einen roten Fleck auf blauem Grund vor“. Und wie ist es mit⁹ Bindewörtern, Präpositionen etc.?

Ist es nicht (für mich) ein Kriterium meines¹⁰ Verständnisses des Wortes „perhaps“ daß ich es ins Wort „vielleicht“ übersetzen kann?

Und wenn ein Befehl lautet „stell’ Dir einen roten Kreis vor“, muß ich da wirklich das Wort rot zuerst in ein Farbmuster übersetzen ehe ich den Befehl befolgen kann?¹¹

46 ¹²Wenn Einer sagte: „Es gilt mit Recht als ein Zeichen des Verständnisses¹³ des Wortes „rot“, daß Einer einen roten Gegenstand auf Befehl aus anders gefärbten herausgreifen kann; dagegen ist das richtige Übersetzen des Wortes „rot“ ins Englische oder Französische kein Beweis des Verstehens. Darum ist das rote Täfelchen ein primäres Zeichen für „rot“, dagegen jedes Wort ein abgeleitetes¹⁴ Zeichen“, – so könnte¹⁵ ich antworten: das zeigt nur¹⁶ was Du¹⁷ mit „verstehen“ meinst.¹⁸ Und was heißt „es gilt mit *Recht* . . .“? Heißt es: Wenn ein Mensch einen

45v
46

1 (M): /

2 (V): bloßen

3 (M): J ✓

4 (V): ist das primäre

5 (V): rot. ~~das Wort „rot“~~

6 (V): weil ~~ich~~ ~~ich~~

7 (V): „rouge“

8 (V): auf ein Täfelchen zeige

9 (V): mit ~~anderen Wortarten~~

10 (V): ~~es~~

11 (V): Befehl verstehe?

12 (M): Nur als Probe des Puzzlements ? /

13 (V): Nun sage ich aber: „Es gilt mit Recht als ein Kriterium des Verstehens // Verständnisses //

14 (V): sekundäres

15 (V): würde

16 (V): nur ~~das~~

17 (V): Du ~~hier~~

18 (V): Zeichen.“ ((Aber das zeigt nur, was ich mit dem „Verstehen des Wortes ‚rot‘“ meine.

13

“Primary and Secondary Signs”. Word and Sample. Ostensive Definition.

¹The false ring to the question: “Don’t primary signs (ostensive gestures) *have* to exist, whereas our language could manage without the others – the words?”, lies in the fact that we expect to be given an *explanation* of an existing language instead of a simple² description.

³It isn’t the colour red that takes the place of the word “red”, but the gesture that points to a red object or to a red colour chip.

One can say: A red colour chip is a⁴ primary sign for red, the word⁵ a secondary one, because⁶ pointing to a red chip⁷, etc., explains the meaning of the word “red”⁸, but saying that “red” is the equivalent of “*rouge*” doesn’t. But is this the way it is in all situations? Does a red object or a mental image of red always have to be present for me to understand the word “red”? Think of the command “Imagine a red patch on a blue background”. And how about⁹ conjunctions, prepositions, etc.?

Isn’t it (as far as I’m concerned) a criterion of my understanding¹⁰ the word “*vielleicht*” that I can translate it into the word “perhaps”?

And if a command says “Imagine a red circle” do I really have to translate the word “red” into a colour sample before I can obey¹¹ it?

¹²Suppose someone were to say:¹³ “If someone who is ordered to do so can pick out a red object from among others coloured differently, that rightly counts as a sign that he understood¹⁴ the word “red”, whereas correctly translating the word “red” into German or French is no proof of his understanding. Therefore the red colour chip is a primary sign for “red”, whereas any word is a derivative¹⁵ sign.” – Then I could¹⁶ respond: That only¹⁷ shows what you mean¹⁸ by “understanding”.¹⁹ And what does “*rightly* counts . . .” mean? Does it mean: If someone who

1 (M): /

2 (V): mere

3 (M): ✓

4 (V): the

5 (V): red, ~~the word “red”~~

6 (V): because ++

7 (V): to a chip

8 (V): the word “*rouge*”

9 (V): about ~~other kinds of words~~

10 (V): criterion ~~of~~ understanding

11 (V): understand

12 (M): Just as a proof of the puzzlement ? /

13 (V): But now I say:

14 (V): that rightly counts as a criterion for understanding

15 (V): secondary

16 (V): would

17 (V): only ~~that~~

18 (V): you mean ~~here~~

19 (V): sign.” ((But that only shows what I mean by “understanding the word ‘red’”).

- 47 roten Gegenstand auf Befehl etc. etc., dann hat er erfahrungsgemäß auch das Wort „rot“ verstanden. Wie man sagen kann, gewisse Schmerzen gelten mit Recht als Symptom dieser und dieser Krankheit? So ist es natürlich nicht gemeint. Also soll es wohl heißen, daß die Fähigkeit, rote Gegenstände herauszugreifen, der spezifische Test¹⁹ dessen ist, was wir Verständnis des Wortes „rot“ nennen. Dann bestimmt diese Angabe also, was wir mit²⁰ diesem Verständnis meinen. Aber dann fragt es sich noch: wenn wir das Übersetzen ins Englische etc. als Kriterium ansähen, wäre es nicht auch das Kriterium von dem, was wir ein Verständnis des Wortes nennen? Es gibt nun den Fall, in welchem wir sagen: ich weiß nicht, was das Wort „rouge“²¹ bedeutet, ich weiß nur, daß es das Gleiche bedeutet, wie das Englische „red“. So ist es, wenn ich die beiden Wörter in einem Wörterbuch auf der gleichen Zeile gesehen habe, und dies ist die Verifikation des Satzes und sein Sinn. Wenn ich dann sage „ich weiß nicht, was das Wort „rouge“²² bedeutet“, so bezieht sich dieser Satz auf eine Möglichkeit der Erklärung dieser Bedeutung und ich könnte, wenn gefragt „wie stellst Du Dir denn vor, daß Du erfahren könntest, was das Wort bedeutet“, Beispiele solcher Erklärungen geben (die die Bedeutung des Wortes „Bedeutung“ beleuchten würden). Diese Beispiele wären dann entweder der Art, daß statt des unverständenen Worts ein verstandenes – etwa das deutsche – gesetzt würde, oder, daß die Erklärung von der Art wäre „diese“²³ Farbe heißt „violett“. Im ersten Falle wäre es für mich ein Kriterium dafür, daß er das Wort „rouge“ versteht:²⁴ daß er sagt, es entspreche dem deutschen „rot“. „Ja“, wird man sagen, „aber nur, weil Du schon weißt, was das deutsche ‚rot‘ bedeutet“. – Aber das bezieht sich ja ebenso auf die hinweisende Definition. Das Hinweisen auf das rote Täfelchen ist auch nur dann²⁵ ein Zeichen des Verständnisses, wenn²⁶ vorausgesetzt wird, daß er die Bedeutung *dieses* Zeichens kennt,²⁷ was etwa soviel heißt, als daß er das Zeichen auf bestimmte Weise verwendet. – Es gibt also allerdings²⁸ den Fall, wo Einer sagt „ich weiß, daß dieses Wort dasselbe bedeutet, wie jenes, weiß aber nicht, was es bedeutet (sie bedeuten)“. Willst Du den ersten Teil dieses Satzes verstehen, so frage Dich: „wie konnte er es wissen?“ – willst Du den zweiten Teil verstehen, so frage: „wie kann er erfahren, was das Wort bedeutet?“ –
- 48
- 47v ²⁹Welches ist das Kriterium unseres Verständnisses: das Wort richtig gebrauchen, oder, seine Definition geben?³⁰ Das Auswählen eines roten Gegenstands aus anderen wenn es verlangt wird,³¹ oder, die hinweisende Erklärung des W. „rot“ geben?³²
- 48 Die Lösung beider Aufgaben betrachten wir als Zeichen des Verständnisses. Hören wir jemand das Wort „rot“ gebrauchen und zweifeln daran, daß er es versteht, so können wir ihn zur Prüfung fragen „welche Farbe nennst Du“³³ „rot“. Andererseits,³⁴ wenn wir jemandem die hinweisende Erklärung gegeben hätten³⁵ und nun sehen wollten, ob er sie³⁶ richtig

19 (V): Probe

20 (V): ~~unter~~

21 (V): „rot“

22 (V): „rot“

23 (F): MS 112, S. 74r.

24 (V): versteht,

25 (V): darum

26 (V): weil

27 (V): versteht,

28 (V): wohl

29 (M): /

30 (V): Verständnisses: das richtige *Gebrauchen* des Wortes oder das Definieren?

31 (V): geben? Einen roten Gegenstand ... auswählen ... ,

32 (V₁): oder, die hinweisende Erklärung geben? // oder das hinweisende Erklären des Wortes „rot“. (V₂): ? / Welches ist denn das Kriterium unseres Verständnisses: das Aufzeigen des roten Täfelchens, wenn gefragt wurde „welches von diesen Täfelchen ist rot“, – oder, das Wiederholen der hinweisenden Definition „das ist ‚rot‘“?

33 (V): Farbe nennen wir

34 (V): Andererseits:

35 (V): hätten „diese Farbe heißt ‚rot‘“

36 (V): er ~~diese Erklärung~~

is ordered to do so can pick out a red object, etc., etc., then experience shows us that he has also understood the word “red”? As one can say that certain pains are rightly counted as symptoms of this or that illness? Of course that’s not the way it’s meant. It’s probably supposed to mean that the ability to pick out red objects is the specific test for²⁰ what we call understanding the word “red”. Then this specification determines what we mean by this understanding. But then a further question remains: if we were to view translating into German, etc. as a criterion, wouldn’t that also be a criterion for what we call understanding a word? Now there is the case where we say: I don’t know what the word “*rouge*”²¹ means, I only know that it means the same thing as the German “*rot*”. That’s the way it is when I’ve seen the two words on the same line in a dictionary, and this is the verification of the proposition and its sense. And if I then say: “I don’t know what the word ‘*rouge*’²² means”, this sentence refers to the possibility of explaining the meaning, and if asked “Well, how do you suppose you could find out what the word means?”, I could give examples of such explanations (which would illuminate the meaning of the word “meaning”). These examples would either be of the kind that explains something by putting a word that is understood – say the English one – in place of the one that isn’t, or of a kind that explains something by pointing, such as in: “*This*²³ colour is called ‘violet’.” In the first case his saying that “*rouge*” corresponds to the English “red” would serve as my criterion for his understanding “*rouge*”. “Granted,” one will say, “but only because you already know what the English ‘red’ means.” – But that goes for the ostensive definition as well. Pointing to the red colour chip is only a sign of understanding if²⁴ we presuppose that he knows²⁵ the meaning of *this* sign, which means more or less the same thing as that he uses the sign in a certain way. – So, to be sure, there *is* the case where someone says “I know that this word means the same thing as that, but I don’t know what the latter means (they mean)”. If you want to understand the first part of the sentence ask yourself: “How could he know that?” – If you want to understand the second part, ask: “How can he find out what the word means?” –

²⁶Which is the criterion for our understanding: using the word correctly, or defining it?²⁷ Picking out a red object from among others when asked to do so, or giving an ostensive explanation of the word “red”?²⁸

We view the performance of both tasks as a sign of understanding. If we hear someone using the word “red” and doubt that he understands it, then, as a test, we can ask him “Which colour are you calling²⁹ ‘red?’”. On the other hand,³⁰ if we had given someone the ostensive explanation³¹ and now wanted to see whether he had understood it³² correctly, we wouldn’t

20 (V): specific proof of

21 (V): “*rot*”

22 (V): “*rot*”

23 (F): MS 112, p. 74r.

24 (V): because

25 (V): understands

26 (M): /

27 (V): understanding: the correct *use* of the word, or defining it?

28 (V₁): or giving an ostensive explanation? // or the ostensive explaining of the word “red”. (V₂): ?

/ Which is the criterion for our understanding: pointing to the red chip when the question is: “Which one of these chips is red?” – or repeating the ostensive definition “*That* is ‘red’”?

29 (V): colour do we call

30 (V): On the other hand:

31 (V): explanation “~~this colour means ‘red’~~”

32 (V): understood ~~this explanation~~

verstanden hat,³⁷ würden wir nicht von ihm verlangen, daß er sie wiederholt, sondern wir gäben ihm etwa die Aufgabe, aus einer Anzahl von Dingen die roten herauszusuchen.³⁸ In jedem Fall ist das, was wir „Verständnis“ nennen, eben durch das³⁹ bestimmt, was wir als Probe des Verständnisses ansehen (durch die Aufgaben bestimmt, die wir zur Prüfung des Verständnisses stellen).⁴⁰

47v ⁴¹Ist denn das „primäre Zeichen“ unmißdeutbar?⁴²

⁴³Kann man sagen es müsse eigentlich nicht mehr *verstanden* werden?

Denken wir auch an den Fall, wenn wir sagen: „Ja, wenn das Wort *das* bedeutet (bedeuten soll), ist der Satz wahr.“

- 48 ⁴⁴Wie ist es, wenn ich eine Bezeichnungweise festsetze; wenn ich z.B. für den eigenen Gebrauch gewissen Farbtönen Namen geben will: Ich⁴⁵ werde das etwa mittels einer Tabelle tun (es kommt immer auf derlei hinaus). Und nun werde ich doch nicht den Namen zur falschen Farbe schreiben (zu der Farbe der ich ihn nicht geben will). Aber warum nicht? Warum soll nicht „rot“ gegenüber dem grünen Täfelchen stehen und „grün“ gegenüber dem roten, etc.? – Ja, aber dann müssen wir doch wenigstens wissen, daß „rot“ nicht das gegenüberliegende Täfelchen meint. – Aber was heißt es „das wissen“, außer, daß wir uns etwa neben der geschriebenen Tabelle noch eine andere vorstellen, in der die Ordnung richtiggestellt ist. – „Ja aber *dieses* Täfelchen ist doch rot, und nicht *dieses!*“ – Gewiß; und das ändert sich ja auch nicht, wie immer ich die Täfelchen und Wörter setze; und es wäre natürlich falsch, auf das grüne Täfelchen zu zeigen und zu sagen „dieses ist rot“. Aber das ist auch keine Definition, sondern eine Aussage. – Gut, dann nimmt aber doch unter allen möglichen Anordnungen die gewöhnliche (in der das rote Täfelchen dem Wort „rot“ gegenübersteht) einen ganz besonderen Platz ein. – ((Da gibt es jedenfalls zwei verschiedene Fälle: Es kann die Tabelle mit grün gegenüber „rot“ etc. so gebraucht werden, wie wir die Tabelle in der gewöhnlichen Anordnung gewöhnlich gebrauchen. Wir würden also etwa den,⁴⁶ der sie gebraucht, von dem Wort „rot“ nicht auf das gegenüberliegende Täfelchen blicken sehen, sondern auf das rote, das schräg darunter steht (aber wir müßten auch diesen Blick nicht sehen) und finden, daß er dann statt des Wortes „rot“ in einem Ausdruck das rote Täfelchen einsetzt. Wir würden dann sagen, die Tabelle sei nur anders angeordnet (nach einem andern räumlichen Schema), aber sie verbinde die Zeichen, wie die gewohnte. – Es könnte aber auch sein, daß der, welcher die Tabelle benützt, von der einen Seite horizontal zur andern blickt und nun in irgend welchen Sätzen das Wort „rot“ durch ein grünes Täfelchen ersetzt; aber nicht etwa auf den Befehl „gib mir das rote Buch“ ein grünes bringt, sondern ganz richtig das rote (d.h. das, welches auch wir „rot“ nennen). Dieser hat nun die Tabelle anders benützt, als der Erste, aber doch so, daß das Wort „rot“ die gleiche Bedeutung für ihn hatte, wie für uns. (Zu einer Tabelle gehört übrigens wesentlich die Tätigkeit des Aufsuchens⁴⁷ in der Tabelle.) Es ist nun⁴⁸ der zweite Fall, der⁴⁹ uns interessiert und die Frage ist: kann ein grünes Täfelchen als *Muster* der roten Farbe dienen? Und da ist es klar, daß dies (in *einem* Sinn) nicht möglich ist. Ich kann mir eine Abmachung denken, wonach

37 (V): hat, ~~so~~

38 (M): ///

39 (V): eben dadurch

40 (V): stellen.))

41 (M): /

42 (V): unmißverständlich?

43 (M): /

44 (M): ? / (R): \forall S. 35/2, 3

45 (V): geben will. Ich

46 (O): ~~dem~~,

47 (V): Nachschauens

48 (V): nun ~~offenbar~~

49 (V): welcher

require him to repeat it, but would, for example, give him the task of picking out the red objects from among several others.³³In each case what we call “understanding” is determined by what we view as the test of understanding (is determined by the tasks that we set in order to test understanding).³⁴

³⁵Is it really impossible to misinterpret the “primary sign”?³⁶

³⁷Can one say that really there’s no further need to *understand* it?

Let’s also think of the case where we say: “Ah, if the word means (is to mean) *that*, then the proposition is true.”

³⁸What’s it like when I set up a system of notation? If for example I want to assign names to certain shades of colour for my own use: I’ll³⁹ do this, say, by using a table (it always boils down to something like that). And now I’m certainly not going to write the name next to the wrong colour (next to the colour I don’t want to assign it to). But why not? Why shouldn’t “red” stand across from the green chip and “green” across from the red one, etc.? – Fine, but then at least we have to know that “red” doesn’t mean the chip across from it. – But what does “know that” mean other than that, for example, aside from the written table, we’re imagining another one in which the pairing is corrected? – “All right, but it’s *this* patch that’s red and not *that one!*” – Certainly; and that doesn’t change, no matter how I place the chips and the words; and of course it would be wrong to point to the green chip and say “This one’s red”. But then again, that isn’t a definition, but a statement. – Fine, but then the usual arrangement (in which the red chip is across from the word “red”) occupies a very special place among all possible ones. – (At any rate, there are two different cases here: the table with green across from “red” etc. can be used in the same way that we usually use the table in the normal arrangement. So, for example, we wouldn’t see the person using it looking from the word “red” to the chip across from it, but rather to the red one situated diagonally below it (although it’s not necessary that we see him looking that way) and we’d find that in that case he inserts the red chip instead of the word “red” in an expression. Then we’d say that the table was merely arranged differently (in accordance with a different spatial schema), but that the signs were connected in the same way as in the usual one. – But it could also be that the user of the table looks horizontally from one side to the other and replaces the word “red” by a green chip in some sentences; but when told, e.g., “Give me the red book” he doesn’t bring a green one, but rather, quite rightly, the red one (i.e. the one we too call “red”). Now this person has used the table differently from the first person but still in such a way that the word “red” has the same meaning for him as for us. (By the way, an essential part of a table is the activity of looking something up⁴⁰ in it.) Now it’s⁴¹ the second case that interests us, and the question is: Can a green chip serve as a *sample* of the colour red? And here it’s clear that (in *one* sense) this isn’t possible. I can imagine an understanding according to which someone to whom I show a green colour chip and say, “Paint me this colour”, paints a shade of red; when I say the same thing and show him blue, he is supposed to paint yellow, etc. – each time the complementary colour; and therefore I

33 (M): ///

34 (V): understanding.))

35 (M): /

36 (V): Is the ‘primary sign’ really unambiguous?

37 (M): /

38 (M): ? / (R): ∇ p. 35/2, 3

39 (V): own use. I’ll

40 (V): of checking something

41 (V): it’s ~~obviously~~

Einer, dem ich eine grüne Tafel zeige und sage, male mir diese Farbe, mir ein Rot malt; wenn ich dasselbe sage und zeige ihm blau, so hat er gelb zu malen u.s.w., immer die komplementäre Farbe; und daher kann ich mir auch denken, daß Einer meinen Befehl auch ohne eine vorhergehende Abmachung so deutet. Ich kann mir ferner denken, daß die Abmachung gelautet hätte „auf den Befehl ‚male mir diese Farbe‘, male immer eine gelblichere, als ich Dir zeige“; und wieder kann ich mir die Deutung auch ohne Verabredung denken. Aber kann man sagen, daß Einer ein rotes Täfelchen genau kopiert, indem er einen bestimmten Ton von grün (oder ein anderes Rot als das des Täfelchens) malt und zwar so, wie er eine gezeichnete Figur, nach verschiedenen Projektionsmethoden, verschieden und genau kopieren kann? – Ist also hier der Vergleich zwischen Farben und Gestalten richtig, und kann ein grünes Täfelchen einerseits als der Name einer bestimmten Schattierung von rot stehen und andererseits als ein Muster dieses Tones? wie ein Kreis als der Name einer bestimmten Ellipse verwendet werden kann, aber auch als ihr Muster. – Kann man also dort wie hier von verschiedenen Projektionsmethoden sprechen, oder gibt es für das Kopieren einer Farbe nur *eine* solche: das Malen der gleichen Farbe? Wir meinen diese Frage so, daß sie nicht dadurch verneint wird, daß uns die Möglichkeit gezeigt wird, mittels eines bestimmten Farbenkreises und der Festsetzung eines Winkels von einem Farbton auf irgend einen andern überzugehen. Das, glaube ich, zeigt nun, in wiefern das rote Täfelchen gegenüber dem Wort „rot“ in einem andern Fall ist, als das grüne. Übrigens bezieht sich, was wir hier für die Farben gesagt haben, auch auf die Formen von Figuren, wenn das Kopieren ein Kopieren nach dem Augenmaß und nicht eines mittels Meßinstrumenten ist. – Denken wir uns nun aber doch einen Menschen, der vorgäbe „er könne die Schattierungen von Rot in Grün kopieren“ und auch wirklich beim Anblick des roten Täfelchens mit allen (äußeren) Zeichen des genauen Kopierens einen grünen Ton mischte und so fort bei allen ihm gezeigten roten Tönen. Dem⁵⁰ gegenüber wären wir in der gleichen Lage, wie einem, der⁵¹ auf die gleiche Weise (⁵²durch genaues Hinhorchen) Farben nach Violintönen mischte. Wir würden in *dem* Fall sagen: „Ich weiß nicht, *wie* er es macht“; aber nicht in dem Sinne, als verstünden wir nicht die verborgenen Vorgänge in seinem Gehirn oder seinen Muskeln, sondern, wir verstehen nicht, was es heißt „dieser Farbton sei eine Kopie dieses Violintones“. Es sei denn, daß damit nur gemeint ist, daß ein bestimmter Mensch erfahrungsgemäß einen bestimmten Farbton mit einem bestimmten Klang assoziiert (ihn zu sehen behauptet, malt, etc.).⁵³ Andererseits wäre ich vielleicht befriedigt, wenn man mir sagte, der Mann kopiere insofern, als er einen tiefen Violin Ton⁵⁴ dunkler male & die sieben Töne der Oktave in den „sieben Farben des Regenbogens“. Der Unterschied zwischen dieser Assoziation und dem Kopieren, auch wenn ich selbst beide Verfahren kenne, zeigt sich darin,⁵⁵ daß es für die assoziierte Gestalt keinen Sinn hat, von Projektionsmethoden zu reden, und daß ich von dem assoziierten Farbton sagen kann „jetzt fällt mir bei dieser Farbe (oder diesem Klang) diese Farbe ein, vor 5 Minuten war es eine andere“. Etc. Wir könnten auch niemandem sagen „Du hast nicht richtig assoziiert“, wohl aber „Du hast nicht richtig kopiert“. Und die Kopie einer Farbe – wie ich das Wort gebrauche – ist nur *eine*; und es hat keinen Sinn, (hier) von verschiedenen Projektionsmethoden zu reden.)⁵⁶

⁵⁷Es ist die Frage: Wenn sich die Regel, das Muster stehe für die Komplementärfarbe, ihrem Wesen nach nur auf die Farben (oder Wörter) blau, rot, grün, gelb bezieht, ist sie

50 (V): Diesem

51 (V): ~~Der wäre für uns auf derselben Stufe, wie~~
Einer, der

52 (V): Weise (~~auch~~)

53 (M): ∫ – Regenbogens“.

54 (V): einen ~~dunkleren~~ Ton

55 (V): kenne, besteht darin,

56 (M): *Falsch*, aber kein uninteressantes Denken.

57 (M): ∫ Besser auslassen! (R): [Zu: Begriff der Mischfarbe] S. 473 § 100]

can also imagine that someone might interpret my order in this way, even without a prior understanding. Furthermore, I can imagine that there might have been the understanding “When you are ordered ‘Paint this colour for me’, always paint one that is yellower than the one I show you”; and again I can imagine such an interpretation even without the understanding. But can we say that someone is copying a red chip exactly by painting a certain shade of green (or a different red from that of the colour chip), and that he is doing that just as, following different methods of projection, he might copy a drawn figure differently but exactly? – So is the comparison between colours and shapes correct here, and can a green colour chip stand for the name of a certain shade of red on the one hand, and on the other as a sample of this shade? Just as a circle can be used as the name of a particular ellipse, but also as its sample? – Can one therefore speak of different methods of projection in both cases, or is there only *one* such method for copying a colour: painting the same colour? This question is phrased in such a way that the answer needn’t be negative if we are shown how we might move from one shade of colour to another by using a particular colour circle and stipulating what angle is to be used. Now this shows, I believe, the way in which the red chip lying across from the word “red” is different from the green one lying there. By the way, what we have said here about colours also applies to the shapes of figures, if copying them is done by eye and not with measuring instruments. – But now, in spite of all this, let’s imagine someone who claims that “he can copy shades of red in green”, and who when he sees the red chip mixes in a shade of green, continuing to do this with every shade of red he’s shown, all the while showing all the (outward) signs of copying exactly. We’d be in the same position with him as with someone who⁴² in the same way (by⁴³ listening carefully) were to mix colours together in accordance with notes played on a violin. In *this* case we’d say: “I don’t know *how* he does it”; but not in the sense that we don’t understand the hidden processes in his brain or muscles. Rather, we don’t understand what it means to say that “This shade of colour is a copy of this note on the violin”. Unless all that is meant is that a certain person as a matter of experience associates a particular shade of colour with a particular sound (claims to see it, paints it, etc.).⁴⁴ On the other hand I might be satisfied if I were told that the man was copying in so far as he was painting a low⁴⁵ note on the violin darker, and was painting the seven notes of an octave in the “seven colours of the rainbow”. The difference between this association and copying, even if I myself am acquainted with both processes, is shown⁴⁶ in the fact that it makes no sense to talk about methods of projection for the associated shape, and that I can say of an associated shade of colour “Now this colour occurs to me upon seeing this colour (or hearing this sound), but five minutes ago it was a different one”. Etc. Neither could we tell someone “You didn’t associate correctly”, but we could very well tell him “You didn’t copy correctly”. And – as I am using the word – there’s only *one* copy of a colour; and (here) it makes no sense to talk about different methods of projection.)⁴⁷

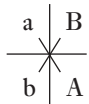
⁴⁸The question is: If the rule that the sample stands for the complementary colour refers essentially only to the colours (or words) blue, red, green, yellow, then isn’t it identical to

42 (V): ~~For us this person would be on the same level as someone~~ who
 43 (V): ~~also~~ by
 44 (M): ~~↓~~ – rainbow”.
 45 (V): ~~darker~~

46 (V): processes, consists
 47 (M): *False*, but not uninteresting thinking.
 48 (M): ~~↓~~ Better leave it out! (R): [To: concept of mixed colour} p. 473 §100]

dann nicht identisch mit der, welche das grüne Zeichen als Wort für „rot“, und umgekehrt, etc. festsetzt? Denn eine Allgemeinheit,⁵⁸ die ihrem logischen Wesen nach einem logischen Produkt äquivalent ist, ist nichts anderes, als dieses logische Produkt. (Denn man kann nicht sagen: hier ist das grüne Zeichen; nun hole mir ein Ding von der komplementären Farbe, *welche immer das sein mag*. D.h., „die komplementäre Farbe von rot“ ist keine Beschreibung von grün; wie „das Produkt von 2 und 2“ keine Beschreibung von 4.) Die Bestimmung, die

52 Komplementärfarbe⁵⁹ als Bedeutung des Täfelchens zu nehmen, ist dann wie ein Querstrich



in einer Tabelle⁶⁰; ein Querstrich in der Grammatik der Farben gezogen. Es ist

klar, daß ich mit Hilfe einer solchen Regel eine Tabelle konstruieren⁶¹ kann, ohne noch aus der Grammatik herauszutreten, also vor⁶² jeder Anwendung der Sprache. Anders wäre es, wenn die Regel (R) hieße: das Täfelchen bedeutet immer

einen etwas dunkleren Farbton, als der seine⁶³ ist. Man muß nur wieder auf den verschiedenen Sinn der Farb- und der Gestaltprojektion achten (und bei der letzteren wieder auf den Unterschied der Abbildung nach visuellen Kriterien und⁶⁴ der Übertragung mit Meßinstrumenten). Das Kopieren nach der Regel R ist „kopieren“ in einem andern Sinne als dem, in welchem das Hervorbringen des gleichen Farbtons so genannt wird. Es handelt sich also nicht um zwei Projektionsmethoden, vergleichbar etwa der Parallel- und der Zentralprojektion, durch die ich eine geometrische Figur mit Zirkel und Lineal in eine andere projizieren kann. (Die Metrik der Farbtöne.)

Wenn ich das berücksichtige, so kann ich also in dem veränderten Sinn des Wortes „Muster“ (der dem veränderten Sinn des Worts „kopieren“ entspricht) das⁶⁵ hellere Täfelchen zum Muster des dunkleren Gegenstandes nehmen.

⁶⁶„Könnten wir nicht zur hinweisenden Erklärung von ‚rot‘ ebensoviel auf ein grünes, wie auf ein rotes Täfelchen zeigen? denn, wenn diese Definition nur ein Zeichen statt des andern setzt, so sollte dies doch keinen Unterschied machen.“⁶⁷ – Wenn die Erklärung nur ein Wort für ein andres setzt, so macht es auch keinen.⁶⁸ Bringt aber die Erklärung das Wort mit einem Muster in Zusammenhang, so ist es nun nicht unwesentlich, mit welchem Täfelchen das Zeichen verbunden wird (denke auch wieder daran, daß eine Farbe der andern nicht

53 im gleichen Sinn zum Muster dienen kann, wie ihr selbst). „Aber dann gibt es also willkürliche Zeichen und solche, die nicht willkürlich sind!“ – Aber denken wir nur an die Verständigung durch Landkarten, Zeichnungen, und Sätze andererseits: die Sätze sind so wenig willkürlich, wie die Zeichnungen. Aber die Worte sind willkürlich. (Vergleiche die Abbildung $| = 0, - = X$ ⁶⁹.) Wird denn aber ein Wort eigentlich als Wort gebraucht, wenn ich es nur in Verbindung mit einer Tabelle gebrauche, die den Übergang zu Mustern macht? Ist es also nicht falsch, zu sagen, ein Satz sei ein Bild, wenn ich doch nur ein Bild nach ihm und der Tabelle zusammenstelle? Aber so ist also doch der Satz und die Tabelle

58 (V): Regel,

59 (O): Komplementärfarbe ~~zu nehmen~~,

60 (F): MS 112, S. 83r.

61 (V): herstellen

62 (O): also ~~von~~

63 (V): als sein eigener

64 (V): von

65 (O): entspricht), das

66 (M): Als Erwägung nicht uninteressant. ? /

67 (V): doch aufs gleiche hinauslaufen.“

68 (V): setzt, ist es auch gleichgültig.

69 (E): In einer früheren Version dieser Bemerkung (in MS 112, S. 83v) erscheint die folgende Chiffre: $| = 0, - = X, | - | | -$.

the one that establishes the green sign as a word for “red” and vice versa, etc.? For a generality⁴⁹ that, by virtue of its logic, is equivalent to a logical product, is nothing other than the logical product. (For you can’t say: Here is the green sign – now get me an object of the complementary colour, *whatever that may be*. That is, “the complementary colour of red” isn’t a description of green; just as “the product of 2 and 2” isn’t a description of 4.)

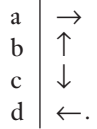
Then the stipulation that we take the complementary colour as the meaning of the colour chip is like a transverse line in a table,⁵⁰ a transverse line drawn in the grammar of colours. It’s clear that with the help of such a rule I can construct⁵¹ a table while still remaining within grammar, i.e. before any application of language. It would be different if the rule (R) were: the colour chip always means a somewhat darker shade of colour than the one it has.⁵² Again, one just has to pay attention to the different senses of colour and spatial projection (and, in the case of the latter, to the difference between a depiction that follows visual criteria and⁵³ a duplication with measuring instruments). Copying following rule R is “copying” in a different sense from that in which producing the same shade of colour is called copying. So it isn’t a case of two methods of projection, comparable, say, to parallel and centre projection, in which I can project one geometric figure onto another using a compass and a ruler. (The metrics of the shades of colour.)

If I take this into account, then, in the new sense of “sample” (which corresponds to the new sense of the word “copying”), I can take the lighter colour chip as a sample of the darker object.

⁵⁴“In giving an ostensive explanation of ‘red’ couldn’t we just as well point to a green colour chip as to a red one? For if this definition merely puts one sign in place of another, then it shouldn’t make any difference.”⁵⁵ – If the explanation only puts one word in place of another, then it really doesn’t.⁵⁶ But if the explanation connects a word to a sample, then it isn’t irrelevant to which chip the sign is connected (remember again that one colour cannot serve as a sample of another in the same sense that it can for itself). “But some signs are arbitrary, and some aren’t!” – But let’s think about communicating with maps and drawings, on the one hand, and sentences, on the other: sentences are no less arbitrary than drawings. But the words are arbitrary. (Cf. the diagram $| = 0, - = X$ ⁵⁷.) But then is a word really used as a word if I use it only together with a table that makes the transition to samples? So isn’t it wrong to say that a proposition is a picture, if all I do is follow it and the table to create a picture? But then the proposition and the table together

49 (V): rule
 50 (F): MS 112, p. 83r.
 51 (V): produce
 52 (V): than its own.
 53 (V): from
 54 (M): Not uninteresting as a consideration. ? /
 55 (V): then this should amount to the same thing.”
 56 (V): then it’s really irrelevant.
 57 (E): An earlier version of this remark (in MS 112, p. 83v) has the following code: $| = 0, - = X, | - | | -$.

zusammen ein Bild. Also zwar nicht adbcba allein, aber dieses Zeichen zusammen mit
 Aber es ist offenbar, daß auch adbcba ein Bild von $\rightarrow \leftarrow \uparrow \downarrow \uparrow^{70}$ genannt werden kann. Ja aber, ist nicht doch das Zeichen adbcba ein willkürlicheres Bild von $\rightarrow \leftarrow \uparrow \downarrow \uparrow$ als dieses Zeichen von der Ausführung der Bewegung? Etwas ist auch an dieser Übertragung willkürlich (die Projektionsmethode) und wie sollte ich bestimmen, was willkürlicher ist.



Ich vergleiche also die Festsetzung der Wortbedeutung durch die hinweisende Definition, der Festsetzung einer Projektionsmethode zur Abbildung räumlicher Gebilde. Dies ist aber freilich⁷¹ nicht mehr, als⁷² ein Vergleich. Ein ganz guter Vergleich, aber er enthebt uns nicht der Untersuchung des Funktionierens der Worte, getrennt von dem Fall der räumlichen Projektion. Wir können allerdings sagen – d.h. es entspricht ganz dem Sprachgebrauch –, daß wir uns durch Zeichen verständigen, ob wir Wörter oder Muster gebrauchen; aber das Muster ist kein Wort, und das Spiel, sich nach Worten zu richten, ein anderes als das, sich nach Mustern (zu) richten. (Wörter sind der Sprache nicht wesentlich.) Kann man aber vielleicht sagen, daß Muster ihr wesentlich wären? (Muster sind dem Gebrauch⁷³ von Mustern wesentlich, Worte, dem Gebrauch⁷⁴ von Worten.)

54

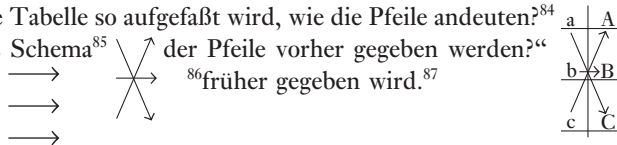
⁷⁵Vergiß hier auch nicht, daß die Wortsprache nur *eine* unter vielen möglichen Sprachen ist und es Übergänge von ihr in die andern gibt. Untersuche die Landkarte auf das⁷⁶ hin, was in ihr dem Ausdruck der Wortsprache entspricht.

⁷⁷„Primär“ müßte eigentlich heißen: unmißverständlich.

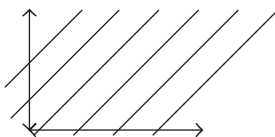
⁷⁸Es klingt wie eine lächerliche Selbstverständlichkeit, wenn ich sage, daß der, welcher glaubt die Gebärden⁷⁹ seien die primären Zeichen, die allen andern zu Grunde liegen, außer Stande wäre, den gewöhnlichsten Satz durch Gebärden zu ersetzen.

⁸⁰Regeln der Grammatik, die eine „Verbindung zwischen Sprache und Wirklichkeit“ herstellen, und solche, die es nicht tun. Von der ersten Art etwa: „diese Farbe nenne ich ‚rot‘“, – von der zweiten: „ $\sim \sim p = p$ “. Aber über diesen Unterschied besteht ein Irrtum: der Unterschied scheint prinzipieller Art zu sein; und die Sprache⁸¹ etwas, dem eine Struktur gegeben, und das⁸² dann der Wirklichkeit aufgepaßt wird.

⁸³„Ich will nicht verlangen, daß in der erklärenden Tabelle das rote Täfelchen horizontal gegenüber dem Wort ‚rot‘ stehen soll, aber irgend ein Gesetz des Lesens der Tabelle muß es doch geben. Denn sonst verliert ja die Tabelle ihren Sinn.“ Ist es aber gesetzlos, wenn die Tabelle so aufgefaßt wird, wie die Pfeile andeuten?⁸⁴ „Aber muß dann nicht eben das Schema⁸⁵ der Pfeile vorher gegeben werden?“
 Nur, sofern auch das Schema $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$ ⁸⁶früher gegeben wird.⁸⁷



70 (V):



71 (V): ~~allerdings~~

72 (V): wie

73 (V): sind der Benützung

74 (V): Worte, der Benützung

75 (M): ∫

76 (V): Landkarte darauf

77 (M): /

78 (M): / ✓

79 (V): Gesten

80 (M): ∫ ✓

81 (V): Sprache ~~wesentlich~~

82 (V): ~~was~~

83 (M): ∫ (

84 (F): MS 112, S. 100r.

85 (F): MS 112, S. 100r.

86 (F): MS 112, S. 100r.

87 (M):)

are a picture, after all. So, not adcb alone, to be sure, but this sign together with a $\left| \begin{array}{l} \rightarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \right.$

But it’s obvious that adcb too can be called a picture of $\rightarrow \leftarrow \uparrow \downarrow \uparrow$ ⁵⁸. Yes, but isn’t the sign adcb a more arbitrary depiction of $\rightarrow \leftarrow \uparrow \downarrow \uparrow$ than this sign is for carrying out the moves? There is something arbitrary about this translation too (the method of projection), and how should I determine which is more arbitrary?

So I am comparing establishing a meaning for a word via ostensive definition to establishing a method of projection for the depiction of three-dimensional objects. But⁵⁹ to be sure, this is nothing more than a comparison. A pretty good comparison, but it doesn’t spare us from having to investigate how words function, leaving aside the case of spatial projection. To be sure we can say – i.e. it accords completely with how we use language – that we communicate through signs, whether we use words or samples; but samples aren’t words and the game of acting in accordance with words is different from that of acting in accordance with samples. (Words aren’t essential to language.) But can one perhaps say that samples are essential to it? (Samples are essential to the use of samples, words to the use of words.)⁶⁰

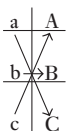
⁶¹Likewise, don’t forget here that word-language is only *one* among many possible languages and that there are bridges from it to the others. Look at a map to see what in it corresponds to an expression in word-language.


⁶²“Primary” really should be: “unambiguous”.

⁶³It sounds like a ridiculous truism if I say that anyone who believed that gestures are the primary signs that underlie all others would be incapable of replacing the most ordinary sentence with gestures.

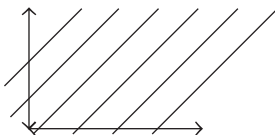
⁶⁴Rules of grammar that establish a “connection between language and reality”, and those that don’t. “I call this colour ‘red’ ” is an example of the first kind, for instance. – “ $\sim \sim p = p$ ” is of the second. But there’s a misconception about this difference: the difference seems to be one of principle; and language⁶⁵ seems to be something that is given a structure and then superimposed on reality.

⁶⁶“I don’t want to demand that in the explanatory table the red chip has to be right next to the word ‘red’, but there does have to be some sort of rule for reading the table. Otherwise the table loses its sense.” But is there no rule if the table is understood as the arrows indicate?

⁶⁷“But in that case, mustn’t the schema  for the arrows⁶⁸ already have been given?”

Only in so far as the schema \rightarrow  ⁶⁹ has already been given.⁷⁰

58 (V):



59 (V): But ~~of course~~

60 (V): essential to the utilization of samples, words to the utilization of words.)

61 (M): \int

62 (M): /

63 (M): / ✓

64 (M): \int ✓

65 (V): language ~~essentially~~

66 (M): \int (

67 (F): MS 112, p. 100r.

68 (F): MS 112, p. 100r.

69 (F): MS 112, p. 100r.

70 (M):)

55 ⁸⁸»Wird⁸⁹ aber dann nicht wenigstens eine gewisse Regelmäßigkeit im Gebrauch gefordert?! Würde es angehen, wenn wir einmal eine Tabelle nach diesem, einmal nach jenem Schema zu gebrauchen hätten? *Wie soll man denn wissen*, wie man diese Tabelle zu gebrauchen hat?« – Ja, wie weiß man es denn *heute*? Die Zeichenerklärungen haben doch irgendwo⁹⁰ ein Ende.

⁹¹Nun gebe ich aber natürlich zu, daß ich, ohne vorhergehende Abmachung einer Chiffre, ein Mißverständnis hervorrufen würde, wenn ich, auf den Punkt A zeigend, sagte, dieser Punkt heißt „B“. Wie ich ja auch, wenn ich jemandem den Weg weisen will, mit dem Finger in der Richtung weise, in der er gehen soll, und nicht in der entgegengesetzten. Aber auch diese Art des Zeigens könnte richtig verstanden werden, und zwar ohne daß dieses Verständnis das gegebene Zeichen durch ein weiteres ergänzte. Es liegt in der menschlichen Natur, das Zeigen mit dem Finger *so* zu verstehen. Und so ist die menschliche Gebärdensprache primär in einem psychologischen Sinne.

⁹²Ist das Zeigen mit dem Finger unserer Sprache wesentlich? Es ist gewiß ein merkwürdiger Zug unserer Sprache, daß wir Wörter hinweisend erklären: das ist ein Baum, das ist ein Pferd, das ist grün, etc. (Überall bei den Menschen⁹³ finden sich Brettspiele, die mit kleinen Klötzchen auf Feldern gespielt werden. Überall auf der Erde findet sich eine Zeichensprache,⁹⁴ die aus geschriebenen Zeichen auf einer Fläche besteht.)

⁹⁵Ich bestimme die Bedeutung eines Worts, indem ich es als Name eines Gegenstandes erkläre, und auch, indem ich es als gleichbedeutend mit einem andern Wort erkläre. Aber habe ich denn nicht gesagt, man könne ein Zeichen nur durch ein anderes Zeichen erklären?
56 Und das ist gewiß so, sofern ja die hinweisende Erklärung „daß[^] ist N“⁹⁶ ein Zeichen ist. Aber ferner bildet hier auch der Träger von „N“, auf den gezeigt wird, einen Teil des Zeichens. Denn: (dieser[^] hat es getan) = ⁹⁷(N hat es getan). Dann heißt aber „N“ der Name von diesem Menschen, nicht vom Zeichen⁹⁸ „dieser[^]“, von dem ein Teil auch dieser Mensch ist. Und zwar spielt der Träger in dem Zeichen eine ganz besondere Rolle, verschieden von der eines andern Teiles eines Zeichens. (Eine Rolle, nicht ganz ungleich der des Musters.)

⁹⁹Die hinweisende Erklärung eines Namens ist nicht nur äußerlich verschieden von einer Definition wie „1 + 1 = 2“, indem etwa das eine Zeichen in¹⁰⁰ einer Geste meiner Hand, statt in einem Laut- oder Schriftzeichen besteht, sondern sie unterscheidet sich von dieser logisch; wie die Definition, die das Wort dem Muster beigesellt, von der eines Wortes durch ein Wort. Es wird von ihr in anderer Weise Gebrauch gemacht.

Wenn ich also einen Namen hinweisend definiere und einen zweiten durch den ersten,¹⁰¹ so ist dieser zu jenem in anderer Beziehung,¹⁰² als zum Zeichen, das in der hinweisenden Definition gegeben würde. D.h., dieses letztere ist seinem Gebrauch nach wesentlich von dem Namen verschieden und daher sind die¹⁰³ Verbaldefinition und die hinweisende Definition, „Definitionen“ im verschiedenen Sinne des Worts.

88 (M): ? /

89 (V): »Wird ~~da~~

90 (V): doch irgend einmal

91 (M): ü ? /

92 (M): ? /

93 (V): (Überall auf der Erde

94 (V): Schrift,

95 (M): ///

96 (F): MS 112, S. 108v.

97 (F): MS 112, S. 108v.

98 (F): MS 112, S. 108v.

99 (M): J

100 (V): ~~aus~~

101 (V): durch ihn,

102 (V): so steht dieser zu jenem in anderem Verhältnis,

103 (O): daher die

⁷¹)But isn't⁷² at least a certain regularity of use called for?! Would it do if we had to use a table now in accordance with this, now in accordance with that, schema? *How is one to know* how to use this table?« – Well, how does one know this *today*? Explanations of signs, after all, come to an end somewhere.⁷³

⁷⁴Now of course I admit that, without prior agreement on a code I would cause a misunderstanding if, pointing to point A, I said “This is called ‘B’ ”. Just as, if I want to show a person the way I point my finger in the direction he is to follow, and not in the opposite one. But this kind of pointing could also be understood correctly without such an understanding, which supplements the given sign with an additional one. It's in human nature to understand pointing a finger *in this way*. And thus the human language of gestures is in a psychological sense primary.

⁷⁵Is pointing a finger essential to our language? It certainly is a noteworthy trait of our language that we explain words ostensively: that's a tree, that's a horse, that's green, etc. (Everywhere there are humans⁷⁶ you can find board games played with little blocks on squares. Everywhere on earth you can find a language of signs⁷⁷, consisting of written signs on a surface.)

⁷⁸I specify the meaning of a word by declaring it to be the name of an object, and also by declaring it to have the same meaning as another word. But didn't I say that you can only explain a sign with another sign? And that's certainly the case, in so far as the ostensive explanation “That ↗ is N”⁷⁹ is indeed a sign. But what's more, in this case the bearer of “N” that is being pointed to constitutes a part of the sign as well. For: (This ↗ did it) = ⁸⁰(N did it). But then “N” is the name of this person, and not of the sign “This ↗”,⁸¹ a part of which is also this person. In fact the bearer plays a very special role in the sign, a role different from that of any other part of a sign. (A role not entirely dissimilar from that of a sample.)

⁸²The ostensive explanation of a name is not only outwardly different from a definition such as “1 + 1 = 2” (since the one sign consists of a gesture with my hand, the other of an oral or written sign), but it differs *logically* from the latter, just as a definition that assigns a word to a sample differs from one that defines a word with a word. The former is used in a different way.

So if I define one name ostensively, and a second by using the first⁸³, then the latter is in a different relationship to the former than to the sign that's given in the ostensive definition. That is, the use of this latter sign is essentially different from the name, and therefore verbal and ostensive definitions are “definitions” in different senses of the word.

71 (M): ? /

72 (V): isn't ~~there~~

73 (V): end some time.

74 (M): r ? /

75 (M): ? /

76 (V): (Everywhere in the world

77 (V): find a script

78 (M): ///

79 (F): MS 112, p. 108v.

80 (F): MS 112, p. 108v.

81 (F): MS 112, p. 108v.

82 (M): ∫

83 (V): a second via it

¹⁰⁴Ich kann von primären und sekundären Zeichen sprechen – in *einem* bestimmten Spiel, einer bestimmten Sprache. – Im Musterkatalog *kann* ich die Muster die primären Zeichen und die Nummern die sekundären nennen. Was soll man aber in einem Fall, wie dem der gesprochenen und geschriebenen Buchstaben sagen? Welches sind hier die primären, welches die sekundären Zeichen?

57 ¹⁰⁵Der Begriff vom sekundären Zeichen ist doch dieser: Sekundär ist ein Zeichen dann, wenn, um mich nach ihm zu richten, ich eine Tabelle brauche, die es mit einem andern (primären) Zeichen verbindet, über welches ich mich erst nach dem sekundären richten kann.

56v ¹⁰⁶„Primär, das Zeichen, welches allein genügt hätte, wenn es nicht zu unbequem wäre es immer mitzuführen.“

57 Die Tabelle garantiert mir die Gleichheit aller Übergänge nicht, denn sie zwingt mich ja nicht, sie immer gleich zu gebrauchen. Sie ist da wie ein Feld, durch das Wege führen, aber ich kann ja auch querfeldein gehen.

Ich mache den Übergang in der Tabelle bei jeder Anwendung von Neuem. Er ist nicht, quasi, ein für allemal in der Tabelle gemacht. (Die Tabelle *verleitet* mich höchstens, ihn zu machen.)

56v Wie ist es aber, wo keine Tabelle gebraucht wird wie z.B. im Fall¹⁰⁷ der gesprochenen & geschriebenen Buchstaben?

Lautes¹⁰⁸ Lesen & anderseits Abschreiben eines geschriebenen Satzes.

57 ¹⁰⁹Welcher Art ist denn meine Aussage über die Tabelle: „daß sie mich nicht zwingt, sie so und so zu gebrauchen“? Und: „daß die Anwendung durch die Regel (oder die Tabelle) nicht anticipiert wird“? Wohl von derselben Art wie die Bemerkung, daß die Zeichenerklärungen doch einmal¹¹⁰ ein Ende haben. Und das ist ähnlich, wie wenn man sagt: „Was nützt Dir die Annahme eines Schöpfers, sie schiebt doch das Problem nur hinaus“. Diese Bemerkung hebt einen Aspekt meiner Erklärung hervor, den ich vielleicht früher nicht gesehen hatte. Man könnte auch sagen: „Sieh Deine Erklärung¹¹¹ doch so an! – bist Du jetzt noch immer von ihr befriedigt?“

104 (M): ? /

105 (M): J

106 (M): ? / – mitzuführen.“

107 (V): wie im Fall

108 (V): ~~Vor~~ Lautes

109 (M): /

110 (V): die Zeichenerklärungen einmal

111 (V): Theorie

⁸⁴I can speak of primary and secondary signs – in *one* particular game, in a particular language. – In a catalogue of samples I *can* call the samples the primary signs and the numbers the secondary ones. But what should one say in a case such as that of spoken and written letters? Which are the primary signs there, which the secondary?

⁸⁵Surely this is the concept of a secondary sign: A sign is secondary when, in order to follow it, I need a table that connects it to another (primary) sign, and *only* after using this am I able to follow the secondary sign.

⁸⁶“A sign is primary that would have been sufficient by itself, if it weren’t too inconvenient always to carry it along.”

The table gives me no guarantee that all of its links are the same, for it doesn’t force me always to use it the same way. It’s there like a field criss-crossed by paths, but I can also walk cross-country.

With each application I make a new link in the table. The link is not, as it were, made once and for all in the table. (The most we can say is that the table *seduces* me into making the link.)

But how about where no table is used, as, for example, in the case⁸⁷ of spoken and written letters?

Reading aloud and, on the other hand, copying a written sentence.

⁸⁸What sort of statement is mine about the table: “it doesn’t force me to use it in such and such a way”? And: “the application isn’t anticipated by the rule (or the table)”? Very likely of the same sort as the remark that explanations of signs do at⁸⁹ some point come to an end. And that is similar to someone’s saying: “What good does the assumption of a Creator do you, since it just postpones the problem?” This remark emphasizes an aspect of my explanation that perhaps I hadn’t seen before. One could also say: “Look at your explanation⁹⁰ *this way!* – are you still satisfied with it?”

84 (M): ? /

85 (M): J

86 (M): ? / – along.”

87 (V): example, as in the case

88 (M): /

89 (V): signs at

90 (V): theory

14

58 Das, was die Philosophie¹ am Zeichen interessiert, die² Bedeutung, die für sie³ maßgebend ist, ist das, was in der Grammatik des Zeichens niedergelegt ist.

57v ⁴Wir fragen: Wie gebrauchst Du das Wort, was machst Du damit, – das wird mich lehren, wie Du es verstehst.⁵

58, 57v ⁶Die Grammatik, – könnte man sagen⁷ – das sind die Geschäftsbücher⁸ der Sprache; aus denen alles über unsere⁹ Transaktionen zu ersehen sein muß¹⁰, was nicht Gefühle betrifft, sondern Tatsachen.¹¹

57v Man könnte in gewissem Sinne sagen, daß es uns auf Nuancen nicht ankommt.

58 ¹²Ich will also eigentlich sagen: es gibt nicht Grammatik und Interpretation der Zeichen. Sondern, soweit von einer Interpretation, also von einer Deutung¹³ der Zeichen, die Rede sein kann, soweit muß sie die Grammatik selbst besorgen.

Denn ich brauchte nur zu fragen: Soll die Interpretation durch Sätze erfolgen? Und in welchem Verhältnis sollen diese Sätze zu der Sprache stehen, die sie schaffen?

Gilt besonders für sogenannte „Deutungen“¹⁴ mathematischer Theoreme.

¹⁵Wenn ich sage, daß ein Satz, der Mengenlehre etwa, in Ordnung ist, aber eine neue Interpretation erhalten muß, so heißt das nur,¹⁶ dieser Teil der Mengenlehre bleibt in sich unangetastet, muß aber in eine andere grammatische Umgebung gerückt werden.

1 (V): was *uns*

2 (V): interessiert; die

3 (V): *uns*

4 (M): ? /

5 (V): Wie gebrauchst . . . verstehst.

6 (M): ? / (R): \forall S. 40/3

7 (V): Grammatik, – möchte ich sagen

8 (V): ~~Die Grammatik ist das Geschäftsbuch~~

9 (V): ~~die~~

10 (V): Sprache: aus denen alles zu ersehen sein muß // woraus alles zu ersehen sein muß

11 (V): was nicht vage *Gefühle* betrifft, sondern wesentliche Fakten.

12 (M): ? /

13 (V): Erklärung

14 (V): Ist besonders wichtig für die Deutungen

15 (M): \int (R): [Zu den Bemerkungen über die Mengenlehre]

16 (V): nur, ~~daß~~

14

What Interests Philosophy About the Sign, the Meaning That is Decisive for it¹, is What is Laid Down in the Grammar of the Sign.

²We ask: How do you use the word, what do you do with it? – that will teach me how you understand it.³

⁴Grammar – one could say⁵ – that’s the ledger⁶ of language, from which everything about our⁷ transactions must be ascertainable⁸ – everything that concerns facts rather than feelings.⁹

In a certain sense one could say that we’re not concerned with nuances.

¹⁰So what I really want to say is: There is no such thing as grammar as well as an interpretation of signs. Rather, in so far as one can talk about an interpretation, i.e. an explication¹¹ of signs, it is grammar itself that has to take care of that.

For I’d need only ask: Is the interpretation to take place using propositions? And in what relationship are these propositions supposed to stand to the language they create?

Is particularly valid for so-called “interpretations”¹² of mathematical theorems.

¹³If I say that a proposition, say in set theory, is in order, but that it has to be given a new interpretation, then all this means is that this part of set theory stays undisturbed internally, but has to be moved to a different grammatical neighbourhood.

1 (V): What Interests *Us* About the Sign, the
Meaning That is Decisive for *Us*

2 (M): ? /

3 (V): How do you . . . understand it.

4 (M): ? / (R): \forall p. 40/3

5 (V): Grammar – I would like to say

6 (V): ~~Grammar is the ledger~~

7 (V): ~~the~~

8 (V): from which everything must be ascertainable

9 (V): everything that concerns essential facts
rather than vague *feelings*.

10 (M): ? /

11 (V): explanation

12 (V): Is particularly valid for interpretations

13 (M): \int (R): [To the remarks on set theory]

Satz. Sinn des Satzes.

Proposition.
Sense of a
Proposition.

„Satz“ und „Sprache“ verschwimmende Begriffe.

¹Was ist ein Satz? Wovon unterscheide ich denn einen Satz? Oder, wovon will ich ihn denn unterscheiden? Von Satzteilen in seinem grammatischen System (wie die Gleichung vom Gleichheitszeichen), oder von *allem*, was wir nicht Satz nennen, also diesem Sessel, meiner Uhr, etc. etc.? Denn, daß es Schrift- oder Lautbilder gibt, die Sätzen besonders ähnlich sind, braucht uns eigentlich nicht zu kümmern.

²Oder wir müssen sagen: Vom Satz kann nur in der Erklärung eines grammatischen Systems die Rede sein.³

⁴Es geht mit dem Wort „Satz“ wie mit dem Wort „Gegenstand“ und andern: Nur auf eine beschränkte Sphäre angewandt sind sie zulässig und dort sind sie natürlich. Soll die Sphäre ausgedehnt werden, damit der Begriff ein philosophischer wird, so verflüchtigt sich die Bedeutung der Worte und es sind leere Schatten. Wir müssen sie dort aufgeben und wieder in den Grenzen benützen.

61 ⁵Nun möchte man aber sagen: „Satz ist alles, womit ich etwas meine“. Und gefragt „was heißt das, ‚etwas‘ meinen“, würde⁶ ich Beispiele anführen. Nun haben diese Beispiele zwar ihren Bereich, auf den sie ausgedehnt werden können, aber *weiter* führen sie mich doch nicht. Wie ich ja in der Logik nicht ins Blaue verallgemeinern kann. Hier handelt es sich aber nicht um Typen, sondern darum, daß die Verallgemeinerung selbst etwas bestimmtes ist; nämlich ein Zeichen mit vorausbestimmten grammatischen Regeln. D.h., daß die Unbestimmtheit der Allgemeinheit keine logische Unbestimmtheit ist. So als hätten wir nun nicht nur Freiheit im logischen Raum, sondern auch Freiheit, diesen Raum zu erweitern, oder zu verändern.

Also nicht nur Bewegungsfreiheit, sondern eine Unbestimmtheit der Geometrie.

⁷Über sich selbst führt uns kein Zeichen hinaus; und auch kein Argument.

⁸(Wenn wir sagen, Satz ist jedes Zeichen, womit wir etwas meinen, so könnte man fragen: was meinen wir und *wann* meinen wir es? Während wir das Zeichen geben? u.s.w., u.s.w.)

⁹Wenn ich frage „was ist die allgemeine Form des Satzes“, so kann die Gegenfrage lauten: „haben wir denn einen allgemeinen Begriff vom Satz, den wir nur¹⁰ exakt fassen wollen?“ – So wie: Haben wir einen allgemeinen Begriff von der Wirklichkeit?

1 (M): ? /

2 (M): ∫

3 (V): Vom Satzbegriff kann nur in einem // innerhalb eines // grammatischen System // s // gesprochen werden.

4 (M): ? /

5 (M): ∫ ✓

6 (V): müßte

7 (M): ≠ ∫ ✓

8 (M): ? /

9 (M): ? / ✓

10 (V): nun

15

“Sentence” and “Language” Blurred Concepts.

¹What is a sentence? From what do I distinguish a sentence? Or from what do I want to distinguish it? From parts of sentences in its system of grammar (like the equation from the equals sign), – or from *everything* we don't call a sentence, i.e. from this chair, my watch, etc., etc.? For that there are written images or sound patterns that are especially similar to sentences really need not concern us.

²Or do we have to say: Only in explaining a system of grammar can we speak of sentences.³

⁴The same thing goes for the word “sentence” as for the word “object”, and others: They're only permitted when applied to a limited sphere, and there they're natural. If the sphere is to be expanded so that the concept can become philosophical, then the meaning of the words evaporates and they are empty shadows. We have to abandon them there and use them back within their boundaries.

⁵But now we'd like to say: “A proposition is everything with which I mean something”. And if asked “What does to mean ‘something’ mean?”, I'd give⁶ examples. Now these examples, to be sure, do have a realm of their own into which they can be expanded; but they don't take me any *further*. Just as in logic I can't generalize into the blue. And here it isn't a matter of types, but of the fact that generalization itself is something specific, i.e. a sign with predetermined grammatical rules. That means that the indeterminacy of generality is not a logical indeterminacy. As if now we had freedom not only within logical space, but also the freedom to expand or to change this space.

So not only freedom of movement, but an indeterminacy of geometry.

⁷No sign leads us beyond itself; nor does any argument.

⁸(If we say that a proposition is any sign with which we mean something, then one could ask: What do we mean and *when* do we mean it? While we're using the sign? Etc., etc.)

⁹If I ask “What is the general form of a proposition?”, then the counter-question can be: “Do we really *have* a general concept of a proposition, which we just¹⁰ want to formulate exactly?” – Just like: Do we have a general concept of reality?

1 (M): ? /
2 (M): ∫
3 (V): Only in // within // a grammatical system
can we speak of the concept of a sentence.
4 (M): ? /
5 (M): ∫ ✓

6 (V): I'd have to give
7 (M): ≠ ∫ ✓
8 (M): ? /
9 (M): ? / ✓
10 (V): we now

¹¹Die Frage kann auch lauten: Was geschieht, wenn ein neuer Satz in die Sprache aufgenommen wird: Was ist das Kriterium dafür, daß er ein Satz ist? oder, wenn das Aufnehmen in die Sprache ihn zum Satz stempelt, worin besteht diese Aufnahme? Oder: was ist Sprache?

62 ¹²Da scheint es nun offenbar, daß man das Zeichengeben *von anderen Tätigkeiten* unterscheidet. Ein Mensch schläft, ißt, trinkt, gibt Zeichen (bedient sich einer Sprache).

¹³Was ist ein Satz? wodurch ist dieser Begriff bestimmt? – Wie wird dieses Wort („Satz“) in der nicht-philosophischen Sprache gebraucht? Satz, im Gegensatz wozu?

¹⁴Ich kenne einen Satz, wenn ich ihn sehe.

¹⁵Diese Frage ist fundamental: Wie, wenn wir eine neue Erfahrung machen, etwa einen neuen Geschmack oder einen neuen Hautreiz kennen lernen: woher weiß ich, daß, was diese Erfahrung beschreiben wird,¹⁶ ein Satz sein wird?¹⁷ Oder, warum soll ich das einen Satz nennen? Nun, mit demselben Recht, mit dem ich vom Beschreiben oder von einer neuen „Erfahrung“¹⁸ gesprochen habe.¹⁹ Aber warum habe ich das Wort Erfahrung gebraucht, im Gegensatz wozu?

Wie kann ich überhaupt von einem neuen „Geschmack“²⁰ reden? Ich kann ihn mir ja nicht vorstellen! – Antwort: Wie wird²¹ so ein Ausdruck gebraucht?

²²Habe ich denn, was geschehen ist, schon bis zu einem Grade damit charakterisiert, daß ich sagte, es sei eine Erfahrung? Doch offenbar *gar nicht*. Aber es scheint doch, als hätte ich es schon getan, als hätte ich davon schon etwas ausgesagt: „daß es eine Erfahrung ist“. In diesem falschen Schein liegt unser *ganzes* Problem. Denn, was vom Prädikat „Erfahrung“ gilt, gilt vom Prädikat „Satz“.

²³Das Wort „Satz“ und das Wort „Erfahrung“ haben schon eine bestimmte Grammatik.

²⁴Das heißt, ihre Grammatik muß im Vorhinein bestimmt sein und hängt nicht von irgend einem künftigen Ereignis ab.

63 ²⁵Hier ist auch der Unsinn in der „experimentellen Theorie der Bedeutung“ ausgesprochen. Denn die Bedeutung ist in der Grammatik festgelegt.

²⁶Wie verhält sich die Grammatik des Wortes „Satz“ zur Grammatik der Sätze?

²⁷„Satz“ ist offenbar die Überschrift der Grammatik der Sätze. In einem Sinne aber auch die Überschrift der Grammatik überhaupt, also äquivalent den Worten „Grammatik“ und „Sprache“.²⁸

²⁹Wenn ich nun sage: aber die Sprache kann sich doch ausdehnen, so ist die Antwort: Gewiß, aber wenn dieses Wort „ausdehnen“ hier einen Sinn hat, so muß ich *jetzt* schon wissen, was ich

11 (M): ? / ✓]

12 (M): ? /]

13 (M): ? / XXX

14 (M): XXX ✓

15 (M): / ✓

16 (V): Erfahrung beschreibt,

17 (V): Satz ist?

18 (V): Wohl mit demselben Recht, womit // mit welchem // ich von einer neuen Erfahrung

19 (V): habe. ~~Denn Erfahrung und Satz sind äquivalent.~~

20 (V): von einer möglichen neuen Sinneserfahrng.

21 (V): vorstellen! – Wie wird

22 (M): ? / ✓

23 (M): ///

24 (M): ///

25 (M): ///

26 (M): XXX (

27 (M): XXX

28 (M):)

29 (M): ? / F.u.i.

¹¹The question can also be phrased: What happens when a new sentence is admitted into a language? What is the criterion for its being a sentence? Or if being admitted into language labels it as a sentence, what does this admission consist in? Or: What is language?

¹²Now here it seems obvious that one distinguishes using signs *from other activities*. A person sleeps, eats, drinks, uses signs to communicate (makes use of a language).

¹³What is a proposition? What defines this concept? – How is this word (“proposition”) used in non-philosophical language? Proposition, as opposed to what?

¹⁴I know a proposition when I see it.

¹⁵This question is fundamental: What if we have a new experience, say getting to know a new taste or a new sensation on our skin: how do I know that what will describe this experience will be a proposition?¹⁶ Or why should I call it a proposition? Well, with the same justification that allowed me to talk about describing it, or to talk about a new “experience”.¹⁷ But why did I use the word “experience” – in contrast to what?

How can I talk about a new “taste”¹⁸ in the first place? After all, I can’t imagine it! – Answer: how is¹⁹ such an expression used?

²⁰Have I to a certain extent already characterized what has happened in saying that it’s an experience? Obviously, *not at all*. But still it looks as if I had already done that, as if I had already stated something about it: “that it is an experience”. Our entire problem lies in this false appearance. For what holds true of the predicate “experience” also holds for the predicate “proposition”.

²¹The word “proposition” and the word “experience” already have a particular grammar.

²²That is, their grammar must be established in advance. It doesn’t depend on some future event.

²³This also clearly articulates the nonsense of the “experimental theory of meaning”. For meaning is laid down in grammar.

²⁴How does the grammar of the word “proposition” relate to the grammar of propositions?

²⁵“Proposition” is obviously the heading for the grammar of propositions. But in a sense it’s also the heading for grammar in general, and is therefore equivalent to the words “grammar” and “language”.²⁶

²⁷If I say: “But language can expand”, then the answer is: Certainly, but if the word “expand” makes any sense here, then I have to know *now* what I mean by it, have to be able to state

11 (M): ? / ✓]

12 (M): ? /]

13 (M): ? / XXX

14 (M): XXX ✓

15 (M): / ✓

16 (V): that what describes this experience is a proposition?

17 (V): proposition? Most probably the same justification that allowed me to talk about a new experience. ~~For experience and proposition are equivalent.~~

18 (V): about a possible new sense-experience

19 (V): imagine it! – How is

20 (M): ? / ✓

21 (M): ///

22 (M): ///

23 (M): ///

24 (M): XXX (

25 (M): XXX

26 (M):)

27 (M): ? / F.u.i.

damit meine, muß angeben können, wie ich mir so eine Ausdehnung vorstelle. Und was ich jetzt nicht denken kann, das kann ich jetzt auch nicht ausdrücken, und auch nicht andeuten.³⁰

³¹Es scheint unsere Frage noch zu erschweren, daß auch die Worte „Welt“ und „Wirklichkeit“ Äquivalente des Wortes „Satz“ sind.

³²Aber es ist doch lächerlich, die Welt, oder die Wirklichkeit, abgrenzen zu wollen. Wem soll man sie denn entgegenstellen. Und so ist es mit der Bedeutung des Wortes „Tatsache“. Aber man gebraucht ja diese Wörter auch nicht als Begriffswörter.

³³Etwas ist ein Satz nur in einer Sprache.³⁴

³⁵Das ist es auch, was damit gemeint ist, daß es in der Welt zwar Überraschungen gibt, aber nicht in der Grammatik.

63 ³⁶Und das Wort „jetzt“ bedeutet hier: „in *dieser* Grammatik³⁷“, oder: „wenn die Worte mit *diesen* grammatischen Regeln gebraucht werden“.

64 ³⁸Hier haben wir dieses bohrende Problem: wie es denn möglich ist, auch nur auf den Gedanken zu kommen!³⁹ „Wie konnte ich nur auf den Ged. kommen“ heißt hier: „was bedeutet denn der Gedanke, inwiefern ist er denn ein Ged. da ihm doch *nichts* entspricht?“

63v ⁴⁰Als wäre der Gedanke ein Zauber.

Was meinen wir denn mit der Existenz von Dingen, d.h. welche Anwendung hat denn dieser Begriff. Ein Gedanke ist ja bloß ein Ausdruck & hinter dem kann kein Zauber stecken.⁴¹ Was dieser Ausdruck *leistet* muß sich an seiner Anwendung zeigen.

64 ⁴²Hierher gehört die alte Frage: „wie bin ich dann aber überhaupt zu diesem Begriff gekommen“ (etwa zu dem der außer mir liegenden Gegenstände). (Es ist ein Glück, eine solche Frage aus der Entfernung als alte Gedankenbewegung betrachten zu können; ohne in ihr verstrickt zu sein.) Zu dieser Frage ist ganz richtig der Nachsatz zu denken: „ich konnte doch nicht mein eigenes Denken transcendieren“, „ich konnte doch nicht sinnvoll das transcendieren, was für mich Sinn hat“. Es ist das Gefühl, daß ich nicht auf Schleichwegen (hinterrücks) dahin kommen kann, etwas zu denken, was zu denken mir eigentlich verwehrt ist. Daß es hier keine Schleichwege gibt, auf denen ich weiter kommen könnte, als auf dem direkten Weg.

⁴³Wir haben es natürlich wieder mit einer falschen Analogie zu tun: Es hat guten Sinn zu sagen „ich weiß, daß er in diesem Zimmer ist, weil ich ihn höre, wenn ich auch nicht hineingehen und ihn sehen kann“. Es gibt in der Grammatik nicht direktes & indirektes Wissen.

⁴⁴„Satz“ ist so allgemein wie z.B. auch „Ereignis“. Wie kann man „ein Ereignis“ von dem abgrenzen, was kein Ereignis ist?

Ebenso allgemein ist aber auch „Experiment“, das vielleicht auf den ersten Blick spezieller zu sein scheint.

30 (M): Bezieht sich auf die Kontroverse über die Möglichkeit einer neuen Sinneswahrnehmung & über ungelöste Probleme in der Mathematik.

31 (M): ? /

32 (M): /// /

33 (M): / ✓

34 (R): [Zu S. 93]

35 (M): / ✓

36 (M): ? /

37 (V): „in *diesem* Kalkül

38 (R): [Zu S. 79]

39 (V): wie es möglich ist, an die Existenz von Dingen auch nur zu denken, wenn wir immer nur Vorstellungen – ihre Abbilder – sehen.

40 (M): /

41 (V): sein.

42 (M): / ✓ (R): [Zu S. 79]

43 (M): ✓ ///

44 (M): /// /

how I envisage such an expansion. And what I can’t think now I also can’t express now, nor can I allude to it.²⁸

²⁹That the words “world” and “reality” are also equivalents of the word “proposition” seems to make our question even more difficult.

³⁰But it’s ridiculous to want to delimit the world or reality. With what should we contrast them? And that’s how it is with the meaning of the word “fact”.

But then again we don’t use these words as concept-words.

³¹Something is a proposition only in a language.³²

³³That is also what is meant by saying that surprises do occur in the world, but not in grammar.

³⁴And here the word “now” means: “in *this* grammar³⁵” or: “when the words are used with *these* grammatical rules”.

³⁶Here we have this nagging problem: How it is possible even to come up with a thought!³⁷ Here “How could I have come up with a thought” means: “What does the thought *mean*, to what extent is it a thought anyway, since *nothing* corresponds to it, after all?”

³⁸As if a thought were magic.

What do we mean by the existence of things, i.e. what use does this concept have? After all, a thought is just an expression, and there can be no magic hidden behind³⁹ an expression. What this expression *accomplishes* can only be seen by looking at its use.

⁴⁰This is the place for the old question: “But how did I arrive at this concept anyway?” (say that of external objects). (What a blessing it is to be able to look at such a question from afar, as an old movement of thought, without being enmeshed in it.) What we really need to do is to follow up this question with the thought: “I can’t transcend my own thinking, after all”, “After all, I can’t meaningfully transcend what makes sense for me”. It’s the feeling that I can’t get to the point of thinking something that in fact I’m barred from thinking by using secret paths (through a back door). That there are no secret paths for getting further than one gets on the direct path.

⁴¹Of course once again we’re dealing with a false analogy: It makes good sense to say “I know that he’s in this room because I hear him, even though I can’t go inside and see him”. In grammar there is no such thing as direct and indirect knowledge.

⁴²“Proposition” is as general as, for example, “event”. How can we differentiate “an event” from what isn’t one?

But “experiment” too, which at first sight might seem to be more specific, is just as general.

28 (M): Refers to the controversy about the possibility of a new sense-perception and to the one about unsolved problems in mathematics.

29 (M): ? /

30 (M): /// /

31 (M): / ✓

32 (R): [To p. 93]

33 (M): / ✓

34 (M): ? /

35 (V): calculus

36 (R): [To p. 79]

37 (V): problem: How is it possible even to think about the existence of things if all we ever see are mental images – their likenesses.

38 (M): /

39 (V): magic behind

40 (M): / ✓ (R): [To p. 79]

41 (M): ✓ ///

42 (M): /// /

⁴⁵„Da geschah ein Ereignis . . .“: das heißt nicht „ein *Ereignis*“ im Gegensatz zu etwas Anderem.

⁴⁶Rechtmäßiger Gebrauch des Wortes „Sprache“: Es bedeutet entweder die Erfahrungstatsache, daß Menschen reden (auf gleicher Stufe mit der, daß Hunde bellen), oder es bedeutet: festgesetztes System von Wörtern und grammatischen Regeln⁴⁷ in den Ausdrücken „die englische Sprache“, „deutsche Sprache“, „Sprache der Neger“ etc. „Sprache“ als logischer Begriff könnte nur mit „Satz“ äquivalent, und dann die⁴⁸ Überschrift eines Teiles der Grammatik sein.

⁴⁹Könnten wir etwas „Sprache“ nennen, was nicht wirklich angewandt würde? Könnte man von Sprache reden, wenn nie eine gesprochen worden wäre? (Ist denn Sprache ein Begriff, vergleichbar mit dem Begriff „Centaur“,⁵⁰ der besteht, auch wenn es nie ein solches Wesen gegeben hat?)

(Vergleiche damit ein Spiel, das nie gespielt wurde, eine Regel, nach der nie gehandelt wurde.)

⁵¹Was tut der, der eine neue Sprache konstruiert (erfindet)? nach welchem Prinzip geht er vor? Denn dieses Prinzip ist der Begriff „Sprache“.

⁵²Eine Sprache erfinden, heißt, eine Sprache konstruieren. Ihre Regeln aufstellen. Ihre Grammatik verfassen.

⁵³Verändert⁵⁴ jede erfundene Sprache den Begriff der Sprache?

⁵⁵Überlege, welches Verhältnis sie zum früheren Begriff hat. Denke⁵⁶ an das Verhältnis der komplexen Zahlen zum älteren Zahlbegriff;⁵⁷ andererseits an den Fall, wenn zum ersten Mal gewisse (etwa sehr große) Kardinalzahlen angeschrieben & miteinander multipliziert werden & an das Verhältnis dieser neuen Multiplikation zu dem allgemeinen Begr. der Multiplikation von Kardinalzahlen.⁵⁸

⁵⁹Was für das Wort „Sprache“ gilt, muß auch für den Ausdruck „System von Regeln“ gelten. Also auch für das Wort „Kalkül“.

⁶⁰Wie bin ich denn zum Begriff „Sprache“ gekommen? Doch nur durch die Sprachen, die ich gelernt habe.

⁶¹Aber die haben mich in gewissem Sinne über sich hinausgeführt, denn ich wäre jetzt im Stande, eine neue Sprache zu konstruieren, z.B. Wörter zu erfinden. Also gehört diese Methode der Konstruktion noch zum Begriff der Sprache. Aber nur, wenn ich ihn so festlege. Immer wieder hat mein „u.s.w.“ eine Grenze.

⁶²Der Begriff: sich einander etwas mitteilen. Wenn ich z.B. sage: „Sprache“ werde ich jedes System von Zeichen nennen, das Menschen untereinander vereinbaren, um sich

45 (M): /

46 (M): ///

47 (V): festgesetztes System der Verständigung

48 (V): eine

49 (M): ? /

50 (V): Ist denn Sprache ein Begriff, wie „Centaur“,

51 (M): ? / ✓ |

52 (M): XXX

53 (M): ? / ✓

54 (V): Erweitert

55 (M): ? /

56 (V): Denke ~~einerseits~~

57 (V): zum Zahlbegriff ~~von~~;

58 (V): andererseits an das Verhältnis einer Multiplikation von Kardinalzahlen die zum ersten mal hingeschrieben wird // einer neu aufgeschriebenen Multiplikation von Kardinalzahlen // zum Begriff // zum allgemeinen Begriff // ~~dieser~~ // der // Multiplikation von Kardinalzahlen.

59 (M): ✓ ///

60 (M): | ✓

61 (M): XXX

⁴³“At that moment an event took place . . .” That does not mean “an *event*”, as opposed to something else.

⁴⁴Legitimate use of the word “language”: Either it means the empirical fact that humans talk (on the same level as the fact that dogs bark), or it means an established system of words and grammatical rules⁴⁵ in such expressions as “the English language”, “the German language”, “the language of Negroes”, etc. Taken as a logical concept, “language” would have to be equivalent to “sentence”, and then it could be the heading⁴⁶ for a part of grammar.

⁴⁷Could we call something that wasn’t really used, “language”? Could one speak of language if none had ever been spoken? (Is language a concept comparable to the concept⁴⁸ “centaur”, which exists even if there never was such a creature?)

(Compare to this a game that was never played, a rule that was never followed.)

⁴⁹What does a person do who constructs (invents) a new language? According to what principle does he proceed? For this principle is the concept “language”.

⁵⁰To invent a language means to construct a language. To set up its rules. To compose its grammar.

⁵¹Does every invented language change⁵² the concept of language?

⁵³Think about the relationship it has to the earlier concept. Think about⁵⁴ the relationship of complex numbers to the older concept⁵⁵ of numbers; on the other hand, think about the case in which certain (say very large) cardinal numbers are written down and multiplied for the first time, and think about how this new multiplication relates to the general concept of the multiplication of cardinal numbers.⁵⁶

⁵⁷What holds for the word “language” must also hold for the expression “system of rules”. And therefore also for the word “calculus”.

⁵⁸How did I arrive at the concept “language”? Surely only through the languages that I learned.

But in a certain sense they led me beyond themselves, for now I’m able to construct a new language, can invent words, for instance. So this method of construction still belongs to the concept of language. But only if I define the concept this way. Again and again my “etc.” has a limit.

⁵⁹The concept: to communicate something to each other. If I say, for example: “I shall call any system of signs that people agree upon in order to communicate with each other a

43 (M): /

44 (M): ///

45 (V): system of communication

46 (V): be a heading

47 (M): ? /

48 (V): language a concept like

49 (M): ? / ✓ |

50 (M): XXX

51 (M): ? / ✓

52 (V): expand

53 (M): ? /

54 (V): about ~~on the one hand~~

55 (V): the concept

56 (V): on the other hand, think about the relationship of a multiplication of cardinal numbers that is written down for the first time // of a newly written down multiplication of cardinal numbers // to the //general// concept of the multiplication of cardinal numbers.

57 (M): ✓ ///

58 (M): ∫ ✓

59 (M): XXX

miteinander zu verständigen, so könnte man hier schon fragen: Und was schließt Du unter dem Begriff „Zeichen“ ein?

⁶²Was nenne ich „Handlung“, was „Sinneswahrnehmung“?

⁶³Die Worte „Welt“, „Erfahrung“, „Sprache“, „Satz“, „Kalkül“, „Mathematik“ können alle nur für triviale Abgrenzungen stehen, wie „essen“, „ruhen“, etc.

⁶⁴Denn, wenn auch ein solches Wort der Titel unserer Grammatik wäre – etwa das Wort „Grammatik“ – so hätte doch dieser Titel nur dieses Buch von andern Büchern zu unterscheiden.

⁶⁵Allgemeine Ausführungen über die Welt und die Sprache gibt es nicht.

⁶⁶Aber warum zerbreche ich mir über den Begriff „Sprache“ den Kopf, statt Sprache zu gebrauchen?!

Dieses Kopfzerbrechen ist nur dann berechtigt, wenn wir einen allgemeinen Begriff *haben*.

⁶⁷Ich finde bei Plato auf eine Frage wie „was ist Erkenntnis“ nicht die vorläufige Antwort: Sehen wir einmal nach, wie dieses Wort gebraucht wird. Sokrates weist es immer zurück, von Erkenntnissen statt von der Erkenntnis zu reden.⁶⁸

67 ⁶⁹Aber wenn so der allgemeine Begriff der Sprache sozusagen zerfließt, zerfließt da nicht
66v auch die Philosophie? Nein, denn ihre Aufgabe ist es nicht etwas Neues an Stelle unserer⁷⁰ Sprache
zu setzen sondern bestimmte⁷¹ Mißverständnisse in unserer Sprache zu beseitigen.⁷²

67 ⁷³Der, welcher darauf aufmerksam macht, daß ein Wort in zwei verschiedenen
Bedeutungen gebraucht wurde, oder daß bei dem Gebrauch eines⁷⁴ Ausdrucks uns dieses
Bild vorschwebt, und der überhaupt die Regeln feststellt (tabuliert), nach welchen Worte
gebraucht werden, hat garnicht die Pflicht übernommen,⁷⁵ eine Erklärung (Definition) des
Wortes „Regel“ (oder „Wort“, „Sprache“, „Satz“, etc.) zu geben.

⁷⁶So ist es mir erlaubt, das Wort „Regel“ zu verwenden, ohne notwendig erst die Regeln
über dieses Wort zu tabulieren. Und diese Regeln sind nicht Über-Regeln.

⁷⁷Die Philosophie hat es auch in demselben Sinn mit Kalkülen zu tun, wie sie es mit
Gedanken zu tun hat (oder mit Sätzen und Sprachen). Hätte sie's aber wesentlich mit dem
Begriff des Kalküls zu tun, also mit dem Begriff des Kalküls vor allen Kalkülen, so gäbe es
eine Metaphilosophie. Und die gibt es nicht. (Man könnte alles, was wir zu sagen haben, so
darstellen, daß das als ein leitender Gedanke erschiene.)

⁷⁸Das Wort „Regel“ muß in der Erklärung eines Spiels nicht gebraucht werden (natür-
lich auch kein äquivalentes).

62 (M): ///

63 (M): /

64 (M): ? /

65 (M): ///

66 (M): ////

67 (M): (✓

68 (M):)

69 (M): ? / ✓

70 (V): ~~der~~

71 (V): einzelne

72 (V₁): Sprache aufzuklären. (V₂): Nein, denn
ihre Aufgabe ist es nicht, eine ~~neue~~ ideale
Sprache zu schaffen, sondern die zu reinigen,
die vorhanden ist.

73 (M): ? / ✓

74 (V): dieses

75 (V): hat gar keine Pflicht,

76 (M): ? / ✓

77 (M): ? / ✓

78 (M): XXX

‘language’”, then at that point one might ask: And what are you including in the concept “sign”?

⁶⁰What do I call an “act”, what a “sense-perception”?

⁶¹Each of the words “world”, “experience”, “language”, “proposition”, “calculus”, “mathematics” can stand only for trivial demarcations, similar to “eat”, “rest”, etc.

⁶²For even if such a word were the title of our grammar – say the word “grammar” – then still this title would only serve to distinguish this book from other books.

⁶³There are no such things as general discourses about the world and language.

⁶⁴But why am I wracking my brains about the concept “language” instead of using language?!

This wracking of brains is only justified if we *have* a general concept.

⁶⁵In Plato when a question like “What is knowledge?” gets asked, I don’t find as a provisional answer: “Let’s look and see how this word is used”. Socrates always rejects talking about particular instances of knowing, in favour of talking about knowledge.⁶⁶

⁶⁷But if the general concept of language thus dissolves, so to speak – doesn’t philosophy dissolve as well? No, for its task isn’t to put something new in place of our language, but to remove certain misunderstandings from it.⁶⁸

⁶⁹Someone who points out that a word was used with two different meanings, or that this picture is before our inner eye when an⁷⁰ expression is used, and who in general ascertains (tabulates) the rules in accordance with which words are used, has in no way assumed the obligation⁷¹ of providing an explanation (definition) of the word “rule” (or “word”, “language”, “proposition”, etc.).

⁷²Therefore I’m allowed to use the word “rule” without first having to tabulate the rules for this word. And these rules are not super-rules.

⁷³Philosophy has to do with calculi in the same sense as it has to do with thoughts (or with propositions and languages). But if it had to do essentially with the concept of a calculus, i.e. with the concept of a calculus before there were any individual calculations, then there would be a metaphilosophy. And that doesn’t exist. (Everything we have to say could be presented so that this appeared as a guiding thought.)

⁷⁴The word “rule” doesn’t have to be used in explaining a game (and of course neither does any equivalent word).

60 (M): ///

61 (M): /

62 (M): ? /

63 (M): ///

64 (M): /// /

65 (M): (✓

66 (M):)

67 (M): ? / ✓

68 (V₁): but to clarify individual misunderstandings in it. (V₂): No, for its task isn’t to create a

~~new~~ ideal language but to cleanse the one that we have.

69 (M): ? / ✓

70 (V): this

71 (V): has no obligation at all

72 (M): ? / ✓

73 (M): ? / ✓

74 (M): XXX

68 ⁷⁹Wie gebrauchen wir denn⁸⁰ das Wort „Regel“, wenn wir etwa von Spielen reden?⁸¹ Im Gegensatz wozu? Wir sagen z.B. „das folgt aus dieser Regel“, aber dann könnten wir ja die Regel des Spiels zitieren, und so das Wort „Regel“ ersetzen. Oder wir sprechen von „allen Regeln des Spiels“ und müssen sie dann entweder aufgezählt haben (und dann liegt wieder⁸² der erste Fall vor), oder wir sprechen von den Regeln als einer Gruppe,⁸³ die auf bestimmte Art aus bestimmten Grundregeln⁸⁴ erzeugt werden und dann steht das Wort „Regel“ für den Ausdruck *dieser* Grundregeln⁸⁵ und Operationen. Oder wir sagen „Das ist eine Regel, *das* nicht“, wenn etwa das Zweite nur ein einzelnes Wort ist, oder eine Konfiguration der Spielsteine. (Oder: „nein, das ist nach der neuen Abmachung auch eine Regel.“) Wenn wir etwa das Regelverzeichnis des Spiels aufzuschreiben hätten, so könnte so etwas gesagt werden und dann heiße es: *Das* gehört hinein, *das* nicht. Aber nicht vermöge einer bestimmten Eigenschaft (nämlich der, eine Regel zu sein), wie wenn man etwa lauter Äpfel in eine Kisten packen möchte und sagt „nein, das gehört nicht hinein, das ist eine Birne“.

69 Ja aber wir nennen doch manches „Spiel“, manches nicht, und manches „Regel“, und manches nicht! Aber auf die Abgrenzung alles dessen, was wir Spiel nennen gegen⁸⁶ alles andere, kommt es ja nie an. Die Spiele sind für uns *die* Spiele, von denen wir gehört haben, die wir aufzählen können, und etwa noch einige nach Analogie anderer neu gebildete; und wenn jemand etwa ein Buch über die Spiele schriebe, so brauchte er eigentlich das Wort „Spiel“ auch im Titel nicht, sondern als Titel könnte eine Aufzählung der Namen der einzelnen Spiele stehen. Und gefragt: Was ist denn aber das Gemeinsame aller dieser Dinge, dessentwegen⁸⁷ Du sie zusammenfaßt? könnte er sagen: ich weiß es nicht in einem Satz anzugeben, – aber Du siehst ja viele Analogien. Im übrigen scheint mir diese⁸⁸ Frage müßig, da ich auch wieder, nach Analogien fortfahrend, durch unmerkliche Stufen, zu Gebilden kommen kann, die niemand mehr im gewöhnlichen Leben „Spiel“ nennen wollte. Ich nenne daher „Spiel“ das, was auf dieser Liste steht, wie auch, was diesen Spielen bis zu einem gewissen (von mir nicht näher bestimmten) Grade ähnlich ist.⁸⁹ Im übrigen behalte ich mir vor, in jedem neuen Fall zu entscheiden, ob ich etwas zu den Spielen rechnen will oder nicht.

⁹⁰Es ist, wie wenn man für gewisse Spiele einen Strich mitten durchs Spielfeld zieht um die Parteien zu scheiden, das Feld aber im Übrigen⁹¹ nicht begrenzt, da es nicht nötig ist.

68v Wenn Frege sagt, mit unscharfen Begriffen wisse die Logik nichts anzufangen so ist das insofern wahr,⁹² als gerade die Schärfe der Begriffe zur Methode der Logik gehört. Das ist es was der Ausdruck, die⁹³ Logik sei normativ, bezeichnen kann.

69 ⁹⁴Und so verhält es sich mit dem Begriff „Regel“. ⁹⁵Nur in ganz besonderen⁹⁶ Fällen d.h.: nicht immer, wenn wir das Wort „Regel“ gebrauchen handelt es sich uns darum, die Regeln von etwas abzugrenzen, was nicht Regel ist, und in allen diesen Fällen ist es leicht, ein unterscheidendes Kriterium zu geben. Das heißt, wir brauchen das Wort „Regel“ im Gegensatz zu „Wort“, „Konfiguration der Steine“ und einigem Andern, und diese Grenzen können leicht klar

79 (M): ? / ✓

80 (V): denn ~~steht~~

81 (V): „Regel“ (wenn wir . . . reden)?

82 (V): ~~wieder~~

83 (V): Regeln, als einer Gruppe,

84 (V): aus gegebenen Grundpositionen

85 (V): Grundpositionen

86 (V): nennen, gegen

87 (V): weshalb

88 (V): übrigen ist diese

89 (M): Wohl auszulassen! schon anders & vielleicht besser gesagt.

90 (M): /

91 (V): aber weiter

92 (V): insofern ~~eine~~ die Wahrheit,

93 (V): Ausdruck „ die

94 (M): ? /

95 (V): Ebenso verhält es sich nun auch mit dem Begriff der Regel.

96 (V): speziellen

⁷⁵How *do* we⁷⁶ use the word “rule” when we talk about games, for instance?⁷⁷ In contrast to what? We say, for example, “This follows from that rule”, but in that case we could cite the rule itself and thus get rid of the word “rule”. Or we speak of “all the rules of the game”, and then we must either have enumerated them (and then it’s another instance of the first case), or we speak of the rules as a group that are generated in a certain way from certain basic rules,⁷⁸ and then the word “rule” stands for the expression of *these* basic rules⁷⁹ and operations. Or we say “*This* is a rule, *that* isn’t,” if, perhaps, the latter is just a single word or a configuration of game pieces. (Or: “No, according to our new understanding this is a rule too.”) If for example we were supposed to write down the list of the rules of a game, then something like this might be said, and then our list would read: *This* belongs here, *that* doesn’t. But not by virtue of a particular property (i.e. that of being a rule), as is the case for example when one wants to pack a crate with apples and says “No, this doesn’t belong here, it’s a pear”.

Yes, but we do call some things “games” and some things not, and some things “rules” and others not! But differentiating everything we call a game from everything else is *never* important. For us games are *the* games we have heard of, that we can enumerate, and perhaps some other ones, newly formed by analogy to ours. And if perhaps someone were to write a book about games, he wouldn’t actually need the word “game”, not even in the title; rather, an enumeration of the names of the individual games could serve as the title. And if asked: But what *is* it that all of these things have in common, the reason you’re bringing them together, he might say: I don’t know how to state it in a sentence – but surely you see many analogies. Furthermore, this question strikes me as⁸⁰ pointless, since, by using analogies and proceeding by imperceptible steps, I can come up with entities that no one in everyday life would want to call “games”. Therefore I call what is on this list a “game”, as well as what is similar to these games up to a certain point (which I do not define more precisely). As for the rest, I retain the right to decide in each new case whether I want to count something as a game or not.⁸¹

⁸²It is as if for certain games one draws a line right through the middle of the playing field in order to separate the teams, but doesn’t otherwise⁸³ mark off the field, since this isn’t necessary.

When Frege says that logic doesn’t know what to do with vague concepts, this is true⁸⁴ in so far as it is precisely the sharpness of concepts that belongs to the method of logic. That is what the expression “Logic is normative” can refer to.

⁸⁵And this is the way it is with the concept “rule”.⁸⁶ Only in very particular⁸⁷ cases – i.e. not every time we use the word “rule” – are we concerned with differentiating rules from something that isn’t a rule, and in all of these cases it is easy to come up with a distinguishing criterion. For example, we use the word “rule” as opposed to “word”, “configuration of game pieces” and several other things, and it’s easy to draw these boundaries clearly.⁸⁸ On the other

75 (M): ? / ✓

76 (V): we ~~also~~

77 (V): “rule” (when we talk about games, for instance)?

78 (V): from basic positions that are given,

79 (V): basic positions

80 (V): question is

81 (M): Better to leave out! Already expressed differently and possibly better.

82 (M): /

83 (V): but beyond that doesn’t

84 (V): is ~~a~~ the truth

85 (M): ? /

86 (V): Now this is exactly the way it is with the concept of rule.

87 (V): special

88 (V): and these boundaries are clearly drawn.

gezogen werden.⁹⁷ Dagegen ziehen wir dort nicht Grenzen, wo⁹⁸ wir sie nicht brauchen. Wir gebrauchen das Wort „Pflanze“⁹⁹ in bestimmtem Sinne, aber, im Falle einzelliger Lebewesen war die Frage eine Zeit lang schwebend, ob man sie Tiere oder Pflanzen nennen solle, und es ließen sich auch beliebig viel andere Grenzfälle konstruieren, für die die Entscheidung, ob etwas noch unter den Begriff Pflanze falle, erst zu treffen wäre. Ist aber darum die Bedeutung des Wortes „Pflanze“ in allen anderen Fällen verschwommen, sodaß man sagen könnte, wir gebrauchen das Wort, ohne es zu verstehen? Ja, würde uns eine Definition, die den Begriff nach verschiedenen Seiten begrenzte, die Bedeutung des Wortes in allen Sätzen klarer machen, sodaß wir auch alle Sätze, in denen es vorkommt, besser verstehen würden? Offenbar nein.

68v Wenn wir sagen „der Boden war ganz mit Pflanzen bedeckt“ so meinen wir gewöhnlich nicht Bakterien (d.h. wir würden diese Deutung wenn sie vorgeschlagen würde, ablehnen). Wir würden, müßten wir bestimmte Grenzen ziehen, in den verschiedenen Fällen wenn wir das Wort im gewöhnlichen Leben gebrauchen verschiedene Grenzen ziehen. Und manchmal müßten wir auch Grenzen andeuten.

„ein großes Stück Kuchen“, „ein großer Kirchturm“, „ein großer Hund“

Die Logik zieht ihrem Wesen nach Grenzen aber in der Sprache die wir sprechen sind solche Grenzen nicht gezogen. Das heißt aber nicht daß nun die Logik die Sprache falsch darstellt oder eine ideale Sprache. Sie portraitiert die Farbige verschwommene Wirklichkeit als Federzeichnung das ist ihre Aufgabe.

69 ¹⁰⁰(Sokrates stellt die Frage, was Erkenntnis sei und ist nicht mit der Aufzählung von Erkenntnissen zufrieden. Wir aber kümmern uns nicht viel um diesen allgemeinen Begriff und sind froh, wenn wir Schuhmacherei, Geometrie etc. verstehen.)¹⁰¹

¹⁰²Wir glauben nicht, daß nur der ein Spiel wirklich versteht, der eine Definition des Begriffs „Spiel“ geben kann.

70 ¹⁰³(Ich mache es mir in der Philosophie immer leichter und leichter. Aber die Schwierigkeit ist, es sich leichter zu machen und doch exakt zu bleiben.)

¹⁰⁴Der Gebrauch des Worts „Spiel“ „Satz“,¹⁰⁵ „Sprache“ etc. hat die Verschwommenheit des normalen Gebrauchs aller Begriffswörter unserer Sprache. Zu glauben sie wären darum unbrauchbar oder doch nicht ideal ihrem Zweck entsprechend wäre, als wollte man sagen „der Lichtschein meiner Lampe ist unbrauchbar,¹⁰⁶ weil man nicht weiß, wo er¹⁰⁷ anfängt & wo er¹⁰⁸ aufhört“.

¹⁰⁹Will ich zur Aufklärung & Vermeidung¹¹⁰ von Mißverständnissen im Gebiet eines (solchen) verschwommenen Sprachgebrauchs scharfe¹¹¹ Grenzen ziehen, so werden sich die scharf umgrenzten Bezirke zu dem wirklichen Sprachgebrauch verhalten wie¹¹² Konturen in einer Federzeichnung zu allmählichen Übergängen von Farbflecken in der Wirklichkeit die dargestellt ist.¹¹³

97 (V): Grenzen sind klar gezogen.

98 (V): Dagegen ist es müßig, Grenzen dort zu ziehen, wo

99 (V): brauchen. ~~Verhält es sich hier nicht ebenso, wie mit dem Begriff „Pflanze“?~~ Wir gebrauchen ~~dieses~~ das Wort

100 (M): (✓

101 (M):)

102 (M): /

103 (M): ? / ✓

104 (M): /

105 (V): des Worts „Satz“,

106 (V): sagen „... ist unbrauchbar,

107 (V): es

108 (V): es

109 (M): ?

110 (V): zur Aufklärung & zur Vermeidung

111 (V): verschwommenen Begriffs klare

112 (V): wie ~~die scharfen~~

113 (V): zu ~~den~~ allmählichen Farbübergängen ~~im Gesicht~~ in der Wirklichkeit die sie darstellt. // zu allmählichen Übergängen von Farbflecken in der Wirklichkeit die die Zeichnung darstellt.

hand, we don't draw boundaries where⁸⁹ we don't need them. We use the word “plant”⁹⁰ in a specific sense, but in the case of unicellular organisms the question whether one should call them animals or plants was undecided for a while, and one could also construct any number of additional borderline cases, in which whether something belonged to the concept “plant” would have to be decided. But does that make the meaning of the word “plant” blurred in all other cases, so that it could be said that we were using the word without understanding it? Indeed, would a definition that delimited the concept in various ways clarify the meaning of the word in all propositions, so that we would better understand all the propositions in which it appeared? Obviously not.

If we say “The ground was completely covered with plants”, then usually we don't mean bacteria. (That is, we would reject this interpretation if it were suggested to us). If we had to draw definite boundary lines we would draw different ones for the different instances of the everyday use of the word. And sometimes we'd have to imply boundary lines.

“A big piece of cake”, “a big steeple”, “a big dog”.

It is essential to logic to draw boundaries, but no such boundaries are drawn in the language we speak. But this doesn't mean that logic represents language incorrectly, or that it represents an ideal language. Its task is to portray a colourful, blurred reality as a pen-and-ink drawing.

⁹¹(Socrates asks the question what knowledge is and he isn't content with an enumeration of instances of knowledge. But we don't pay much attention to that general concept, and are happy if we understand shoe-making, geometry, etc.)⁹²

⁹³We don't believe that only someone who can provide a definition of the concept “game” really understands a game.

⁹⁴(I'm making it easier and easier for myself in philosophy. But the difficulty is to make it easier for oneself and yet to remain precise.)

⁹⁵The use of the words “game”, “proposition”,⁹⁶ “language” etc. has the blurriness of the normal use of all concept-words in our language. To believe that therefore they are useless or in any case don't ideally match up to their purpose is like saying “The light of my lamp is useless⁹⁷ because one doesn't know where it begins and where it ends”.

⁹⁸If I want to draw sharp⁹⁹ boundaries in the area of (such) blurred language use¹⁰⁰ in order to clear things up and to avoid misunderstandings, then the sharply demarcated areas will relate to real language use like the¹⁰¹ contours of a pen-and-ink drawing to the gradual transitions of colour patches in the reality that has been sketched.¹⁰²

89 (V): hand, it is pointless to draw boundaries where

90 (V): them. ~~Isn't it the same here as with the concept "plant"?~~ We use ~~this~~ that word

91 (M): (✓

92 (M):)

93 (M): /

94 (M): ? / ✓

95 (M): /

96 (V): of the word “proposition”,

97 (V): saying “. . . is useless

98 (M): ?

99 (V): clear

100 (V): of (such) a blurred concept

101 (V): the ~~sharp~~

102 (V): to ~~the~~ gradual transitions of colour ~~in the face~~ in the reality that it sketches. // to gradual transitions of colour patches in the reality that the drawing sketches.

16

71 Die Logik redet von Sätzen und Wörtern im gewöhnlichen Sinn, nicht von Sätzen und Wörtern in irgend einem abstrakten Sinn.

¹Ich glaube nicht, daß die Logik in einem andern Sinne von Sätzen reden kann, als wir für gewöhnlich tun, wenn wir sagen „hier steht ein Satz aufgeschrieben“ oder „nein, das sieht nur aus wie ein Satz, ist aber keiner“, etc. etc.

²Die Frage „was ist ein Wort“ ist ganz analog der „was ist eine Schachfigur“.

³Wir reden natürlich von dem räumlichen und zeitlichen *Phänomen* der Sprache. Nicht von einem unräumlichen und unzeitlichen Unding. Aber wir reden von ihr so, wie von den Figuren des Schachspiels, von ihrem Gebrauch im Spiel, nicht von ihren physikalischen Eigenschaften.⁴

⁵Wir können in der Philosophie auch keine größere *Allgemeinheit* erreichen, als in dem, was wir in Leben und Wissenschaft aussprechen.⁶ (D.h., auch hier lassen wir alles, wie es ist.)

⁷So ist eine aufsehenerregende Definition der Zahl nicht die⁸ Sache der Philosophie.

72 ⁹Die Philosophie hat es mit den bestehenden Sprachen zu tun und nicht vorzugeben, daß sie von einer abstrakten Sprache handeln müsse.

71v Wir können leicht in der Untersuchung der Spr. & der Bed. dahin kommen zu denken,¹⁰ wir dürften eigentlich nicht von Wörtern & Sätzen im ganz hausbackenen Sinn reden sondern von Wörtern etc. in einem sublimierteren Sinn, abstrakteren Sinn. So als wäre ein bestimmter Satz nicht eigentlich was irgend ein Mensch ausspricht sondern ein Idealwesen (die Klasse aller gleichbedeutenden Sätze oder dergleichen.) Aber ist auch der Schachkönig von dem die Schachregeln handeln ein solches Idealding ein abstraktes Wesen?

1 (M): / ✓

2 (M): / ✓

3 (M): ? / ✓ (R): Gehört eigentl. zu:
„Verstehen“ kein Akt während des Redens etc.

4 (V): Schachspiels, indem wir Regeln für sie tabulieren, nicht ihre physikalischen Eigenschaften beschreiben.

5 (M): / ✓

6 (V): sagen.

7 (M): /

8 (V): Zahl keine

9 (M): XXX

10 (V): Wir fühlen beim Nachdenken über das Problem // beim Studium des Problems // der Sprache & der Bedeutung leicht die Versuchung anzunehmen // Wir können leicht dahin kommen zu denken,

16

Logic Talks about Sentences and Words in the Ordinary Sense, not in Some Abstract Sense.

¹I don't think that logic can talk about sentences in any other sense than we ordinarily do when we say "Here's a sentence that's been written down" or "No, that only looks like a sentence but isn't one", etc. etc.

²The question "What is a word?" is completely analogous to "What is a chess piece?".

³Of course we are talking about the spatial and temporal *phenomenon* of language. And not about a non-spatial, non-temporal absurdity. But we are talking about it as we do about the pieces in a chess game, about its use in the game, and not about its physical properties.⁴

⁵In philosophy too we cannot achieve any greater *generality* than in what we express⁶ in life and in science. (That is, here too we leave everything as it is.)

⁷So a spectacular definition of "number" is not the business of philosophy.

⁸Philosophy is concerned with existing languages and shouldn't pretend that it has to deal with an abstract language.

In investigating language and meaning we can easily get to the point of thinking⁹ that really we shouldn't talk about words and sentences in their quite ordinary sense, but about words etc. in a more sublimated, more abstract, sense. As if a particular sentence were really not something uttered by a human being, but were an ideal entity (the class of all synonymous sentences or some such thing). But is the chess king, with which the rules of chess deal, also such an ideal thing, an abstract entity?

1 (M): / ✓

2 (M): / ✓

3 (M): ? / ✓ (R): Really belongs to: "Understanding" isn't an act that occurs while talking etc.

4 (V): chess game, by tabulating rules for it, not by describing its physical properties.

5 (M): / ✓

6 (V): say

7 (M): /

8 (M): XXX

9 (V): In thinking about // studying // the problem of language and meaning we are easily seduced into assuming // We can easily get to the point of thinking

72 ¹¹Wenn ich nämlich über die Sprache – Wort, Satz, etc. – rede, muß ich die Sprache des Alltags reden. – Aber gibt es denn eine andere?

¹²Ist diese Sprache etwa zu grob, materiell, für das, was wir sagen wollen? Und kann es eine andere geben? Und wie merkwürdig, daß wir dann mit der unseren überhaupt¹³ etwas anfangen können.

¹⁴Daß ich beim Erklären der Sprache (in unserem Sinne) schon die volle Sprache (nicht etwa eine vorbereitende, vorläufige) anwenden muß, zeigt schon, daß ich nur Äußerliches über die Sprache vorbringen¹⁵ kann.

¹⁶Ja, aber wie können uns diese Ausführungen dann befriedigen? – Nun, Deine Fragen waren ja auch schon in dieser Sprache abgefaßt; mußten in dieser Sprache ausgedrückt werden, wenn etwas zu fragen war!

¹⁷Und Deine Skrupel sind Mißverständnisse.

¹⁸Deine Fragen beziehen sich auf Wörter, so muß ich von Wörtern reden.¹⁹

²⁰Man sagt: Es kommt doch nicht aufs²¹ Wort an, sondern auf seine Bedeutung, und denkt dabei immer an die Bedeutung, als ob sie nun eine Sache von der Art des Worts wäre, allerdings vom Wort verschieden. Hier ist das Wort, hier die Bedeutung. (Das Geld, und die Kuh, die man dafür kaufen kann. Andererseits aber: das Geld, und sein Nutzen.)

73 ²²Über unsere Sprache sind nicht mehr Bedenken gerechtfertigt,²³ als ein Schachspieler über das Schachspiel hat, nämlich keine. ²⁴((Hier ist nicht gemeint „über den Begriff der Sprache“. Sondern es heißt eher: „sprich ruhig darauf los, wie ein Schachspieler spielt, es kann Dir nichts passieren, Deine Skrupel sind ja nur Mißverständnisse, ‚philosophische‘ Sätze.“))

11 (M): / ✓

12 (M): / ✓

13 (V): dennoch

14 (M): / ✓ (

15 (V): sagen

16 (M): / ✓

17 (M): / ✓

18 (M): / ✓

19 (M):)

20 (M): / ✓

21 (V): auf das

22 (M): / ✓

23 (V): Über die Sprache des Alltags sind nicht mehr ~~Skrupeln~~ Bedenken berechtigt,

24 (M): ×××

¹⁰For when I speak about language – word, sentence, etc. – I have to speak in everyday language. – But is there any other?

¹¹Is this language perhaps too coarse, too material, for what we want to say? And can there be another one? And in that case how remarkable it is that we can do anything at all¹² with ours.

¹³That in explaining language (in our sense) I already have to use full-blown language (and not, say, a preparatory, provisional one) shows that all I can do is to present¹⁴ external facts about language.

¹⁵Yes, but how can these elaborations then satisfy us? – Well, after all, your questions too were formulated in this language. They had to be expressed in this language for something to be asked!

¹⁶And your scruples are misunderstandings.

¹⁷Your questions refer to words, so I have to talk about words.¹⁸

¹⁹It is said: It's not the word that counts, but its meaning, and in saying this one always thinks of meaning as if it were a thing of the same kind as the word, yet different from it. Here is the word, here the meaning. (Money, and the cow that one can buy with it. But on the other hand: money and its profit.)

²⁰No more misgivings are justified about our language²¹ than a chess player has about chess games, namely none. ²²((This doesn't mean "about the concept of language". It just means: "Go ahead and talk away, just as a chess player plays. Nothing can happen to you. Your scruples, after all, are only misunderstandings, 'philosophical' propositions.))

10 (M): / ✓

11 (M): / ✓

12 (V): that nevertheless we can do something

13 (M): / ✓ (

14 (V): state

15 (M): / ✓

16 (M): / ✓

17 (M): / ✓

18 (M):)

19 (M): / ✓

20 (M): / ✓

21 (V): No more misgivings ~~scruples~~ are justified about our everyday language

22 (M): ×××

Satz und Satzklang.

74

Was ist ein Satz? – Vor allem gibt es in unseren Sprachen einen *Satzklang*. (Daher Unsinngedichte wie die Lewis Carroll's).¹ Und was *wir* oft Unsinn nennen ist nicht ein beliebiger.²

³Bei der Frage nach der allgemeinen Satzform bedenken wir, daß die gewöhnliche Sprache zwar einen bestimmten Satzrhythmus hat, aber nicht alles, was diesen Rhythmus hat, ein Satz ist.

D.h. *wie ein Satz klingt* und keiner ist. – Daher die Idee vom sinnvollen und unsinnigen „Satz“.

⁴Andererseits ist dieser Rhythmus aber natürlich nicht wesentlich. Der Ausdruck „Zucker Tisch“ *klingt* nicht wie ein Satz, kann aber doch sehr wohl den Satz „auf dem Tisch liegt Zucker“ ersetzen. Und zwar nicht etwa so, daß wir uns etwas Fehlendes hinzudenken müßten, sondern, es kommt wieder nur auf das System an, dem der Ausdruck „Zucker Tisch“ angehört.

⁵Es fragt sich also, ob wir außer diesem irreführenden Satzklang noch einen allgemeinen Begriff vom Satz haben. (Ich rede jetzt von dem, was durch „•“, „√“, „⊃“, zusammengehalten wird.)

⁶Denken wir uns, wir läsen die Sätze eines Buches verkehrt, die Worte in umgekehrter Reihenfolge; könnten wir nicht dennoch den Satz verstehen? Und klänge er jetzt nicht ganz unsatzmäßig?

75, 74v, 75
74v, 75, 74v

⁷Hat es Sinn,⁸ zu sagen: „Ich habe so viele Schuhe, als eine Lösung der Gleichung $x^3 + 2x - 3 = 0$ ergibt“.⁹ Hier könnte es scheinen, als hätten wir eine Notation, deren Grammatik allein nicht bestimmt was ein sinnvoller Satz ist & was nicht.¹⁰ Daß es also von vornherein nicht bestimmt wäre.

75

Wenn der Ausdruck „die Wurzel der Gleichung $F(x) = 0$ “ eine Beschreibung im Russell'schen Sinne wäre, so hätte der Satz „ich habe n Äpfel und $n + 2 = 6$ “ einen andern Sinn, als der: „ich habe 4 Äpfel“.

Wir haben in dem ersten Satz ein außerordentlich lehrreiches Beispiel dafür, wie eine Notation auf den ersten Blick einwandfrei erscheinen kann, nämlich so, als verstünden wir sie; und daß wir in Wirklichkeit einen unsinnigen Satz nach Analogie eines sinnvollen gebildet haben und nur *glauben*, die Regeln des ersteren zu übersehen. So ist „ich habe n Schuhe und $n^2 = 4$ “ ein sinnvoller Satz; aber nicht „ich habe n Schuhe und $n^2 = 2$ “.

1 (O): Caroll's) (V): Caroll's) ~~Daher reden wir von Unsinn~~

2 (O): nicht eine Beliebige.

3 (M): ü / ✓

4 (M): a ? / ✓

5 (M): / ✓

6 (M): f ✓

7 (M): / ✓ (R): Zu § 18 S. 76 § 19 S. 79

8 (V): Hat es ~~einen~~ Sinn,

9 (V): als eine Wurzel der Gleichung $x^3 + 2x - 3 = 0$ Einheiten hat“? 75

10 (V): bestimmt ob ~~es~~ ein Satz Sinn hat oder nicht. // Notation, der wir es eventuell nicht ansehen können, ob sie Sinn hat oder nicht. 75

Sentence and Sentence-Sound.

What is a sentence? – First of all, there is a *sound* to the sentences in our languages. (Hence nonsense poems like those of Lewis Carroll.)¹ And often what we call nonsense is not something that's arbitrary.

²In dealing with the question of the general form of a proposition, we should bear in mind that ordinary language does have a particular sentence-rhythm, but that not everything that has this rhythm is a sentence.

That is, it *sounds like a sentence* but isn't one. – Hence the idea of a meaningful and a nonsensical "*sentence*".

³But on the other hand, this rhythm is of course inessential. The expression "sugar table" doesn't *sound* like a sentence, yet it can easily replace the sentence "Sugar is lying on the table". And it's not necessary that mentally we supply something that is missing; rather, once again it all depends on the system that the expression "sugar table" belongs to.

⁴So the question arises whether, aside from this misleading sound of a sentence, we have another general concept of a proposition. (Now I'm talking about what is connected by "&", "∨", "⊃".)

⁵Let's imagine reading the sentences in a book backwards, the words in reverse order; couldn't we still understand the sentence? And wouldn't it now sound completely unlike a sentence?

⁶Does it make sense to say: "I have as many shoes as the solution to the equation⁷ $x^3 + 2x - 3 = 0$ "? Here it might seem that we have a notation whose grammar alone doesn't determine what is a meaningful proposition and what isn't.⁸ So that this wouldn't be determined in advance.

If the expression "the root of the equation $F(x) = 0$ " were a description in Russell's sense, then the proposition "I have n apples and $n + 2 = 6$ " would have a different sense from: "I have 4 apples".

In the first sentence we have an extraordinarily instructive example of how a notation can seem flawless at first sight, i.e. understandable; whereas in reality we have formed a nonsensical sentence analogously to one that makes sense, and we only *believe* we have an overview of the rules for the former. Thus "I have n shoes and $n^2 = 4$ " is a meaningful sentence, but not: "I have n shoes and $n^2 = 2$ ".

1 (V): Carroll.) Hence we talk of nonsense

2 (M): r / ✓

3 (M): a ? / ✓

4 (M): / ✓

5 (M): j ✓

6 (M): / ✓ (R): To § 48 p. 76 § 19 p. 79

7 (V): shoes as there are roots of the equation

8 (V): determine whether ~~whether~~ a proposition has sense or not. // notation which, when we look at it, we may not be able to tell whether it has sense or not.

74v ¹¹Dies gibt ein herrliches Beispiel dafür, was es heißt, einen Satz verstehen (meinen).¹²

¹³Inwiefern ist das Verstehen – das augenblickliche Verstehen – des Satzes ein Kriterium dafür, daß der Satz Sinn hat?

11 (M): /

12 (V): einen Satz verstehen.

13 (M): /

⁹This provides a splendid example of what it means to understand (to mean) a proposition.¹⁰

¹¹To what extent is understanding – immediate understanding – of a proposition a criterion for its making sense?

9 (M): /

10 (V): means to understand a proposition.

11 (M): /

76

Was als Satz gelten soll, ist in der *Grammatik* bestimmt.¹

75v ²Die Erklärung: „Satz ist alles, was wahr oder falsch sein kann“³ bestimmt den Begriff des Satzes in einem bestimmten Sprachsystem als das was in diesem System Argument einer Wahrheitsfunktion ist.⁴

Und wenn wir von dem sprechen, was der Satzform als solcher wesentlich ist so sind es manchmal⁵ die Wahrheitsfunktionen. Wenn ich sagte die allgemeine Form des Satzes sei „es verhält sich so & so“ so war eben das gemeint.

76 ⁶„p“ ist wahr = p. Man gebraucht das Wort „wahr“ in Zusammenhängen wie „was er sagt ist wahr“, das aber sagt dasselbe wie „er sagt ‚p‘, und p ist der Fall“.

⁷„Wahr“ und „falsch“ sind tatsächlich nur Wörter einer bestimmten Notation der Wahrheitsfunktion.

⁸Wenn man sagt, Satz sei alles, was wahr oder falsch sein könne, so heißt das *dasselbe* wie: Satz ist alles, was sich verneinen läßt.

⁹Wenn wir von dem sprechen, was der Satzform als solcher wesentlich ist, so meinen wir die Wahrheitsfunktion.¹⁰

77 ¹¹Man kann natürlich¹² nicht sagen, „Satz“ sei dasjenige, wovon man „wahr“ und „falsch“ aussagen könne, in dem Sinn, als könnte man versuchen, zu welchen Symbolen die Wörter „wahr“ und „falsch“ paßten und danach entscheiden, ob etwas ein Satz ist. Denn das würde nur dann etwas bestimmen, wenn diese Worte in einer bestimmten Weise gemeint sind, d.h. bereits eine bestimmte Grammatik haben.¹³ Und eben im Zusammenhang mit einem Satz. Alles, was man machen kann, ist hier, wie in allen diesen Fällen, das grammatische Spiel bestimmen, seine Regeln angeben und es dabei bewenden lassen.

1 (R): ~~V S. 75/4~~ √ Anfang des § 40 S. 171 & 170v.
√ √ S. 114/3 ✓

2 (M): ? /

3 (V): Die Erklärung: „Satz sei alles, was wahr oder falsch sein könne

4 (V₁): System als Argument einer Wahrheitsfunktion auftritt. (V₂): ~~∫ Die Erklärung: „die man erhält, wenn man nach dem Wesen des Satzes fragt“~~ Satz sei alles, was wahr oder falsch sein könne – ist nicht so ganz unrichtig. Es ist die Form der Wahrheitsfunktion (in welcher Form der Zeichengebung immer

ausgedrückt), die das logische Wesen des Satzes ausmacht.

5 (V): so meinen wir oft

6 (M): ∫ ✓

7 (M): ? / ✓

8 (M): a ? /

9 (M): ∫ ✓

10 (V): Wahrheitsfunktionen.

11 (M): ∫ ✓

12 (V): natürlich ~~auch~~

13 (V): gemeint sind, das aber können sie nur im Zusammenhang sein.

76

What is to Count as a Proposition is Determined in *Grammar*.¹

²The statement: “A proposition is everything that can be true or false”³ defines the concept of a proposition, within a specific system of language, as what is⁴ an argument of a truth-function in that system.⁵

And when we speak of what is essential to the form of a proposition as such, then sometimes it is⁶ truth-functions. When I said that the general form of a proposition is “Such and such is the case” that was precisely what I meant.

⁷“p” is true = p. The word “true” is used in contexts such as “What he says is true”, but that says the same thing as “He says ‘p’, and p is the case”.

⁸“True” and “false” are in point of fact only words in a particular notation for the truth-function.

⁹When one says that a proposition is everything that can be true or false, that means *the same as*: a proposition is everything that can be denied.

¹⁰When we speak of what is essential to the form of a proposition as such, what we mean is the truth-function.¹¹

¹²Of course one cannot¹³ say that a proposition is what one can declare to be “true” or “false” in the sense in which one could try out which symbols the words “true” and “false” fit and decide accordingly whether something is a proposition. For that would only decide something if these words are meant in a certain way, i.e. already have a certain grammar.¹⁴ That is, in connection with a proposition. All one can do here, as in all of these cases, is to define the grammatical game, state its rules and leave it at that.

1 (R): ~~∇ p. 75/1~~ ∇ beginning of § 40 p. 171 & 170v.
✓ ∇ p. 114/3 ✓

2 (M): ? /

3 (V): The statement: “A proposition is everything that could be true or false

4 (V): what makes its appearance as

5 (V): ∫ The statement: ~~that one gets when one asks about the nature of a proposition: A proposition is everything that can be true or false – is not as completely incorrect as it seems. It is the form of the truth-function (no matter what~~

its form of signification) that constitutes the logical essence of a proposition.

6 (V) then we frequently mean

7 (M): ∫ ✓

8 (M): ? / ✓

9 (M): a ? /

10 (M): ∫ ✓

11 (V): is truth-functions.

12 (M): ∫ ✓

13 (V): ~~also~~

14 (V): way, but they can only be meant in a certain way in a context.

¹⁴Was ein Satz ist, wird durch die Grammatik bestimmt. D.h., innerhalb der Grammatik. (Dahin zielte auch meine „allgemeine Satzform“.)

¹⁵Man kann nicht sagen „dieser Struktur fehlt noch etwas, um ein Satz zu sein“. Sondern es fehlt ihr etwas, um in *dieser* Sprache ein Satz zu sein. Man kann sagen:¹⁶ dem Zeichenausdruck „ $2 + 2 = 4$ “ fehlt etwas, um eine Gleichung zu sein.

¹⁷Den Russen, welche statt „er ist gut“ sagen „er gut“ geht nichts verloren, und sie denken sich auch kein Verbum dazu.

¹⁸Den kompletten Satz zu charakterisieren ist so unmöglich, wie die komplette Tatsache.

¹⁹Kann man den Begriff des „Satzes“ festlegen? oder die allgemeine Form des Gesetzes? – Warum nicht! Wie man ja auch den Begriff „Zahl“ festlegen könnte, etwa durch das Zeichen „ $|0, \xi, \xi+1|$ “. Es steht mir ja frei, nur das Zahl zu nennen; und so steht es mir auch frei, eine analoge Vorschrift zur Bildung von Sätzen oder Gesetzen²⁰ zu geben und das Wort „Satz“ oder „Gesetz“ [Ramsey] als ein Äquivalent dieser Vorschrift zu gebrauchen. Wehrt man sich dagegen und sagt, es sei doch klar, daß damit nur gewisse Gesetze von andern abgegrenzt worden seien, so antworte ich: Ja, Du kannst freilich nicht eine Grenze ziehen, wenn Du von vornherein entschlossen bist, keine anzuerkennen! – ²¹Sollen die „Sätze“ den unendlichen logischen Raum erfüllen, so kann von keiner allgemeinen Satzform die Rede sein. Es fragt sich dann natürlich: Wie gebrauchst Du nun das Wort „Satz“? im Gegensatz wozu? – Etwa im Gegensatz zu „Wort“, „Satzteil“, „Buchtitel“, „Erzählung“, etc.

²²(Ein Satz, der von allen Sätzen oder allen Funktionen handelt. Was meint man damit?²³ Denkt man an einen Satz der Logik?²⁴ Denken wir nun daran, wie der Satz $\sim \sim p = p$ ²⁵ bewiesen wird.)

²⁶Wenn ich „es verhält sich so und so“ als allgemeine Satzform gelten lasse, dann muß ich $2 + 2 = 4$ unter die Sätze rechnen, denn es ist grammatisch richtig, zu sagen: „es verhält sich so, daß $2 + 2$ gleich 4 ist“. Es braucht weitere Regeln, um die Sätze der Arithmetik auszuschließen.

²⁷Falsche Ideen über das Funktionieren der Sprache: Broad, der sagte, etwas *werde* eintreffen, sei kein Satz. Was spricht man dieser Aussage damit ab? Etwas anderes, als, daß sie Gegenwärtiges oder Vergangenes beschreibt? – Die Magie mit Wörtern. Ein solcher Satz, wie der Broads, kommt mir so vor, wie ein Versuch, eine chemische Änderung magisch zu bewirken; indem man den Substanzen, quasi, zu verstehen gibt, was sie tun sollen (wenn man etwa Eisen in Gold überführen wollte, indem man ein Stück Eisen mit der rechten und zugleich ein Stück Gold mit der linken Hand faßte).

14 (M): ? / ✓

15 (M): ∫ (R): [Zu: „Was ist ein Erfahrungssatz“]

16 (V): sein. Wie man sagen kann:

17 (M): ∫ // /

18 (M): ? ∫ (R): [Zu: „Was ist ein Erfahrungssatz“]

19 (M): / ✓

20 (E): Möglicherweise wollte Wittgenstein die untenstehende Tabelle, die sich auf der Rückseite dieser Seite findet, hier einsetzen.

O' a₁₁ a₁₂ a₁₃ . . .

O' a₂₁ a₂₂ a₂₃ . . .

O' a₃₁ a₃₂ a₃₃ . . .

. . .

. . .

21 (M): XXX

22 (M): / ✓

23 (V): handelt. Was stellt man sich darunter vor?

24 (V): Es wäre wohl ein Satz der Logik.

25 (V): Satz $\sim \sim p = p$

26 (M): ? / ✓

27 (M): ? / (R): [Zu: „Was ist ein Erfahrungssatz“]

¹⁵What a proposition is is determined by grammar. That is, within grammar. (This is also what my “general form of the proposition” was aiming at.)

¹⁶One cannot say “This structure still needs something in order to be a proposition”. Rather, it needs something in order to be a proposition in *this* language. One can say:¹⁷ the expression “ $2 + 2 = 4$ ” needs something in order to be an equation.

¹⁸Russians who say “He good” instead of “He is good” lose nothing, nor do they mentally add a verb.

¹⁹It is as impossible to characterize a complete proposition as it is a complete fact.

²⁰Can one define the concept of a “proposition”, or the general form of laws? – Why not! In the same way as one could also define the concept “number”, say by the sign “ $|0, \xi, \xi + 1|$ ”. I am free, after all, to call only that a number; and likewise I am free to issue an analogous prescription for the formation of propositions or laws,²¹ and to use the word “proposition” or “law” (Ramsey) as equivalent to this prescription. If someone resists this and says that it’s perfectly clear that in so doing only certain laws have been marked off from others, then I answer: Well, of course you can’t draw a boundary line if you are determined from the outset not to acknowledge any! – ²²If “propositions” are to fill up infinite logical space, then there can’t be any talk of a general propositional form. Then, of course, the question arises: How do you now use the word “proposition”? In contrast to what? – For instance, in contrast to “word”, “part of a proposition”, “book title”, “story”, etc.

²³(A proposition that is about all propositions or all functions. What does one mean²⁴ by this? Is one thinking of a logical proposition?²⁵ Let’s now think about how the proposition $\sim\sim p = p$ ²⁶ is proved.)

²⁷If I allow “This and that is the case” to count as the general form of the proposition, then I have to include $2 + 2 = 4$ among the propositions, for it is grammatically correct to say “It is the case that $2 + 2$ is equal to 4”. Additional rules are needed to exclude arithmetical propositions.

²⁸False ideas about how language functions: Broad, who said that “Something *will* happen” is not a proposition. What does one deny of this statement by saying that? Something other than that it describes something present or past? – Magic with words. A proposition such as Broad’s strikes me as being like an attempt to effect a chemical change by magic; by letting the substances know, as it were, what they are supposed to do (as if one wanted to transform iron into gold by grabbing a piece of iron with one’s right hand and at the same time a piece of gold with the left).

- | | |
|--|---|
| 15 (M): ? / ✓ | O' a ₃₁ a ₃₂ a ₃₃ . . . |
| 16 (M): ∫ (R): [To: “What is an empirical proposition”] | . . . |
| 17 (V): As one can say: | . . . |
| 18 (M): ∫ /// | 22 (M): XXX |
| 19 (M): ? ∫ (R): [To: “What is an empirical proposition”] | 23 (M): / ✓ |
| 20 (M): / ✓ | 24 (V): imagine |
| 21 (E): Perhaps this is where Wittgenstein wanted to insert the following table, which appears on the back of this page: | 25 (V): this? It probably would be a logical proposition. |
| O' a ₁₁ a ₁₂ a ₁₃ . . . | 26 (V): proposition $\sim^{2n} p = p$ |
| O' a ₂₁ a ₂₂ a ₂₃ . . . | 27 (M): ? / ✓ |
| | 28 (M): ? / (R): [To: “What is an empirical proposition”] |

Die grammatischen Regeln bestimmen den Sinn des Satzes; und ob eine Wortzusammenstellung Sinn hat oder nicht.

¹Man könnte sagen: „Wie mach ich’s denn, um ein Wort immer sinnvoll² anzuwenden, schau ich immer in der Grammatik nach? Nein, daß ich etwas meine – was ich meine, hindert mich Unsinn zu sagen.“ Aber was meine ich denn? Ich sage: ich rede vom Teilen eines Apfels, aber nicht vom Teilen der Farbe Rot, weil ich beim „Teilen eines Apfels“ mir etwas denken kann, etwas vorstellen, etwas wollen kann; beim Ausdruck „Teilen einer Farbe“ nicht. Oder ist es so,³ daß man bei diesem Wort nur noch keine Wirkung auf andere Menschen beobachtet hat?! Richtiger wäre es zu sagen daß ich mir bei den Worten „Teilen eines A.“ etwas denke, vorstelle, will; beim Ausdruck Teilen der Farbe rot nicht.

Wie mach ich’s denn, etwas mit ihm meinen? Ich stelle mir wohl etwas bei meinen Worten vor,⁴ will etwas mit ihnen,⁵ treibe etwas mit ihnen,⁶ kurz verwende sie in einem Sprachspiel.

Ich brauche das Wort zu einem Zweck & darum nicht unsinnig.

78v ⁷Was machen wir nun wenn wir der Wortgruppe „ich teile rot“ einen Sinn geben? Ja wir könnten doch ganz verschiedenes aus ihr machen: Einen Satz der Arithmetik, einen Ausruf, einen Erfahrungssatz;⁸ einen unbewiesenen Satz der Mathematik. Ich habe also eine beliebige Auswahl. Und wie ist die begrenzt? Das ist schwer zu sagen: durch allerlei Arten von Nützlichkeit & auch durch die Formelle Ähnlichkeit der Gebilde mit gewissen primitiven Satzformen & alle diese Grenzen sind verschwimmend.

⁹Der Satz „ich teile rot“ kann doch einen Sinn haben¹⁰ (z.B. kann er dasselbe sagen wie ich teile etwas Rotes). Was, wenn ich fragte: welches¹¹ Wort welcher Fehler macht den Satz zum Unsinn? Warum soll es gerade das Wort „Rot“ sein? Da sieht man daß wir bei diesem Satz auch in seiner unsinnigen Gestalt an ein ganz bestimmtes gramm. System denken.¹² Daher sagen wir auch „rot kann man nicht teilen“ geben also eine Antwort; während man auf eine Wortzusammenstellung wie „ist hat gut“ nichts antworten würde. Denkt man nun aber an ein bestimmtes vorhandenes Sprachspiel¹³ &

1 (M): ü / ✓ (R): ~~∇ S. 75/4~~ ∇ S. 64/1, 2, 3 ✓

2 (V): richtig

3 (V): nicht. Und ist es etwa so,

4 (V): wohl etwas vor,

5 (V): etwas damit,

6 (V): etwas damit,

7 (M): /

8 (V): Erfahrungssatz; ~~etc.~~

9 (M): ü ? /

10 (V): kann ich doch einen Sinn geben

11 (V): fragte, welches

12 (V): an ein ganz bestimmtes System ~~sinnvoller Sätze~~ denken.

13 (O): vorhandenes System ~~Spr~~

19

Grammatical Rules Determine the Sense of a Proposition; and Whether a Combination of Words Makes Sense.

¹One could ask: “How do I go about always using words meaningfully?² Do I consult a grammar each time? No, that I mean something – what I mean – prevents me from talking nonsense.” But what do I mean? I say: I talk about dividing an apple but not about dividing the colour red, because in the case of “dividing an apple” I can think something, can imagine something, can want something; and I can’t with the expression “dividing a colour”. Or is it³ just that one hasn’t yet observed any effect of the latter phrase on other people?! It would be more correct to say that in the case of “dividing an apple” I think, imagine, want something; in the case of “dividing the colour red”, I don’t.

How *do* I go about meaning something by a word? Most likely I imagine something when using my words, want something with them, do something with them, in short use them in a language-game.

I use the word for a purpose and therefore not without a sense.

⁴What do we do to give a sense to the group of words “I divide red”? Well, we could turn it into completely different things: an arithmetical proposition, an exclamation, an empirical proposition,⁵ an unproven mathematical proposition. Thus I have any number of choices. And how is this number limited? That’s difficult to say: by various kinds of usefulness and also by the formal similarity of these creations to certain primitive propositional forms; and all of these boundaries are fluid.

⁶But the sentence “I divide red” *can* have a sense⁷ (for example, it can say the same thing as “I divide something that is red”). What if I were to ask: Which⁸ word, which mistake, turns this sentence into nonsense? Why should it be the word “red” and no other? Here one sees that even when we encounter this sentence in its nonsensical form we think about a very specific grammatical system.⁹ And that’s why we say “You can’t divide red”, i.e. why we give an answer; whereas we would say nothing in response to a combination of words such as “is has good”. But if one thinks

1 (M): r / ✓ (R): ~~∇ p. 75/4~~ ∇ p. 64/1, 2, 3 ✓

2 (V): correctly?

3 (V): And is it

4 (M): /

5 (V): proposition; ~~etc.~~

6 (M): r ? /

7 (V): But I *can* give a sense to the sentence “I divide red”

8 (V): ask, which

9 (V): a very specific system of meaningful sentences.

seine Anwendung dann sagt der Satz daß „ich teile rot“ unsinnig ist vor allem, daß er nicht zu *dem bestimmten* Spiel gehört zu dem er seiner Erscheinung nach zu gehören scheint.

79

78v

„Rot kann man nicht teilen“ heißt also: *Erinnere Dich daran daß Du in dem Spiel zu welchem dieser Satz seiner Form nach zu gehören scheint nichts anzufangen weißt.*¹⁴

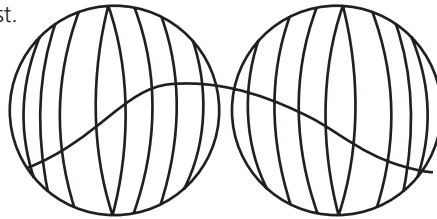
79

¹⁵„Woher weiß ich, daß man¹⁶ Rot nicht teilen kann?“ – Die Frage selbst heißt nichts. Ich möchte sagen: Man¹⁷ muß mit der Unterscheidung von Sinn und Unsinn *anfangen*. Vor ihr ist nichts möglich. Ich kann sie nicht begründen.

¹⁸Welcher Art¹⁹ sind die Regeln, welche sagen, daß die und die Zusammenstellungen von Wörtern keinen Sinn haben? Sind sie von der Art derjenigen *Vorschriften*, welche²⁰ sagen, daß es keine Spielstellung im Schach ist, wenn zwei Figuren auf dem gleichen Feld stehen, oder wenn eine Figur auf der Grenze zwischen zwei Feldern steht, etc.? Diese Sätze sind wieder ähnlich gewissen²¹ Handlungen, wie Wenn man z.B. ein Schachbrett aus einem größeren Stück eines karierten Papiers herausschneidet.²² Sie ziehen eine Grenze. – Was heißt es denn, zu sagen: „diese Wortzusammenstellung heißt nichts“?²³ Von einem Namen kann man sagen „diesen Namen habe ich niemandem gegeben“ und das Namengeben ist eine bestimmte Handlung (wie das Umhängen eines Täfelchens).

80

Denken wir an eine²⁴ Darstellung einer Reise auf der Erde durch eine Linie die in den Proj. der zwei H. gezogen ist. ein Liniestück, das die Grenzkreise verläßt, ist in dieser nichts ist darüber



²⁵Wir können nun sagen:²⁶ auf der Zeichenebene dieser²⁷ Projektionen Darstellung sinnlos. D.h.:²⁸ ausgemacht worden.

79v, 80

²⁹Gesichtsraum und Retina. Es ist, wie wenn man eine Kugel orthogonal auf eine Ebene projiziert, etwa in der Art, wie die beiden Halbkugeln der Erde in einem Atlas dargestellt werden, und nun könnte einer glauben, daß, was auf der Ebene außerhalb der beiden Kugelprojektionen vor sich geht, immerhin noch einer möglichen Ausdehnung dessen entspricht, was sich auf der Kugel befindet. Hier wird eben ein *kompletter Raum* auf einen *Teil* eines andern Raumes projiziert; und analog ist es mit den Grenzen der Sprache im Wörterbuch.³⁰

14 (V): nichts anfangen kannst.

15 (M): ? /

16 (V): ~~ich~~

17 (V): Ich

18 (M): / ✓

19 (V): Art ~~nun~~

20 (V): welche ~~etwa~~

21 (V): wieder wie gewisse

22 (V): wie wenn man etwa ein Schachbrett aus einem größeren Stück karierten Papiers herausschneidet.

23 (O): nichts“.

24 (V): ~~die~~

25 (F): MS 113, S. 30r.

26 (V): Linie in der Projektion der zwei Halbkugeln und daß wir sagen:

27 (V): der

28 (V): sinnlos. Man könnte auch sagen:

29 (M): ? / (R): [Zu: „und auf gleiche Weise . . .“]

30 (V): Sprache in der Grammatik. (R): ~~für S.~~
424 MS2

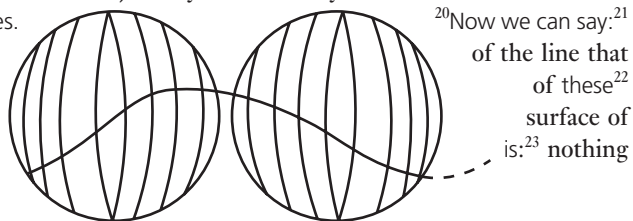
of a particular existing language-game and its use, then the proposition that says “‘I divide red’ is nonsensical” says more than anything else that it doesn’t belong to *the particular* game that, judging from its appearance, it seems to belong to.

Thus “one can’t divide red” means: Remember that you don’t know what to do¹⁰ in the game to which, based on its form, this proposition seems to belong.

¹¹“How do I know that one¹² can’t divide red?” – The question itself means nothing. I’d like to say: One has¹³ to *begin* with the distinction between sense and nonsense. Nothing is possible before that distinction; nor can I justify it.

¹⁴Of what kind¹⁵ are the rules that state that such and such combinations of words make no sense? Are they of a piece with those regulations that¹⁶ say that two pieces on one square, or one piece between two squares, etc., is not a position in chess? These propositions are similar to¹⁷ certain actions – as if, for example, one were to cut a chess board¹⁸ out of a larger piece of graph paper. These propositions draw a boundary. – What does it mean, anyway, to say: “This combination of words means nothing”? Of a name one can say “I haven’t given this name to anyone”, and name-giving is a specific action (like attaching a label).

Let’s think of a¹⁹ representation of a journey on earth by a line that is drawn in the projections of the two hemispheres. In this representation that part extends beyond the boundaries circular projections on the the drawing is senseless. That about it has been agreed upon.



²⁴Visual space and retina. It is like projecting a sphere orthogonally onto a plane, say in the way in which the two hemispheres of the earth are represented in an atlas, and now someone could think that what is going on on the plane outside the two spherical projections corresponds to a possible extension of what is on the sphere. Here it’s simply that a *complete space* is projected onto a *part* of another space; and the boundaries of language in a dictionary²⁵ are analogous to this.²⁶

10 (V): that you cannot do anything

11 (M): ? /

12 (V): †

13 (V): say: I have

14 (M): / ✓

15 (V): kind ~~then~~

16 (V): that ~~perhaps~~

17 (V): are again like

18 (V): as if, for example, one cut a chess board

19 (V): ~~the~~

20 (F): MS 113, p. 30r.

21 (V): a line in the projections of the two hemispheres, and that we say:

22 (V): the

23 (V): One could also say:

24 (M): ? / (R): [To: “and in like manner . . .”]

25 (V): in grammar

26 (R): ~~For p. 124 MS?~~

81 Der Sinn des Satzes, keine *Seele*.

¹Die Methode des Messens, z.B. des räumlichen Messens, verhält sich zu einer bestimmten Messung genau so, wie der Sinn eines Satzes zu seiner Wahr- oder Falschheit.

80v Der Sinn einer Längenangabe wird durch die Beschreibung der Meßmethode erklärt; die Wahrheit der Längenangabe.

81 ²Der Sinn des³ Satzes ist nicht pneumatisch, sondern ist das, was auf die Frage nach der Erklärung des Sinnes zur Antwort kommt. Und – oder – der eine Sinn unterscheidet sich vom andern, wie die Erklärung des einen von der Erklärung des andern. Also auch: der Sinn des einen Satzes unterscheidet sich vom Sinn des andern wie der eine Satz vom andern.

81 ⁴Welche Rolle der Satz im Kalkül spielt, das ist sein Sinn.

⁵Der Sinn (also) nicht *hinter* ihm (wie der psychische Vorgang der Vorstellung etc.).

⁶Was heißt es denn: „entdecken, daß ein Satz keinen Sinn hat“?

Und was heißt das: „wenn ich etwas damit meine, muß es doch Sinn haben“? Worin besteht dieses Meinen?

„Wenn ich etwas damit meine. . .“ – wenn ich *was* damit meine?!⁷

82 ⁸Was heißt es: „Wenn ich mir etwas dabei vorstellen kann, muß es doch Sinn haben“?

Wenn ich mir *was* dabei vorstellen kann? Das, was ich sagte?⁹ – Dann heißt dieser Satz nichts.¹⁰ – Und „Etwas“? Das würde heißen: Wenn ich die Worte auf diese Weise benützen kann, dann haben sie Sinn. Oder eigentlich: wenn ich sie zum Kalkulieren benütze, dann haben sie Sinn.

Die Antwort wäre: wenn der Sinn ist daß ich mir etwas vorstelle. Aber es heißt wohl auch: Wenn ich mir ein Bild danach machen kann so garantiert das mir andere Anwendungen.

¹¹Man könnte auch so fragen: Ist der ganze Satz nur ein unartikuliertes Zeichen, in dem ich erst nachträglich Ähnlichkeiten mit anderen Sätzen erkenne?

1 (M):] ✓ 2 (R): ∇ S. 75/1 siehe § 25 S. 93

2 (M): ? / ✓ 3

3 (V): eines

4 (M): ? / ✓ 1

5 (M): /// ✓ 5

6 (M): / ✓

7 (R): [dazu S. 75/1] ✓

8 (M): ü / ✓

9 (V): sagte?

10 (V): sagte? – Das heißt nichts.

11 (M):] ✓

20

The Sense of a Proposition not a *Soul*.

¹The method of measuring, e.g. of spatial measuring, is related to a particular measurement in exactly the same way as the sense of a proposition is to its truth or falsity.

The sense of a statement of length is given by describing the method of measuring; the truth of a statement of length.

²The sense of the³ proposition isn't soul-like; it's what is given as an answer to a request for an explanation of the sense. And – or – one sense differs from the other as does the explanation of the one from the explanation of the other. Therefore: the sense of one proposition differs from the sense of another as does the one proposition from the other.

⁴Whatever role the proposition plays in the calculus, that is its sense.

⁵(Therefore) its sense is not located *behind* it (like the psychological process of imagination, etc.).

⁶What *does* “Discovering that a proposition has no sense” mean?

And what does this mean: “If I mean something by it, then it must have sense”? What does this meaning something consist in?

“If I mean something by it, . . .”. – if I mean *what* by it?!⁷

⁸What does this mean: “If I can imagine something by it, then it must have a sense”?

If I can imagine *what* by it? What I said?⁹ – Then this proposition means¹⁰ nothing. – And “something”? That would mean: If I can use the words in this way, then they have a sense. Or actually: If I use them to calculate, then they have a sense.

The answer would be: If the sense is that I am picturing something, then the proposition does have sense. But I suppose it also means: If I can use it as a model for a picture, then this guarantees that I can apply it in other ways.

¹¹One could also put the question like this: Is the entire sentence nothing but an inarticulate sign in which only later do I discover similarities with other sentences?

1 (M): ∫ ✓ 2 (R): ∀ p. 75/1 see §25 p. 93 7 (R): [To p. 75/1] ✓
2 (M): ? / ✓ 3 8 (M): r / ✓
3 (V): a 9 (V): say?
4 (M): ? / ✓ 1 10 (V): – That means
5 (M): /// ✓ 5 11 (M): ∫ ✓
6 (M): / ✓

81v Als¹² wäre er eine Flüssigkeit deren chemische Analyse uns erst¹³ gemeinsame Bestandteile mit anderen Flüssigkeiten erkennen läßt.¹⁴

¹⁵Ja, man könnte unsere Frage in einer sehr elementaren Form stellen: Warum eine Sprache nicht mit bloß einem Wort auskommen könnte,¹⁶ da es ja doch vorkommt, daß ein Wort (in einer Sprache) mehrere Bedeutungen hat. (Warum also nicht alle?)

12 (V): ~~Wie~~ Als

13 (V): Analyse erst

14 (V₁): mit anderen Substanzen aufzeigt. (V₂):

82 Das wäre etwa so, wenn jeder Satz eine Droge

// Medizin // mit bestimmter Wirkung wäre

und man käme erst nachträglich durch Analyse darauf, daß zwei Medizinen gewisse Ingredientien mit einander gemein hätten.

15 (M): ? / ///

16 (V): Wort möglich ist,

As if it were a liquid that required chemical analysis for us to¹² recognize¹³ the ingredients it has in common with other liquids.¹⁴

¹⁵Indeed, one could ask our question in a very elementary form: Why couldn't a language make do with only one word,¹⁶ since a word (in a language) often has several meanings? (So why not all of them?)

12 (V): analysis to

13 (V): show

14 (V): That would be similar to every proposition being a drug // medicine // with a particular effect, and our not discovering that two

medicines had certain ingredients in common until we carried out an analysis.

15 (M): ? / // /

16 (V): form: Why isn't a language with only one word possible,

83 Ähnlichkeit von Satz und Bild.

82v ¹In welchem Sinne kann ich sagen, der Satz sei ein Bild? Wenn ich darüber denke, möchte ich sagen: er muß ein Bild sein, damit er mir zeigen kann, was ich tun soll, damit ich mich nach ihm richten kann. Aber dann willst Du also bloß sagen,² daß Du Dich nach dem Satz richtest in demselben Sinne, in dem Du Dich nach einem Bild richtest. Das Bild ist eine Beschreibung.

83 ³Ist jedes Bild ein Satz? Und was heißt es, etwa zu sagen, daß jedes als ein Satz gebraucht werden kann?

⁴Ich kann die Beschreibung des Gartens in ein gemaltes Bild, das Bild in eine Beschreibung übersetzen.

⁵Zu sagen, daß der Satz ein Bild ist, hebt gewisse Züge in der Grammatik des Wortes „Satz“ hervor.

⁶Das Denken ist ganz dem Zeichnen⁷ von Bildern zu vergleichen.

84 Man kann aber auch sagen: Das Denken ist (wesentlich) mit keinem Vorgang zu vergleichen, und was wie ein Vergleichsobjekt scheint, ist in Wirklichkeit ein Beispiel.

⁸Wenn ich den Satz mit einem Maßstab verglichen habe, so habe ich, strenggenommen, nur einen Satz, der mit Hilfe eines Maßstabes eine Länge aussagt, als Beispiel eines Satzes herangezogen.⁹

¹⁰Wenn man die Sätze als Vorschriften auffaßt, um Modelle zu bilden, wird ihre Bildhaftigkeit noch deutlicher.

¹¹Die Sprache muß von der Mannigfaltigkeit eines Stellwerks sein, das die Handlungen veranlaßt, die ihren Sätzen entsprechen.

¹²Die Übereinstimmung von Satz und Wirklichkeit ist der Übereinstimmung zwischen Bild und Abgebildetem nur so weit ähnlich, wie der Übereinstimmung zwischen einem Erinnerungsbild und dem gegenwärtigen Gegenstand.

¹³Der Satz ist der Tatsache so ähnlich wie das Zeichen „5“ dem Zeichen „3 + 2“. Und das gemalte Bild der Tatsache, wie „| | | |“ dem Zeichen „| + | |“.

1 (R): \forall § 43 S. 189/1 ✓ & S 188v ✓ ~~§ 5. 289/4, 2~~;
S. 217/1 ✓ (M): ///

2 (V): Aber, dann willst Du bloß sagen,

3 (M): ///

4 (M): ///

5 (M): vielleicht unnütz / ✓

6 (M): \int ✓

7 (O): Zeichen

8 (M): ✓

9 (V): Maßstabes die Länge eines Gegenstands ~~aussagt~~ beschreibt, als Beispiel für alle Sätze herangezogen.

10 (M): XXX

11 (M): XXX

12 (M): XXX

13 (M): XXX

Similarity of Proposition and Picture.

¹In what sense can I say that a proposition is a picture? If I think about it, I'm inclined to say: It has to be a picture so that it can show me what I am supposed to do, so that I can be guided by it. But² then all you really want to say is that you are guided by the proposition in the same sense in which you are guided by a picture. A picture is a description.

³Is every picture a proposition? And what does it mean to say, for example, that every picture can be used as a proposition?

⁴I can translate the description of a garden into a painted picture, the picture into a description.

⁵Saying that a proposition is a picture emphasizes certain features of the grammar of the word "proposition".

⁶Thinking is comparable in every way to drawing pictures.

But one can also say: (At bottom) thinking can't be compared to any process, and what looks like an object of comparison is really an example.

⁷When I compared a proposition to a yardstick, then strictly speaking all I did was to take a proposition that relies on a yardstick to state a length⁸ and use it as an example of a proposition.⁹

¹⁰If one conceives of propositions as instructions for making models, their picture-like quality becomes even clearer.

¹¹Language has to have the multiple controls of a railway signal tower, arranging for those actions that correspond to its propositions.

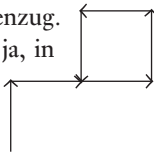
¹²The agreement between proposition and reality resembles the agreement between a picture and what it depicts only in so far as it resembles the agreement between a memory-image and the present object.

¹³A proposition is as similar to a fact as the sign "5" is to the sign "3 + 2". And a painted picture is as similar to a fact as "||||" is to the sign "| + ||".

1 (R): √ § 43 p. 189/1 ✓ & p. 188v ✓ ~~∇ p.~~
~~289/2~~; p. 217/1 ✓ (M): ///
 2 (V): But,
 3 (M): ///
 4 (M): ///
 5 (M): maybe useless / ✓
 6 (M):] ✓

7 (M): ✓
 8 (V): to describe ~~state~~ the length of an object
 9 (V): example for all propositions.
 10 (M): XXX
 11 (M): XXX
 12 (M): XXX
 13 (M): XXX

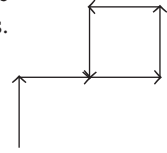
¹⁴Z.B. a, b, c, d bedeuten Bewegungen und zwar $a = \downarrow$, $b = \uparrow$, $c = \rightarrow$, $d = \leftarrow$. Also heißt z.B. bccbda der Linienzug. Nun, ist der Satz „bccbda“¹⁵ nicht ähnlich jenem Linienzug? Offenbar ja, in gewisser Weise. (Ist es nicht genau die Ähnlichkeit einer Photographie und



14 (M): ~~xxx~~

15 (V): „bccbda“

¹⁴For example, let a, b, c, d mean movements, specifically $a = \downarrow$, $b = \uparrow$, $c = \rightarrow$, $d = \leftarrow$. So “bccbda” for instance means this line sequence. Well, isn’t the sentence “bccbda”¹⁵ similar to that line sequence? Obviously, in a certain way, it is. (Isn’t it exactly the similarity of a photograph to the photographed object?)



14 (M): XXX

15 (V): “bccb~~a~~d”

85 Sätze mit Genrebildern verglichen.
 (Verwandt damit:
 Verstehen eines Bildes.)

¹Wie ist es mit den Sätzen, die in Dichtungen vorkommen. Hier kann doch gewiß von einer Verifikation nicht geredet werden und doch haben diese Sätze Sinn. Sie verhalten sich zu den Sätzen, für die es (eine) Verifikation gibt, wie ein Genrebild zu einem Portrait. Und dieses Gleichnis dürfte wirklich die Sache vollständig darstellen.

84v ²Die Beschreibung eines wirklichen Gegenstandes verhält sich zu der Beschreibung in einer Dichtung wie ein Portrait zu einem Genrebild.

85 ³Wenn ich ein Bild anschau, so sagt es mir etwas, auch wenn ich keinen Augenblick glaube (mir einbilde), die Menschen seien wirklich oder es habe wirkliche Menschen gegeben, von denen dies ein verkleinertes Bild sei. „Es sagt mir etwas“ kann aber hier nur heißen, „es bringt eine bestimmte Einstellung in mir hervor“.

Denn wie, wenn ich fragte: „*was* sagt es mir denn?“⁴

⁵Meine Stellung gegen das Bild ist auch keine hypothetische, so daß ich mir etwa sagte „wenn es solche Menschen gäbe, dann . . .“

⁶Wenn ich ein Genrebild ansehe, so halte ich die gemalten Menschen darin nicht für wirkliche Menschen, andererseits ist ihre Ähnlichkeit mit Menschen für das Verständnis des Bildes wesentlich.

86 ⁷Wenn man es für selbstverständlich hält, daß sich der Mensch an seiner Phantasie vergnügt, so bedenke man, daß diese Phantasie nicht wie ein gemaltes Bild oder ein plastisches Modell ist, sondern ein kompliziertes Gebilde aus heterogenen Bestandteilen: Wörtern und Bildern. Man wird dann das Operieren mit Schrift- und Lautzeichen nicht mehr in Gegensatz stellen zu dem Operieren mit „Vorstellungsbildern“ der Ereignisse.

⁸Die Illustration in einem Buch ist dem Buch nichts fremdes, sondern gesellt sich hinzu wie ein verwandter Behelf einem anderen, – wie etwa eine Reibahle dem Bohrer.

(Wenn einen die Häßlichkeit eines Menschen abstößt, so kann sie im Bild, im gemalten, gleichfalls abstoßen, aber auch in der Beschreibung, in den Worten.)⁹

1 (R): ~~vs. 289~~ (M): ? / ✓

2 (M): /

3 (M): ✓

4 (O): denn“?“

5 (M): ///

6 (M): ✓ / ///

7 (M): / ✓

8 (M): ? / ✓

9 (R): ~~vs.~~ S. 390

Propositions Compared to Genre-Paintings. (Related to This: Understanding a Picture.)

¹How about sentences that occur in works of literature? Here one certainly can't speak of verification, and yet these sentences have sense. They relate to propositions for which there is (a) verification as does a genre-painting to a portrait. And this simile probably does portray the matter completely.

²A description of a real object is related to a description in a literary work as a portrait is to a genre-painting.

³If I look at a picture it speaks to me, even if I don't believe (imagine) for a moment that the people in it are real or that there used to be real people of whom this is a scaled-down picture. Here, however, "it speaks to me" can only mean "it begets a certain attitude in me".

For what if I were to ask: "*What* does it say to me?"

⁴Nor is my attitude toward the picture hypothetical, so that I'd say to myself, for instance, "If there were such people, then . . .".

⁵When I look at a genre-painting I don't take the people painted in it for real; on the other hand their similarity to real people is essential to understanding the picture.

⁶If one takes it to be self-evident that human beings take pleasure in their imaginings, then one ought to consider that what is imagined is not like a painted picture or a three-dimensional model, but is a complicated amalgam made up of heterogeneous parts: words and pictures. Then one will no longer set up a contrast between operating with written and phonetic signs and operating with "mental images" of events.

⁷An illustration in a book is nothing foreign to it; rather it goes with it as one tool goes with a related one – as, for example, a hand reamer goes with a drill.

(If someone's ugliness revolts us it can likewise revolt us in a painted picture, but also in a description, in words.)⁸

1 (R): ~~∇ p. 289~~ (M): ? † ∫ ✓

2 (M): /

3 (M): ∫ ✓

4 (M): ///

5 (M): ∫ / ///

6 (M): / ✓

7 (M): ? / ✓

8 (R): ∇ p. 390

23

87

Mit dem Satz scheint die Realität
wesentlich übereinstimmen oder nicht
übereinstimmen zu können.
Er scheint sie zu fordern, sich mit
ihm zu vergleichen.

¹„Meine Erwartung ist so gemacht, daß, was immer kommt, mit ihr übereinstimmen muß, oder nicht.“

²„Der Satz ist als Richter hingestellt und wir fühlen uns vor ihm verantwortlich.“

³Ich sage, die Hand über dem⁴ Tisch haltend, „ich wollte, dieser Tisch wäre so hoch“. Nun ist das Merkwürdige: die Hand über dem Tisch an und für sich drückt gar nichts aus. D.h., sie ist eine Hand über einem Tisch, aber kein Symbol (wie der Pfeil, der etwa die Gehrichtung anzeigen soll, an sich nichts ausdrückt).

⁵„Die Hand zeigt dahin“. Aber in wiefern zeigt sie dahin? Einfach, weil sie sich in einer Richtung verjüngt? (Zeigt ein Nagel in die Wand?) D.h., ist es dasselbe zu sagen „sie zeigt etc.“ und⁶ „sie verjüngt sich in dieser Richtung“?

88

⁷Man kann eine Lehne auf das Maß eines Körpers einstellen, vorbereiten. Dann liegt in dieser Einstellung zwar das eingestellte Maß, aber in keiner Weise, daß ein bestimmter Körper es hat. Ja vor allem liegt darin keine Annahme darüber, ob der Körper dieses Maß hat, oder nicht hat.

⁸Ich sagte, der Satz wäre wie ein Maßstab an die Wirklichkeit angelegt: Und⁹ der Maßstab ist, wie alle¹⁰ Gleichnisse des Satzes, ein besonderer Fall eines Satzes. ¹¹Und auch er bestimmt nichts, solange man nicht mit ihm mißt. Aber Messen ist Vergleichen (und muß heißen, Übersetzen).

¹²Man möchte sagen: Lege den Maßstab an einen Körper an; er sagt nicht, daß der Körper so lang ist. Vielmehr ist er an sich ich möchte sagen¹³ tot und leistet nichts von dem, was

1 (M): / ✓

2 (M): / ✓

3 (M): ? / ///

4 (V): den

5 (M): ? / ///

6 (V): oder

7 (M): ///

8 (M): /// ✓

9 (V): Aber

10 (V): alle richtigen

11 (M): | |

12 (M): / ✓

13 (V): sich gleichsam

Reality Seems Inherently Able Either to Agree with a Proposition or not to Agree with it. A Proposition Seems to Challenge Reality to Compare Itself to it.

¹“My expectation is so constructed that whatever happens has to accord with it, or not.”

²“The proposition has been set up as a judge, and we feel answerable to him.”

³Holding my hand above the table I say, “I wish this table were this high”. Now the remarkable thing is: the hand above the table doesn’t express anything by and of itself. That is, it is a hand above a table, not a symbol (just as an arrow that is supposed to indicate the direction one is to follow expresses nothing by itself).

⁴“The hand is pointing in that direction.” But in what respect is it pointing in that direction? Simply because it gets narrower in one direction? (Does a nail point into the wall?) That is, is it the same thing to say “It is pointing etc.” and⁵ “It gets narrower in this direction”?

⁶One can adjust a back-rest to prepare it for the dimensions of a body. Then, to be sure, these dimensions are contained in this setting, but in no way does the setting indicate that a particular body has them. Indeed, this setting doesn’t contain any supposition as to whether a body has these dimensions or not.

⁷I said that a proposition is laid alongside reality like a yardstick: And⁸ the yardstick, like all⁹ similes for a proposition, is a particular case of a proposition.¹⁰ And like a yardstick, neither does it determine anything, so long as one doesn’t measure with it. But measuring is comparing (and needs to be called translating).

¹¹One wants to say: Lay the yardstick alongside a body; it doesn’t say that the body is such-and-such a length. Rather, I want to say, in and of itself it is dead, and¹² it achieves

1 (M): / ✓

2 (M): / ✓

3 (M): ? / ///

4 (M): ? / ///

5 (V): or

6 (M): ///

7 (M): /// ✓

8 (V): But

9 (V): all ~~correct~~

10 (M): ||

11 (M): / ✓

12 (V): it is ~~so to speak~~ dead and

der Gedanke leistet. Es ist, als hätten wir uns eingebildet, das Wesentliche am lebenden Menschen sei die äußere Gestalt, und hätten nun einen Holzblock von dieser Gestalt hergestellt und sähen mit Enttäuschung den toten Klotz, der auch keine Ähnlichkeit mit dem Leben hat.

¹⁴Man könnte sagen, „die Erwartung ist kein Bild, sie bedient sich nur eines Bildes“. Ich erwarte etwa, daß meine Uhr jetzt auf 7 zeigen wird und drücke dies durch ein Bild der Zeigerstellung aus. Dieses Bild kann ich nun mit der wirklichen Stellung vergleichen; die Erwartung aber nicht.

¹⁵Mein Gedanke ist immer: wenn einer die Erwartung sehen könnte, daß er erkennen¹⁶ müßte, was erwartet wurde.

Aber so ist es ja auch: wer den Ausdruck der Erwartung sieht, sieht was erwartet wird. Und wie könnte man es auf andere Weise, in anderem Sinne sehen?!

¹⁷Gut, ich sage: wenn ich meine Uhr herausziehe, wird sie mir jetzt entweder *dieses* Bild der Zeigerstellung bieten, oder nicht. Aber wie kann ich es ausdrücken, daß ich mich für eine dieser Annahmen entscheide?

Jeder Gedanke ist der Ausdruck eines Gedankens.

¹⁸Ich könnte mein Problem so darstellen: Wenn ich untersuchen wollte, ob die Krönung Napoleons so und so stattgefunden hat, so könnte ich mich dabei, als einer Urkunde, des Bildes bedienen, statt einer Beschreibung. Und es fragt sich nun, ist die ganze Vergleichung der Urkunde mit der Wirklichkeit von der Art, wie der Vergleich der Wirklichkeit mit dem Bild, oder gibt es dabei noch etwas Andres, von anderer Art?

¹⁹Aber womit soll man die Wirklichkeit vergleichen, als²⁰ mit dem Satz? Und was soll man andres tun, als²¹ sie mit ihm zu vergleichen?

²²Wenn man das Beispiel von dem, durch Gebärden mitgeteilten Befehl betrachtet, möchte man einerseits immer sagen: Ja, dieses Beispiel ist eben unvollkommen, die Gebärdensprache zu roh, darum kann sie den beabsichtigten Sinn nicht vollständig ausdrücken²² – aber tatsächlich ist sie so gut wie jede denkbare andere, und erfüllt ihren Zweck so vollständig, wie es überhaupt denkbar ist.

(Es ist eine der wichtigsten Einsichten, daß es keine Verbesserung der Logik gibt.)

88v, 89 ²³Der Befehl die Zahlen 1 bis 4 zu quadrieren²⁴ kommt uns unvollständig vor. Es scheint uns, als wäre etwa nur angedeutet, was nicht ausgesprochen ist.

²⁵Angedeutet aber ist etwas nur insofern, als ein System nicht ausdrücklich, oder unvollkommen festgelegt ist. Wir möchten sagen, es sei uns unvollkommen angedeutet oder, das Zeichen suggeriere nur undeutlich, was wir zu tun hätten. ²⁶Es sei etwa undeutlich in dem Sinn, in welchem wir der Deutlichkeit halber Zeichen ausführlicher geben.²⁷

89v —————> >>>—————>

14 (M): ///

15 (M): / ✓

16 (V): sehen

17 (M): ? / XXXX

18 (M): ///

19 (M): ///

20 (V): vergleichen: als

21 (V): tun: als

22 (M): ///

23 (M): / ✓ (R): S. 92

24 (V): Der Befehl x^2
x 1 2 3 4

25 (M): ✓

26 (M): ///

27 (V): /// Es sei etwa in dem Sinn undeutlich, wie eine Tafel mit der Aufschrift „Links Gehen“ deutlicher wird, wenn zugleich ein Pfeil die Richtung zeigt.

nothing of what thought achieves. It is as if we had imagined that the essential thing about a living human being was his outer shape, that we had fashioned a block of wood into this shape, and then were disappointed to view the dead block that bears no similarity to life.

¹³One could say, “Expectation isn’t a picture, it just uses a picture”. I expect, for example, that my watch will now point to 7, and I express this with a picture of the position of the hands. Now I can compare this picture with the real position; but I can’t compare my expectation with it.

¹⁴My thought is always: if someone could see the expectation he would have to perceive¹⁵ what was expected.

But that *is* the way it is: whoever sees the expression of expectation sees what is being expected. And how could one see it in a different way, in a different sense?!

¹⁶It’s all very well to say: if I pull out my watch, I will either be shown *this* picture of the position of the hands, or I won’t. But how can I express the fact that I am deciding in favour of one of these suppositions?

Every thought is the expression of a thought.

¹⁷I could present my problem this way: if I wanted to investigate whether Napoleon’s coronation took place in such and such a way I could use a picture rather than a description as a document. And now the question is: Is the whole process of comparing the document with reality like comparing reality with the picture, or is something additional, of a different kind, involved?

¹⁸But what should one compare reality to other than a proposition? And what else should one do other than compare it to a proposition?

¹⁹If one looks at the example of a command that is communicated through gestures, one is always inclined on the one hand to say: “All right, this example is just incomplete; the language of gestures is too coarse, so it can’t express the intended sense completely.” – But in fact it is as good as any other conceivable language, and it fulfils its purpose as completely as anyone can conceive.

(It is one of the most important insights that there is no such thing as an improvement upon logic.)

²⁰The command to square the numbers 1 to 4²¹ strikes us as incomplete. It seems to us that something not stated is perhaps only hinted at.

²²But something is hinted at only in so far as a system is not expressly established, or is so incompletely. We’d like to say that what we’re to do is incompletely suggested to us or that the sign only vaguely suggests it. ²³That the sign is vague in the sense in which we might give more detailed signs for the sake of clarity.²⁴ \longrightarrow $\gg\longrightarrow$

13 (M): ///
 14 (M): / ✓
 15 (V): see
 16 (M): ? / ××××
 17 (M): ///
 18 (M): ///
 19 (M): ////
 20 (M): / ✓ (R): p. 29

21 (V): The command x^2
 x^2
 22 (M): ✓
 23 (M): ///
 24 (V): /// sense in which a sign saying “keep left” becomes clearer if at the same time an arrow points in that direction.

90 ²⁸Aber für uns ist der Befehl deutlich, der unzweideutig ist; und einen deutlicheren gibt es nicht.

²⁹Eindeutig aber kann er nur werden, dadurch, daß in dem System von Befehlen eine Unterscheidung gemacht wird, die, wenn sie fehlt, eben die Zweideutigkeit hervorruft. (Wenn also das System die richtige Mannigfaltigkeit erhält.)

³⁰Was, in der Logik, nicht nötig ist, ist auch nicht von Nutzen.³¹

Was nicht nötig ist, ist überflüssig.

³²Die Unbeholfenheit, mit der das Zeichen wie ein Stummer durch allerlei suggestive Gebärden sich verständlich zu machen sucht, – sie verschwindet, wenn wir erkennen, daß das Wesentliche am Zeichen das System ist, dem es zugehört und sein übriger Inhalt wegfällt.

Man möchte sagen nur der *Gedanke* kann es *ganz sagen*, das Zeichen³³ nicht.

28 (M): ? / ✓

29 (M): ///

30 (M): √ ✓

31 (V): nötig ist, *hilft* auch nicht.

32 (M): ? / ✓

33 (V): *sagen*, ~~der~~ das Zeichen

²⁵But for us a command that is unambiguous is clear; and there is no clearer one.

²⁶But a command can become unambiguous only if the system of commands makes a distinction which, when it is lacking, produces ambiguity. (That is, when the system is endowed with the right degree of multiplicity.)

²⁷What isn't necessary in logic isn't useful.²⁸

What isn't necessary is superfluous.

²⁹The clumsiness with which a sign seeks to make itself understood, like someone who is mute, through all sorts of suggestive gestures – this vanishes when we recognize that the essential thing about a sign is the system to which it belongs and that the rest of its content is unimportant.

One would like to say, only a *thought* can say it *completely*, not a sign.

25 (M): ? / ✓

26 (M): ///

27 (M):] ✓

28 (V): isn't *helpful*.

29 (M): ? / ✓

91 Das Symbol (der Gedanke), scheint als solches unbefriedigt zu sein.

Der Wunsch scheint schon zu wissen was ihn erfüllen wird oder würde, der Satz¹ was ihn wahr macht auch wenn es gar nicht da ist! Woher dieses *Bestimmen*, dessen, was noch nicht da ist? – dieses despotische Verfügen?²

Und woher diese seltsame Sinnestäuschung? Wir sagen der Satz sagt etwas, der Wunsch wünscht der Befehl befiehlt³ etwas.⁴ Aber wie benützen⁵ wir denn diese Aussagen, wann benützen wir sie in welchem weitem Zusammenhang? Was ist es, was ein Satz sagt, was setzen wir statt dem „etwas“ ein? Dieser Satz sagt: daß . . . & nun folgt ein weiterer Satz.⁶

„Der Satz sagt etwas“ darauf ist die Ergänzung entweder die Frage „Was?“ & ein anderer Satz – oder „sagt etwas“ ist gar keine⁷ Variable, heißt nicht: sagt⁸ dies, oder jenes.⁹

90v Wir sagen:¹⁰ Der Befehl befiehlt¹¹ *dies*, & tun es; aber auch „der Befehl befiehlt dies: ich soll¹² das & das tun;

Wir übersetzen ihn einmal in¹³ einen andern Satz, einmal in¹⁴ eine Demonstration & einmal¹⁵ in die Tat.

Ja er befiehlt¹⁶ ja schon – möchte ich sagen – daß ich das tun soll! Aber was ist denn das *das*? Ich werde von der Form: „Er befiehlt¹⁷ *das*“ hypnotisiert.

„Der Befehl befiehlt¹⁸ seine Befolgung“. Ja also kennt er seine Befolgung schon ehe sie *da* ist! – Aber der Satz ist ja nur ein grammatischer über die Worte „Befehl“ & „Befolgung“. Er sagt: Wenn ein Befehl lautet „Tue das & das“ dann nennt man „das & das tun“ das Befolgen dieses¹⁹ Befehls. Jener Satz ist von der Art grammatikalischer Sätze wie: Der Hund hat „Beine“ der Hase „Läufe“.²⁰

91 ²¹Jedes Symbol scheint als solches etwas offen zu lassen.

²²Der Plan ist als Plan etwas Unbefriedigtes. (Wie der Wunsch, die Erwartung, die Vermutung u.s.f.)

-
- | | |
|---|--|
| 1 (V): Gedanke | 12 (V): dies: Da sollst |
| 2 (V): Verlangen? | 13 (V): ihn in |
| 3 (O): befiehlt | 14 (V): Satz, in |
| 4 (V): der Wunsch wünscht etwas. | 15 (V): Demonstration, oder |
| 5 (V): verwenden | 16 (O): befiehlt |
| 6 (V): Ausdruck. | 17 (O): befiehlt |
| 7 (V): ist keine | 18 (O): befiehlt |
| 8 (V): nicht: „sagt | 19 (V): tun“ die Befolgung des |
| 9 (V): Satz – oder es hieß man könnte dafür setzen „der Satz sagt“. | 20 (V): hat einen „Schwanz“ der Fuchs eine „Rute“. |
| 10 (V): sagen auch: | 21 (M): / ✓ (R): ✗ S. 163/5 |
| 11 (O): befiehlt | 22 (M): / ✓ – u. s. f.) |

24

A Symbol (a Thought) as Such Seems to be Unfulfilled.

A wish seems already to know what will or would fulfil it, a proposition¹ what makes it true, even when it isn't here! Whence this *determining* of what isn't yet here? – this *despotic dictate*?²

And where does this strange illusion come from? We say a proposition says something, a wish wishes, a command commands something.³ But how do we use these statements, when do we use them, and in what larger context? *What* is it that a proposition says, what do we substitute for the "something"? This proposition says that . . . , and now an additional proposition⁴ follows.

"The proposition says something"; the follow-up to this is either the question "What?" and another proposition – or else "says something" is not a variable at all,⁵ and does not mean: says⁶ this or that.⁷

We⁸ say: the command commands *this*, and we do it; but also "The command commands this: I'm⁹ supposed to do this and that".

At times we translate it into another proposition, at other times into¹⁰ a demonstration, and at still others into¹¹ an action.

Indeed, I'd like to say, the command does command that I am supposed to do that! But what is the *that*? I'm hypnotized by the form: "It commands *that*".

"The command commands that it be carried out." So it already knows how it is to be carried out even before it *happens!* – But this sentence is only a grammatical one about the words "command" and "carry out". It says: If a command says "Do such-and-such" then we call "doing such-and-such" the carrying out of this command. Our initial sentence resembles grammatical sentences such as: "A dog has 'paws', a rabbit 'feet'".¹²

¹³By itself every symbol seems to leave something open.

¹⁴A plan as such is something unsatisfied. (As is a wish, an expectation, a conjecture, etc.)

1 (V): a thought

2 (V): decree?

3 (V): something, a wish wishes something.

4 (V): expression

5 (V): is no variable,

6 (V): "~~says~~"

7 (V): proposition – or it meant that one could replace it with "the proposition says".

8 (V): We ~~also~~

9 (V): ~~You're~~

10 (V): proposition in

11 (V): demonstration, or into

12 (V): "A dog has a 'tail', a fox a 'brush'."

13 (M): / ✓ (R): ~~✓ p. 163/5~~

14 (M): / ✓ – etc.)

90v Und hier meine ich, die Erwartung ist unbefriedigt weil sie die Erwartung von etwas ist;²³ der Glaube, die Meinung unbefriedigt weil sie die Meinung ist daß etwas der Fall ist, etwas Wirkliches, etwas außerhalb des Vorgangs²⁴ der Meinung.

91 ²⁵Ich möchte manchmal mein Gefühl dem Plan gegenüber als eine Innervation bezeichnen. Aber auch die Innervation an sich ist nicht unbefriedigt, ergänzungsbedürftig.

²⁶In wiefern kann man den Wunsch als solchen, die Erwartung „unbefriedigt“ nennen? Was ist das Vorbild²⁷ der Unbefriedigung? Ist es der leere Hohlraum (in den etwas hineinpaßt)? Und würde man von einem leeren Raum sagen, er sei unbefriedigt? Wäre *das* nicht auch eine Metapher? Ist es nicht ein gewisses Gefühl, das wir Unbefriedigung nennen? Etwa der Hunger. Aber der Hunger enthält nicht das Bild seiner Befriedigung.

²⁸Die Hohlform ist nur unbefriedigt in dem System, in dem auch die Vollform vorkommt.²⁹

92 ³⁰Ich meine, man kann das Wort „unbefriedigt“ nicht schlechtweg von einer Tatsache gebrauchen. Es kann aber in einem System eine Tatsache beschreiben helfen. Ich könnte z.B. festsetzen, daß ich den Hohlzylinder „den unbefriedigten Zylinder“ nennen werde, den entsprechenden Vollzylinder, *seine* Befriedigung.

³¹Aber man kann nicht sagen, daß der Wunsch „p möge der Fall sein“, durch die Tatsache p befriedigt wird, es sei denn als Zeichenregel: |der Wunsch p möge der Fall sein| = |der Wunsch, der durch die Tatsache p befriedigt wird|. ³²

91v Man könnte auch so sagen: Dieser Befehl befiehlt³³ *dies* (& tut es). – Aber hat er dies nicht schon früher befohlen? (Er hat doch früher nichts³⁴ anderes befohlen!) Also hat er diese Tat befohlen, ehe es sie noch *gab*. Inwiefern hat er aber früher dies befohlen? – Ist³⁵ denn Befehlen eine Tätigkeit, die er auch früher ausübte? Und wie hat er sie ausgeübt? Der Befehl³⁶ befiehlt³⁷ das & das enthält ja die Zeit gar nicht sowenig wie 2 + 2 ist 4.

Ich habe auch früher *dies* gemeint enthält wohl die Zeit. Aber was ist denn hier das Kriterium dafür daß ich *dies* meinte.³⁸ Heißt es ich habe schon früher den Dieb gehangen ehe ich ihn noch hatte.

Wie kann man meinen was noch nicht geschehen ist. Worin bestand aber *dies* Meinen damals. Was nennen wir also jetzt *dies* was wir jetzt tun gemeint³⁹ zu haben? Worin besteht die Identität: *dasselbe* jetzt *tun*, was ich früher *meinte*. Worin besteht es: dieselbe Speise jetzt *zubereiten*, die⁴⁰ ich später esse.

Ja ich meine ja jetzt schon das was ich später ausführe.⁴¹ Ja manchmal⁴² meine ich jetzt dasselbe; – *manchmal*⁴³ *etwas anderes!*⁴⁴ In welchem Falle sagen wir das eine, in welchem Falle das andre? In

23 (V): meine ich: „die Erwartung ist . . . Erwartung von etwas ist“;

24 (O): außerhalb des Vorgang (V): Wirkliches, etwas außer dem Vorgang

25 (M): ✓

26 (M): ? / ✓

27 (V): Urbild

28 (M): ? / ✓

29 (V): in dem auch die entsprechende Vollform vorkommt.

30 (M): / ✓

31 (M): ? / ✓

32 (R): ∇ S. 17/5, 18/1,2 ✓, dazu erstes MS S. 430 139/3 = S. 89/4 ✓ & S. 90/4 ✓

33 (O): befiehlt

34 (V): hat doch nichts

35 (V): befohlen? – ~~was~~ ist

36 (V): ausgeübt? ~~Es~~ Der befehl

37 (O): befiehlt

38 (V): meine.

39 (V): *dies* gemeint

40 (V): es: *dasselbe* jetzt kochen, ~~was~~

41 (V): tue.

42 (V): *manchmal*

43 (O): dasselbe; ~~Man~~ *manchmal*

44 (V): *anderes*:

And here I mean: an expectation is unsatisfied because it is an expectation of something,¹⁵ a belief, an opinion is unsatisfied because it is the opinion that something is the case, something real, something external to the occurrence of the opinion.

¹⁶Sometimes I am inclined to call my feeling towards a plan an innervation. But an innervation as such is not unfulfilled, in need of supplementation.

¹⁷In what respect can we call a wish as such, an expectation, “unsatisfied”? What is the model¹⁸ for non-satisfaction? Is it an empty cavity (into which something fits)? And would one say of an empty space that it was unsatisfied? Wouldn't *that* be a metaphor too? Isn't it a certain feeling that we call non-satisfaction? Say hunger. But hunger doesn't contain the image of its satisfaction.

¹⁹A hollow form is only unsatisfied in a system that also contains the solid²⁰ form.

²¹I'm of the opinion that one can't simply apply the word “unsatisfied” to a fact. But it can help describe a fact within a system. I could stipulate for example that I will call the hollow cylinder “the unsatisfied cylinder”, and the corresponding solid cylinder *its* satisfaction.

²²But we can't say that the wish that “p be the case” is satisfied by the fact p, except as a rule for symbols: |the wish that p be the case| = |the wish that is satisfied by the fact p|. ²³

One could also put it this way: This command commands *this* (and one does it). – But didn't it command this earlier? (Certainly it didn't command anything different earlier!²⁴). So it commanded that this deed be done before it *existed*. But in what way did it command this earlier? – Is commanding perhaps an activity that it also carried out earlier? And how did it carry it out? “A command commands this and that” doesn't contain time, any more than $2 + 2 = 4$.

“I also meant *this* earlier” does contain time, to be sure. But what is the criterion here for my having meant²⁵ *this*? Does it mean that I hanged the thief before I caught him?

How can one mean what hasn't happened yet? But what did meaning *this* consist in back then? So what do we now call: to have meant precisely *what*²⁶ we're now doing? In what does the identity consist between *doing the same thing* now that I *meant* earlier? In what does this consist: *to prepare* the same food now that²⁷ I *will eat* later?

I mean now what I carry out²⁸ later. Well, sometimes²⁹ I mean the same thing now, but *sometimes something else!*³⁰ In which case do we say the one thing, in which case the other? In which

15 (V): mean: “an expectation is . . . something”;

16 (M): ✓

17 (M): ? / ✓

18 (V): archetype

19 (M): ? / ✓

20 (V): contains the corresponding solid

21 (M): / ✓

22 (M): ? / ✓

23 (R): \forall p. 17/5, 18/1,2 ✓, to first MS p. ~~430~~ 139/3 = p. 89/4 ✓ & p. 90/4 ✓

24 (V): different!

25 (V): my meaning

26 (V): to have meant *this*?

27 (V): to cook *the same thing* now ~~that~~

28 (V): I do

29 (V): *sometimes*

30 (V): *else*:

92 welchem⁴⁵ Falle sage ich, daß ich etwas *anderes* getan habe als ich meinte – & in welchem dasselbe. Und wenn der Befehl *nicht* befolgt wird, – wo ist dann der Schatten seiner⁴⁶ Befolgg. den Du zu sehen meintest, weil Dir die Form vorschwebte: Er befiehlt⁴⁷ *das & das*. *Wie macht man es denn: das & das*⁴⁸ zu befehlen? Man sagt: man befiehlt:⁴⁹ den Befehl und auch man befiehlt:⁵⁰ die Handlung (die Befolgung).

Man möchte sagen: ich befehle mehr als die Worte & weniger als die Handlung.

Wir identifizieren den Satz „daß . . .“ mit der Handlung.

Er hat *das* getan was ich ihm befohlen habe – Warum soll man hier nicht⁵¹ sagen es sei eine Identität der Handlung⁵² & der WORTE?! Wozu soll ich⁵³ einen Schatten zwischen die beiden stellen? Wir *haben* ja eine Projektionsmethode. Nur ist es eine andere Identität: Ich habe *das* getan⁵⁴ was er getan hat & ich habe getan *das* was⁵⁵ er befohlen hat.

45 (O): welche

46 (V): der

47 (O): befiehlt

48 (V): *denn: etwas*

49 (O): befiehlt:

50 (O): befiehlt:

51 (V): nicht ~~von einer~~

52 (V): es ~~se~~ sei eine *Identität* der *Handlung*

53 (V): ich ~~mich~~

54 (V): Ich habe getan

55 (V): habe getan was

case do I say that I did something *other* than what I meant – and in which case the same thing? And if the command is *not* obeyed, then where is the shadow of its³¹ observance that you thought you saw because the form “he commands *this and that*” was in your mind? *How does one go about: commanding this and that?*³² We say: We command the command, and also: We command the action (the carrying out of the command).

One wants to say: I command more than the words and less than the action.

We identify the proposition “that . . .” with the action.

He did *what* I ordered him to do – Why shouldn’t one say here³³ that there is an identity of action³⁴ and WORDS?! Why should I³⁵ place a shadow between these two? After all, we do *have* a method of projection. Except that there’s a difference in identity between: I did what he did and I did what he commanded.

31 (V): the

32 (V): commanding *something*?

33 (V): here ~~of a~~

34 (V): *identity of action*

35 (V): I ~~me~~

- 93 Ein Satz ist ein Zeichen in einem System von Zeichen. Er ist eine Zeichenverbindung von mehreren möglichen und im Gegensatz zu den andern möglichen. Gleichsam eine Zeigerstellung im Gegensatz zu andern möglichen.¹

²Einen Satz verstehen heißt, eine Sprache verstehen.

³Jeder Satz einer Sprache hat nur Sinn im Gegensatz zu anderen Wortzusammenstellungen derselben Sprache.

⁴Wenn ein Satz nicht *eine* mögliche Verbindung unter anderen wäre, so hätte er keine Funktion.

D.h.: Wenn eine Beschreibung⁵ nicht das Ergebnis einer Entscheidung wäre, hätte sie⁶ nichts zu sagen.

- 92v Sprache die nur aus einem Signal besteht das, immer gegeben wird, wenn eine bestimmte Handlung vollführt werden soll.
Abrichten.

- 93 ⁷Denken ist Pläne machen.
Wenn Du Pläne machst, so machst Du *einen* Plan im Gegensatz zu⁸ andern Plänen.

⁹↑ im Gegensatz zu ↗ ist ein anderes Zeichen als ↑ im Gegensatz zu ↑.

- 94 ¹⁰„Geh so → nicht so ↗“ hat nur Sinn, wenn es die Richtung ist, die dem Pfeil hier wesentlich ist, und nicht, etwa nur die Länge.

1 (M): ✓ ||

2 (M): ? / ✓ (R): siehe S. 196

Wort nur im Satzzusammenhang Bedeutg.
Satz komplex. siehe S. 82/2 auch §23 S. 87 ff
∀ S. 63/6 ✓

3 (M): ∫ ✓

4 (M): ? /

5 (V): Wenn ein Satz

6 (V): er

7 (M): ✓ ////

8 (V): Plan zum Unterschied von

9 (M): /// ✓

10 (M): /// (F): MS 110, S. 76

25

A Sentence is a Sign within a System of Signs. It is a Combination of Signs from among Several Possible Ones and in Contrast to Other Possible Ones. One Position of the Pointer, as it Were, in Contrast to Other Possible Ones.¹

²To understand a sentence means to understand a language.

³Each sentence of a language has sense only in contrast to other combinations of words in the same language.

⁴If a sentence were not *one* possible combination among others, then it wouldn't have any function.

That is to say: If a description⁵ were not the result of a decision, it would have nothing to say.

A language consisting of just one signal that is always given when a particular action is to be carried out.

Animal-training.

⁶To think is to make plans.

When you make plans, you make *one* plan in contrast to⁷ others.

⁸↑ in contrast to ↗ is a different sign from ↑ in contrast to ⤴.

⁹“Go this way → – not this ↗” makes sense only if it is the direction that is essential to the arrow and not, say, just its length.

1 (M): ✓ ||

2 (M): ? / ✓ (R): see p. 196

A word has meaning only in the context of a sentence.

Sentence complex.

See p. 82/2 also § 23 pp. 87ff.

∇ p. 63/6 ✓

3 (M): ∫ ✓

4 (M): ? /

5 (V): a proposition

6 (M): ✓ ////

7 (V): plan as opposed to

8 (M): /// ✓

9 (M): /// (F): MS 110, p. 76.

¹¹Man muß wissen, worauf im Zeichen man zu sehen hat. Etwa: auf welcher Ziffer der Zeiger steht, nicht darauf, wie lang er ist.

¹²„Geh' in der Richtung, in der der Zeiger zeigt“.

„Geh' so viele Meter in der Sekunde, als der Pfeil cm lang ist“.

„Mach' so viele Schritte, als ich Pfeile zeichne“.

„Zeichne diesen Pfeil nach“.

Für jeden dieser Befehle kann der gleiche Pfeil stehen. –

¹³„Ich muß auf die Länge achten“, „ich muß auf die Richtung achten“, das heißt schon: auf die Länge im Gegensatz zu anderen, etc.

¹⁴Wie soll ich mich nach der Uhr richten? Wie kann ich mich nach diesem Bild ¹⁵richten? (Wie nach jedem andern.)



¹⁶Es zeigt mir jemand zum ersten Mal eine Uhr und will, daß ich mich nach ihr richte. Ich frage nun: worauf soll ich bei diesem Ding achten. Und er sagt: auf die Stellung der Zeiger.

¹⁷Natürlich, das Zeichen eines Systems bezeichnet es nur im Gegensatz zu anderen Systemen und setzt selbst ein System voraus. (Interne Relation, die nur besteht, wenn ihre Glieder da sind.)¹⁸

11 (M): ///

12 (M): ? / ✓ ////

13 (M): ///

14 (M): ///

15 (F): MS 110, S. 138.

16 (M): ///

17 (M): ///

18 (R): ∀ S. 3/1

¹⁰One has to know what one is to look for in a sign. For example: what number the hand is on, and not how long it is.

¹¹“Go in the direction in which the arrow is pointing.”

“Walk as many metres per second as the length of the arrow in centimetres.”

“Walk as many steps as I draw arrows.”

“Copy this arrow.”

The same arrow can be used in each of these commands. —

¹²“I have to pay attention to the length”, “I have to pay attention to the direction” already means: to that length in contrast to other lengths, etc.

¹³How am I to be guided by a clock? How can I *be guided* by this picture?

¹⁴(As with any other.)



¹⁵Someone shows me a clock for the first time and wants me to be guided by it. So I ask: What about this thing should I pay attention to? And he says: To the position of the hands.

¹⁶Of course a sign in a system only signifies that system in contrast to others, and itself presupposes a system. (An internal relation that exists only if its components are present.)¹⁷

10 (M): ///

11 (M): ? / ✓ ////

12 (M): ///

13 (M): ///

14 (F): MS 110, p. 138.

15 (M): ///

16 (M): ///

17 (R): ∀ p. 3/1

Sich vorstellen können, „wie es wäre“, als Kriterium dafür, daß ein Satz Sinn hat.

¹Was heißt es, wenn man sagt: „ich kann mir das Gegenteil davon nicht vorstellen“, oder „wie wäre es denn, wenn's anders wäre“; z.B. wenn jemand gesagt hat, daß meine Vorstellungen privat seien, oder daß nur ich selbst wissen kann, ob ich Schmerzen empfinde, und dergleichen.

²Wenn ich mir nicht vorstellen kann, wie es anders wäre, so kann ich mir auch nicht vorstellen, wie es *so* sein kann.

„Ich kann mir nicht vorstellen“ heißt nämlich hier nicht, was es im Satz „ich kann mir keinen Totenkopf vorstellen“ heißt. Ich will damit nicht auf eine mangelnde Vorstellungskraft deuten.

³Überlege: „Ich habe⁴ tatsächlich nie gesehen, daß ein schwarzer Fleck nach und nach immer heller wird, bis er weiß ist, und dann immer rötlicher, bis er rot ist; aber ich weiß, daß es möglich ist, weil ich es mir vorstellen kann. D.h., ich operiere mit meinen Vorstellungen im Raume der Farben und tue mit ihnen, was mit den Farben möglich wäre.“ ((Siehe „Logische Möglichkeit“..))

96 ⁵Es scheint, als könnte man sagen:⁶ Die Wortsprache läßt unsinnige Wortzusammenstellungen⁷ zu, die Sprache der Vorstellung aber nicht unsinnige Vorstellungen. (Natürlich kann das, so wie es da steht, nichts heißen.)

95v Also⁸ die Sprache der Zeichnung auch nicht unsinnige Zeichnungen; – aber so ist es nicht, denn eine Zeichnung kann in demselben Sinne unsinnig sein wie ein „Satz“. Denken wir uns eine Zeichnung nach der Körper modelliert werden sollen⁹ dann hätte z.B. die Zeichnung eines Würfels Sinn aber nicht die eines Sechsecks mit seinen Diagonalen. Und denken wir an das¹⁰ Beispiel vom Einzeichnen einer Reiseroute in die beiden Erdprojektionen.

96 ¹¹Was heißt es denn „entdecken, daß ein Satz keinen Sinn hat“? Oder fragen wir so: Wie kann man denn die Unsinnigkeit eines Satzes (etwa:¹² „dieser Körper ist ausgedehnt“) dadurch bekräftigen, daß man sagt: „Ich kann mir nicht vorstellen, wie es anders wäre“?

1 (M): ✓

2 (M): ü / ✓

3 (M): ? / ✓

4 (V): „Ich habe

5 (M): / ✓ | |

6 (V): man ~~so etwas~~ sagen ~~wie~~:

7 (V): Ausdrücke

8 (V): ~~Aber so ist es nicht~~ Also

9 (V): sollen // ~~Denken wir uns nach~~

10 (V): das ~~sinnlose Stück in der Zeichnung einer~~
Reiseroute

11 (M): / ✓

12 (V): Satzes (etwa):

Being Able to Imagine “What it Would be Like” as a Criterion for a Proposition Having a Sense.

¹What does it mean when one says: “I can’t imagine the opposite of that” or “What would it be like if it were otherwise?”?. For example, when someone has said that my mental images are private or that only I can know whether I am feeling pain, and things like that.

²If I can’t imagine how it would be otherwise then I also can’t imagine how it can be *like this*.

For here “I can’t imagine” doesn’t mean what it means in the sentence “I can’t imagine a skull”. In saying the former, I’m not trying to indicate a lack of imagination.

³Consider: “In fact⁴ I’ve never seen a black spot gradually turning lighter and lighter until it was white, and then turning more and more reddish until it was red; but I know that that is possible, because I can imagine it. That is, using my mental images I operate within the realm of colours and do with them what can be done with colours.” ((Cf. “logical possibility”.)

⁵It seems that one could say:⁶ Word-language allows nonsensical combinations⁷ of words, but the language of imagining doesn’t allow nonsensical mental images. (Of course this can’t mean anything as it stands.)

So⁸ too the language of drawing doesn’t allow nonsensical drawings. – But that’s not so, for a drawing can be nonsensical in the same way as a “proposition”. Let’s imagine a drawing that is to serve as a model for three-dimensional objects;⁹ then a drawing of a cube for instance would make sense, but not one of a hexagon with its diagonals. And let’s consider the example of drawing a route¹⁰ on the two hemispheric projections of the earth.

¹¹What does “to discover that a sentence has no sense” really mean? Or let’s put the question this way: How can one reinforce the senselessness of a sentence (say: “This body is extended”) by saying “I can’t imagine how it could be otherwise”?

1 (M): ✓

2 (M): r / ✓

3 (M): ? / ✓

4 (V): “In fact

5 (M): / ✓ | |

6 (V): say ~~something like~~:

7 (V): expressions

8 (V): ~~But that’s not the way it is~~ So

9 (V): objects; // Let’s imagine in accordance with

10 (V): consider the ~~senseless portion in the drawing of a route~~

11 (M): / ✓

Denn, kann ich etwa versuchen, es mir vorzustellen? Heißt es nicht: Zu sagen, daß ich es mir vorstelle, ist sinnlos? Wie hilft mir dann also diese Umformung von einem Unsinn in einen andern? – Und warum sagt man gerade: „ich kann mir nicht vorstellen, wie es *anders* wäre“? und nicht – was doch auf dasselbe hinauskommt – „ich kann mir nicht vorstellen, wie das wäre“?

Man erkennt scheinbar in dem unsinnigen Satz etwas, wie eine Tautologie, zum Unterschied von einer Kontradiktion. Aber das ist ja auch falsch. – Man sagt gleichsam: „Ja, er¹³ ist ausgedehnt, aber wie könnte es denn anders sein? also, wozu es sagen!“

Es ist dieselbe Tendenz, die uns auf den Satz „dieser Stab hat eine bestimmte Länge“ nicht antworten läßt „Unsinn!“, sondern „Freilich!“.

Was ist aber der Grund (zu) dieser¹⁴ Tendenz? Sie könnte auch so beschrieben werden: wenn wir die beiden Sätze „dieser Stab hat eine Länge“ und seine Verneinung „dieser Stab hat keine Länge“ hören, so sind wir parteiisch und neigen dem ersten Satz zu (statt beide für Unsinn zu erklären).

Der Grund hievon ist aber eine Verwechslung: Wir sehen den ersten Satz verifiziert (und den zweiten falsifiziert) dadurch, „daß der Stab 4m hat“. Und man wird sagen: „und 4m ist doch eine Länge“ und vergißt, daß man hier einen Satz der Grammatik hat.

- 97 ¹⁵Warum sieht man es als Beweis dafür an, daß ein Satz Sinn hat: daß¹⁶ ich mir, was er sagt, vorstellen kann? Ich könnte sagen: Weil ich diese Vorstellung mit einem dem ersten verwandten Satz beschreiben müßte.

¹⁷Könnte ich durch eine Zeichnung darstellen, wie es ist, wenn es sich so verhält, wenn es keinen Sinn hätte, zu sagen „es verhält sich so“?

Zu sagen „ich kann aufzeichnen wie es ist, wenn es sich so verhält“ ist¹⁸ hier eine grammatische Bestimmung über den betrachteten Satz (denn ich will ja nicht sagen, *ich* könne es zeichnen, etwa weil ich zeichnen gelernt habe u.s.w.). Wie, wenn ich sagte: „ist das kein Spiel, da ich doch darin gewinnen und verlieren kann?“ – Nun, wenn das Dein Kriterium eines Spieles ist, dann ist es ein Spiel.

¹⁹„Ich weiß, daß es möglich ist, weil . . .“. Diese Ausdrucksform ist von Fällen hergenommen, wie: „Ich weiß, daß es möglich ist, die Tür mit diesem Schlüssel aufzusperren, weil ich es schon einmal getan habe“. Vermute ich also in *dem* Sinn, daß dieser Farbenübergang möglich sein wird, weil ich mir ihn vorstellen kann?! Muß es nicht vielmehr heißen: der Satz „der Farbenübergang ist möglich“ heißt dasselbe wie der: „ich kann ihn mir vorstellen“, oder: der erste Satz *folgt* aus dem zweiten? – Wie ist es damit: „Das ABC läßt sich laut hersagen, *weil* ich es mir im Geiste vorsagen kann“?

„Ich kann mir vorstellen, wie es wäre“, oder – was wieder ebenso gut ist – : „ich kann es aufzeichnen, wie es wäre, wenn p der Fall ist“ gibt eine *Anwendung* des Satzes. Es sagt etwas über den Kalkül, in welchem wir p verwenden.

13 (V): es
 14 (V): dieser E
 15 (M): / ✓
 16 (V): hat, daß

17 (M): ××××
 18 (O): verhält „ist
 19 (M): ü / ✓

For can I possibly try to imagine it? Doesn't it mean: To say that I am imagining it is senseless? So how then does this transformation from one piece of nonsense into another help me? – And why *does* one say: “I can't imagine how it could be *otherwise*” and not “I can't imagine what that would be like” – which, after all, amounts to the same thing?

Seemingly one discovers something like a tautology, as opposed to a contradiction, in the nonsensical sentence. But that too is false. – One says, as it were, “Yes, it is extended, but how could it be otherwise? So why say it!”

It is the same tendency that causes us to respond to the sentence “This rod is of a certain length” by saying “Certainly!” rather than “Nonsense!”.

But what's the reason for this tendency? It could also be described this way: if we hear the two sentences “This rod has a length” and its denial “This rod has no length”, then we take sides and favour the former (rather than declaring both to be nonsense).

But the reason for this is a confusion: We consider the first sentence verified (and the second falsified) by “The rod has a length of 4 metres”. And we'll say: “After all, 4 metres is a length”, forgetting that what we have here is a grammatical proposition.

¹²Why does one view being able to have a mental image of what a proposition says as proof that it makes sense? I could say: Because I would have to describe this mental image with a proposition that's related to the original.

¹³Could I make a drawing to show what it's like if that's the way it is, if it made no sense to say “That's the way it is”?

To say “I can draw how it is if that's the way it is” is a grammatical stipulation about the proposition under consideration (for I don't want to say that *I* could draw this, say, because I had learned to draw, etc.). What if I said: “Isn't this a game, since I can win and lose at it?” – Well, if that is your criterion for a game then it is a game.

¹⁴“I know that it's possible, because . . .”. This form of expression derives from cases such as: “I know that it's possible to unlock the door with this key because I've done it once before”. So is *this* the sense in which I surmise that this colour transition will be possible, because I can imagine it?! Mustn't I say instead: The sentence “The colour transition is possible” means the same thing as: “I can imagine it”, or: “The first sentence *follows* from the second”? – How about this: “The ABC's *can* be said aloud *because* I can recite them in my mind”?

“I can imagine what it would be like” or – what is just as good – “I can draw what it would be like, if p is the case” gives me an *application* of the sentence. It says something about the calculus in which we use p.

12 (M): / ✓
13 (M): XXXX

14 (M): r / ✓

„Logische Möglichkeit und Unmöglichkeit“. – Das Bild des „Könnens“ ultraphysisch angewandt. (Ähnlich: „Das ausgeschlossene Dritte“.)

¹Wenn man sagt, die Substanz ist unzerstörbar, so *meint* man, es ist sinnlos, in irgend einem Zusammenhang – bejahend oder verneinend – von dem „Zerstören einer Substanz“ zu reden.

97v ²Man kann auch³ zeigen, daß ein Satz metaphysisch gemeint ist indem man fragt: Ist das⁴ eine Erfahrungstatsache? Kannst Du Dir denken (vorstellen) daß es anders wäre. Willst Du sagen Substanz sei noch nie zerstört worden oder es sei *undenkbar* daß sie zerstört werde?

Undenkbar

⁵Seltsam daß man sollte sagen können das & das sei undenkbar! Auch wenn wir im Denken wesentlich eine Begleitung des Ausdrucks sehen so müssen⁶ also doch die Worte „das & das“ in diesem Satz unbegleitet sein. Was soll er also für einen Sinn haben? Es sei denn daß er aussagen soll diese Worte seien sinnlos. Aber dann ist nicht quasi ihr Sinn sinnlos sondern sie werden aus unserer Sprache ausgeschaltet wie irgend ein beliebiges Geräusch & der Grund ihrer ausdrücklichen Ausschließung kann nur darin liegen daß wir aus irgend einem Grunde versucht sind das Gebilde mit einem Satz unserer Sprache zu verwechseln.

98 ⁷Ich versuche etwas, kann es aber nicht. – Was heißt es aber: „etwas nicht versuchen können“?

„Wir können auch nicht einmal *versuchen*, uns ein rundes Viereck vorzustellen.“

⁸Logische Möglichkeit und Sinn. Kann man fragen: „wie müssen die grammatischen Regeln für die Wörter beschaffen sein, damit sie einem Satz Sinn geben“?

⁹Der Gebrauch des Satzes, das ist sein Sinn.

¹⁰Ich sage z.B. „auf diesem Tisch steht jetzt keine Vase, aber es könnte eine da stehn; dagegen ist es unsinnig¹¹ zu sagen, der Raum könnte vier Dimensionen haben.“ Aber wenn der

1 (M): /// ✓

2 (M): /

3 (V): auch ~~einem~~

4 (V): das ~~nun~~

5 (M): ? /

6 (V): so ~~ist~~ // ~~sind~~

7 (M): / ✓

8 (M): ¡ ✓

9 (M): ¡

10 (M): ¡ ✓

11 (V): sinnlos

“Logical Possibility and Impossibility”. – The Picture of “Being Able To” Applied Ultrapphysically. (Similar to: “The Excluded Middle”.)

¹If we say that substance is indestructible, we *mean* that it is senseless to talk of “destroying a substance” in any context – either by affirming or denying it.

²One can also show³ that a proposition is meant metaphysically by asking: Is this⁴ an empirical fact? Can you think (imagine) that it were otherwise? Do you want to say that substance has never been destroyed, or that it is *unthinkable* that it be destroyed?

Unthinkable

⁵Strange, that one should be able to say “This and that is unthinkable”! Even if we regard thought essentially as an accompaniment to an expression, in this sentence the words “this and that” still have to be⁶ unaccompanied. So what sense is the sentence to have? Unless it is supposed to state that these words are senseless. But then it’s not their sense that is senseless, as it were. Rather they are eliminated from our language like some random noise, and the reason for their explicit exclusion can only be that for some reason we are tempted to confuse this structure with a sentence in our language.

⁷I try something but can’t do it. – But what does this mean: “not to be able to try something”?

“We can’t even *try* to imagine a round rectangle”.

⁸Logical possibility and sense. Can one ask: “What must the grammatical rules for words be like for them to give sense to a sentence?”

⁹The use of a proposition – that is its sense.

¹⁰I say for instance, “There is no vase standing on this table now, but there could be; on the other hand it is nonsensical¹¹ to say that space could have four dimensions”. But if a

1 (M): /// ✓

2 (M): /

3 (V): show ~~someone~~

4 (V): this ~~now~~

5 (M): ? /

6 (V): still ~~is~~ // ~~are~~

7 (M): / ✓

8 (M): ∫ ✓

9 (M): ∫

10 (M): ∫ ✓

11 (V): senseless

99 Satz dadurch sinnvoll wird, daß er mit den grammatischen Regeln im Einklang ist, nun, so machen wir eben die Regel, die den Satz, unser Raum habe vier Dimensionen, erlaubt. Wohl, aber damit ist nun die Grammatik dieses Ausdrucks noch nicht festgelegt. Nun müssen erst noch weitere Bestimmungen darüber getroffen¹² werden, wie ein solcher Satz zu gebrauchen ist, wie er etwa verifiziert wird.

¹³Wenn man auch den Satz als Bild des beschriebenen Sachverhalts auffaßt und sagt, der Satz zeige eben wie es ist, wenn er wahr wäre, er zeige also die Möglichkeit des behaupteten Sachverhalts, so kann der Satz doch bestenfalls tun, was ein gemaltes oder modelliertes Bild tut, und er kann also jedenfalls nicht das erzeugen,¹⁴ was¹⁵ nicht der Fall ist. Also hängt es ganz von unserer Grammatik ab, was möglich genannt wird und was nicht, nämlich eben, was sie zuläßt. Aber das ist doch willkürlich! – Gewiß, aber nicht mit jedem Gebilde kann ich etwas anfangen; d.h.: nicht jedes Spiel ist nützlich, und wenn ich versucht bin, etwas ganz Unnützes einen Satz zu nennen,¹⁶ so geschieht es, weil ich mich durch eine Analogie dazu verleiten lasse und nicht sehe, daß mir für meinen Satz noch die wesentlichen Regeln der Anwendung fehlen.¹⁷ So ist es z.B., wenn man von einer unendlichen Baumreihe redet und sich nicht fragt, wie es denn zu verifizieren sei, daß eine Baumreihe unendlich ist, und was etwa die Beziehung dieser Verifikation zu der des Satzes „die Baumreihe hat 100 Bäume“ ist.¹⁸

12 (V): gemacht

13 (M): ? / ✓

14 (V): hinstellen,

15 (V): was ~~nun eben~~ (M): [Frege]

16 (V): ganz ~~Nutzloses~~ als Satz zuzulassen,

98v 17 (V₁): gewiß, aber nicht jeder Kalkül der dem, mit gewissen unserer Erfahrungssätzen, analog ist, ~~ist irgendwie~~ ist irgendwie von Nutzen. Nicht

jedes Gebilde das in ~~sei~~ so einem Kalkül jenen Erfahrungssätzen entspricht werden wir Satz nennen wollen. (V₂): Gewiß aber unsere Erfahrungssätze z.B. die, welche sich durch ein gemaltes Bild ersetzen ließen weil sie eine sichtbare Verteilung von Körpern beschreiben haben eher eine bestimmte Anwendung einen bestimmten Nutzen. Aber nicht 18 (R): ∇ 145/3

proposition becomes meaningful by conforming to grammatical rules, well, let’s simply fabricate the rule that allows for the proposition that our space has four dimensions. Very well, but this still doesn’t determine the grammar of this expression. Further stipulations still have to be made about how such a proposition can be used, how for instance it is to be verified.

¹²Even if one conceives of a proposition as a picture of the state of affairs it describes and says that what a proposition shows is what it’s like if it were true, and that thus it shows the possibility of the state of affairs that’s being asserted, still the most a proposition can do is what a painted or sculpted image does. So in any case it can’t produce¹³ what¹⁴ is not the case. Therefore what we call possible and what not depends entirely on our grammar, i.e. on what it permits. But that’s arbitrary! – Certainly, but I can’t do something with just any structure; that is: not every game is useful, and if I am tempted to call something completely useless a proposition,¹⁵ then this happens because I allow myself to be seduced by an analogy, and I don’t see that I am still lacking the essential rules of application for my proposition.¹⁶ That’s how it is, for example, when we talk about an endless row of trees and don’t ask ourselves how it can be verified that a row of trees is endless, and what, say, the relationship of this verification is to that of the proposition “The row consists of 100 trees”.¹⁷

12 (M): ? / ✓

13 (V): can’t set down

14 (V): what ~~simply~~ (M): [Frege]

15 (V): tempted to allow something completely ~~useless~~ as a proposition,

16 (V₁): Certainly, but not every calculus that corresponds to certain empirical propositions is analogous, ~~is of some sort n~~ is of some sort of use. But we

won’t want to call every structure that corresponds to those empirical propositions in such a calculus a proposition. (V₂): Certainly, but our empirical propositions, e.g. those that describe a visible distribution of objects and thus could be replaced by a painted picture, tend to have a particular application, a particular use. But we won’t . . .

17 (R): ∇ 145/3

Elementarsatz.

100

¹Kann ein logisches Produkt in einem Satz verborgen sein? Und wenn, wie erfährt man das, und was für Methode haben wir, das im Satz Verborgene ans Licht² zu ziehen? Haben wir noch keine Methode,³ (es zu finden,) dann können wir auch nicht davon reden, daß etwas verborgen ist, oder verborgen sein könnte. Und haben wir eine Methode des Suchens, so kann das logische Produkt, z.B.,⁴ im Satz nur so verborgen sein, wie es etwa der Quotient $753 : 3$ ist solange die Division noch nicht ausgeführt ist.⁵ Die Frage ob ein log. Produkt in einem Satz versteckt sei ist ein mathematisches Problem. Denn, das verborgene logische Produkt finden, ist eine mathematische Aufgabe.

⁶Also ist Elementarsatz ein solcher, der sich in dem Kalkül, wie ich ihn jetzt⁷ benütze, nicht als Wahrheitsfunktion anderer Sätze darstellt.

Die Idee, Elementarsätze zu konstruieren (wie dies z.B. Carnap versucht hat), beruht auf einer falschen Auffassung der logischen Analyse. Das Problem dieser Analyse ist nicht: es sei⁸ eine *Theorie* der Elementarsätze zu finden.⁹ Als seien Prinzipien der Mechanik zu finden.¹⁰

101 ¹¹Meine Auffassung in der log. – phil. Abhandlg.¹² war falsch: 1.)¹³ weil ich mir über den Sinn der Worte „in einem Satz ist ein logisches Produkt *versteckt*“ (und ähnlicher) nicht klar war, 2.)¹⁴ weil auch ich dachte, die logische Analyse müsse verborgene Dinge an den Tag bringen (wie es die chemische und physikalische tut).

¹⁵Man kann den Satz „dieser Ort ist jetzt rot“ (oder „dieser Kreis ist jetzt rot“, etc.) einen Elementarsatz nennen, wenn man damit sagen will, daß er weder eine Wahrheitsfunktion anderer Sätze ist, noch als solche definiert (*ist*). (Ich sehe hier von Verbindungen der Art $p \& (q \vee \sim q)$ und analogen ab.)

Aus „a ist jetzt rot“ folgt aber „a ist jetzt nicht grün“ und die Elementarsätze in diesem Sinn sind also nicht von einander unabhängig, wie die Elementarsätze in meinem seinerzeit beschriebenen Kalkül, von dem ich annahm, der ganze Gebrauch der Sätze müsse sich auf ihn zurückführen lassen; – verleitet durch einen falschen Begriff von dieser Zurückführung.¹⁶

1 (M): /

2 (V): Tageslicht

3 (V): keine ~~sicheren~~ Methoden,

4 (V): kann – das logische Produkt, ~~etwa~~,

5 (V): es etwa ~~die Teilbarkeit durch 3 in der Zahl 753 ist, solange ich das Kriterium noch nicht angewandt habe, oder aber auch die $\sqrt{7}$ solange ich sie noch nicht ausgerechnet habe.~~

6 (M): /

7 (V): ich ~~es heute~~

8 (V): Analyse ~~besteht nicht darin,~~

9 (V₁): logischen Analyse. ~~Sie betrachtet das Problem dieser Analyse als das, eine Theorie~~

... zu finden. (V₂): Elementarsätze ~~zu finden.~~

10 (V): ~~Sie lehnt sich an das an, was, in der Mechanik z.B., geschieht, wenn eine Anzahl von Grundgesetzen gefunden wird, aus denen das ganze System von Sätzen hervorgeht.~~

11 (M): /

12 (V): Meine ~~eigene~~ Auffassung

13 (V): falsch: ~~Teils,~~

14 (V): war, ~~zweitens,~~

15 (M): ü /

16 (V): von diesem „zurückführen“.

Elementary Proposition.

¹Can a logical product be hidden in a proposition? And if so, how does one find this out, and what methods do we have of pulling what is hidden in the proposition into the open?² So long as we don't have any³ methods (for finding it), then we can't speak of something being hidden or possibly hidden. And if we have a method for looking for it, then a logical product, for instance, can be hidden in a proposition only in the way that, say, the quotient of $753 \div 3$ is hidden so long as the division hasn't been carried out.⁴ The question whether a logical product is hidden in a proposition is a mathematical problem. For finding the hidden logical product is a mathematical task.

⁵So an elementary proposition is one that, in the calculus as I am now⁶ using it, doesn't represent itself as a truth-function of other propositions.

The idea of constructing elementary propositions (as Carnap, for example, tried to do) is based on a false conception of logical analysis. The problem of that analysis is not:⁷ a *theory* of elementary propositions must be discovered.⁸ As if principles of mechanics had to be discovered.⁹

¹⁰My view in the *Tractatus Logico-Philosophicus*¹¹ was wrong: 1.¹² because I didn't clearly understand the sense of the words "a logical product is *hidden* in a proposition" (and similar words), 2.¹³ because I too thought that logical analysis would have to bring hidden things to light (as do chemical and physical analysis).

¹⁴One can call the proposition "This place is now red" (or "This circle is now red", etc.) an elementary proposition, if one means by this that it is neither a truth-function of other propositions nor (is it) defined as such. (Here I am disregarding combinations of the sort $p \ \& \ (q \ \vee \ \sim q)$, and ones like it.)

But from "a is now red", "a is now not green" follows, and so elementary propositions in this sense aren't independent of each other like the elementary propositions in the calculus I described earlier – a calculus to which I assumed the entire use of propositions must be reducible – seduced by a false concept of such a reduction.¹⁵

1 (M): /

2 (V): into daylight?

3 (V): any ~~certain~~

4 (V): say, the divisibility by 3 is hidden in the number 753 so long as I haven't yet applied the criterion, or also the $\sqrt{7}$ so long as I haven't yet calculated it.

5 (M): /

6 (V): I am ~~today~~

7 (V): analysis ~~doesn't consist of~~.

8 (V): conception of logical analysis. ~~It views the~~ problem of this analysis ~~as discovering a theory~~ of elementary propositions.

9 (V): ~~It relies on what~~ happens ~~in~~ mechanics, for instance when a number of basic laws are found from which the whole system of propositions emerges.

10 (M): /

11 (V): My ~~own~~ view

12 (V): wrong: ~~in part~~,

13 (V): words), ~~second~~,

14 (M): r /

15 (V): of "reducing".

102

„Wie ist die Möglichkeit von
p in der Tatsache, daß $\sim p$ der
Fall ist, enthalten?“
„Wie enthält z.B. der schmerzlose
Zustand die Möglichkeit der
Schmerzen?“

²Man scheint etwas über den Zustand der Schmerzlosigkeit zu sagen wenn man sagt daß er die Möglichkeit des Schmerzes enthalten³ muß. Man redet aber nur vom System der Bilder das wir verwenden.⁴

⁵„Über⁶ den schmerzlosen Zustand sinnvoll reden⁷ setzt die Fähigkeit voraus, Schmerzen zu fühlen und das kann keine ‚physiologische Fähigkeit‘⁸ sein, – denn wie wüßte man sonst, *wozu* es die Fähigkeit ist – sondern eine logische Möglichkeit. – Ich beschreibe meinen gegenwärtigen Zustand durch die Anspielung auf Etwas, was nicht der Fall ist. Das zu sagen⁹ ist irreführend, denn es klingt,¹⁰ als sei es eine Anspielung auf einen nicht Existierenden, während es eine Anspielung auf einen Abwesenden ist. Aber auch das ist irreführend. Wenn diese Hinweisung zu der Beschreibung nötig ist (und nicht bloß eine Verzierung), so muß in meinem gegenwärtigen Zustand etwas liegen, was diese Erwähnung (Hinweisung) nötig macht. Ich vergleiche diesen Zustand mit einem anderen, also muß er mit ihm vergleichbar sein. Er muß auch im Schmerzraum liegen, wenn auch an einer andern Stelle. – Sonst würde mein Satz etwa heißen, mein gegenwärtiger Zustand hat mit einem schmerzhaften *nichts zu tun*; etwa, wie ich sagen würde, die Farbe dieser Rose hat mit der Eroberung Galliens durch Cäsar nichts zu tun. D.h. es ist kein Zusammenhang vorhanden. Aber ich meine gerade, daß zwischen meinem jetzigen Zustand und einem schmerzhaften ein Zusammenhang besteht.“ Ich *meine* nur, was ich sage.

In wiefern ist aber Schmerzlosigkeit ein *Zustand*. Was nenne ich einen „Zustand“?

103 ¹¹Wenn ich sage, ich habe heute Nacht *nicht* geträumt, so muß ich doch wissen, wo nach dem Traum zu suchen wäre (d.h., der Satz „ich habe geträumt“ darf, auf die Situation angewendet, nur falsch, aber nicht unsinnig sein).

1 (R): Siehe Sinn & Grammatik

2 (M): ü / ✓

3 (O): enthalten

4 (R): \forall S. 388, 389

5 (M):] ✓ / / / / / *Vielleicht lehrreich*. Sonst U.

6 (O): Über

7 (V): ~~Der~~ schmerzlose Zustand

8 (V): keine „physiologische Disposition“

9 (V): ~~Diese~~ Ause

10 (V): ist,

11 (M): / / /

“How is the Possibility of
p Contained in the Fact that
~p is the Case?”

“How Does, for Example,
a Pain-free State Contain
the Possibility of Pain?”

²We seem to be saying something about not being in pain when we say that this state has to contain the possibility of pain. But all we’re talking about is the system of pictures that we use.³

⁴“To talk meaningfully about a painless state⁵ presupposes the capacity to feel pain, and that cannot be a ‘physiological capacity’.⁶ Rather, it has to be a logical possibility – for how else would one know *what* it is the capacity *for*? – I describe my present state by alluding to something that is not the case. To say that is misleading, because it sounds like⁷ an allusion to a non-existent state, whereas it is an allusion to one that is absent. But that too is misleading. If this reference is necessary for the description (and isn’t merely an embellishment), then there must be something in my present state that makes this mention (reference) necessary. I am comparing this state with another, so it must be comparable to it. It too must be situated within pain-space, although at a different point. – Otherwise my sentence would read, for example, ‘My present state has *nothing to do* with a painful one’ – as I might say the colour of this rose has nothing to do with Caesar’s conquest of Gaul. That is, there is no connection. But what I mean is precisely that there is a connection between my present state and a painful one.” I only *mean* what I say.

But how is the absence of pain a *state*? What is it that I’m calling a “state”?

⁸If I say I did *not* dream last night, still I must know where one could look for the dream (that is, when it is used in this situation the proposition “I had a dream” can only be false, not nonsensical).

1 (R): See Sense and Grammar

2 (M): r / ✓

3 (R): ∇ pp. 388, 389

4 (M): } ✓ /// Perhaps instructive. Otherwise useless

5 (V): ♠ painless state

6 (V): a “physiological disposition”.

7 (V): it is

8 (M): ///

¹²Ich drücke die gegenwärtige Situation durch eine Stellung – die negative – der Signalscheibe „Träume – keine Träume“ aus. Ich muß sie aber trotz ihrer negativen Stellung von andern Signalscheiben unterscheiden können. Ich muß wissen, daß ich *diese* Signalscheibe in der Hand habe.

¹³Man könnte nun fragen: Heißt das, daß Du doch etwas gespürt hast, sozusagen die Andeutung eines Traums, die Dir die Stelle zum Bewußtsein bringt, an der ein Traum gestanden wäre? ¹⁴Oder, wenn ich sage „ich habe keine Schmerzen im Arm“, heißt das, daß ich eine Art schattenhaftes Gefühl habe, welches die Stelle andeutet, in die der Schmerz eintreten würde? Doch offenbar, nein. Aber muß ich nicht wissen, wie es wäre wenn ich Schm. hätte?¹⁵

¹⁶In wiefern enthält der gegenwärtige, schmerzlose Zustand¹⁷ die Möglichkeit der Schmerzen?

Wenn einer sagt: „Damit das Wort Schmerzen Bedeutung habe, ist es notwendig, daß man Schmerzen als solche erkennt, wenn sie auftreten“, so kann man antworten: „Es ist nicht notwendiger, als daß man das Fehlen von Schmerzen erkennt“.

¹⁸„Schmerzen“ heißt sozusagen der ganze Maßstab und nicht einer seiner Teilstriche. Daß er auf einem bestimmten Teilstrich steht, ist durch einen *Satz* auszudrücken.

¹⁹„Was wäre das für eine Frage: ‚Könnte denn Alles *nicht* der Fall sein, und nichts der – Fall – sein? Könnte man sich einen Zustand einer Welt denken, in dem mit Wahrheit nur negative Sätze zu sagen wären? Ist das nicht offenbar alles Unsinn? Gibt es denn wesentlich negative und positive Zustände?“ Nun, es kommt darauf an, was man „Zustände“ nennt.

Man kommt nicht davon weg, daß die Benützung des Satzes darin besteht daß man sich bei jedem Wort etwas vorstellt.²⁰

Die Anwendg. des Satzes ist *nicht* die, die eine solche Vorstellung fordert. Immer wieder möchte man sich den Sinn eines Satzes, also seine Verwendung²¹ (seinen Nutzen) in einem²² Geisteszustand des Redenden²³ konzentriert denken. Man denkt nicht, daß man mit ihm *rechnet*, operiert, ihn mit der Zeit durch dies oder jenes Bild ersetzt. Sondern sein Sinn, d.i. aber sein²⁴ Zweck, soll in einem Zustand liegen.²⁵

104 Wie weiß Einer daß er nicht taub ist wenn er kein Geräusch hört, & daß er nicht innerlich taub ist, wenn er sich keins vorstellen kann.

²⁶Ist absolute Stille zu verwechseln mit innerer Taubheit, ich meine der Unbekanntheit mit dem Begriff des Tones? Wenn das der Fall wäre, so könnte man den Mangel des Gehörssinnes nicht von dem Mangel eines andern Sinnes unterscheiden.

²⁷Ist das aber nicht genau dieselbe Frage wie: Ist der Mann, der jetzt nichts Rotes um sich sieht, in derselben Lage, wie der, der unfähig ist, rot zu sehen?

12 (M): ///

13 (M): / /// – „gestanden wäre?“

14 (M): ✓

15 (O): hatte?

16 (M): /

17 (V): schmerzlose, Zustand

18 (M): ∫ ///

19 (M): ∫ ×××

20 (V): etwas vorstellen muß.

21 (V): Anwendung

22 (V): dem

23 (O): redenden

24 (V): d.i. sein

25 (V): soll in einer Art Bild liegen die . . .

26 (M): ∫ ✓ ///

27 (M): ///

⁹I express the present situation through a position – the negative position – of the signal disk that signifies “dreams – no dreams”. But in spite of its negative position, I must be able to distinguish it from other signal disks. I must know that I am holding *this* signal disk in my hand.

¹⁰Now one could ask: Does that mean that you did feel something after all, the hint of a dream, as it were, which makes you conscious of the place the dream would have occupied?

¹¹Or if I say “I have no pain in my arm” does that mean that I have a kind of shadowy feeling that indicates the place where pain might occur? Obviously not. But don’t I have to know what it would be like if I had pain?

¹²In what way does my present painless state contain the possibility of pain?

If someone says: “For the word ‘pain’ to have a meaning it’s necessary that pain be recognized as such when it occurs”, then one can respond: “It’s no more necessary than that one recognize the absence of pain”.

¹³“Pain” means the entire measuring stick, as it were, and not one of its graduation marks. That it is located on a certain mark is to be expressed by a *proposition*.

¹⁴“What kind of a question would this be: ‘Mightn’t everything *not* be the case and nothing the case?’ Can one imagine a state of the world in which only negative propositions could be uttered truthfully? Isn’t all of this obviously nonsense? Are there such things as essentially negative or positive states?” Well, it depends on what one calls “states”.

It’s hard to leave the path that the use of a sentence consists in imagining¹⁵ something in response to every word.

It is *not* the use of a proposition that demands such an imagining. Over and again we’re inclined to think of the sense of a proposition, i.e. its application¹⁶ (its use), as concentrated in a speaker’s mental state. We don’t think about *calculating* with it, operating with it, replacing it with this or that picture as time goes by. Rather its sense – and that¹⁷ *is* its purpose – is supposed to be contained in a state.¹⁸

How does someone know that he isn’t deaf if he doesn’t hear noises, and that he isn’t deaf inside if he can’t imagine any?

¹⁹Can absolute silence be confused with inner deafness – I mean with unfamiliarity with the concept of a sound? If that happened one couldn’t distinguish the lack of the sense of hearing from the lack of any other sense.

²⁰But isn’t this exactly the same question as: Is the man who presently sees nothing red around him in the same situation as one who is incapable of seeing red?

9 (M): ///

10 (M): / /// – “occupied?”

11 (M): ✓

12 (M): /

13 (M): ∫ ///

14 (M): ∫ XXX

15 (V): in having to imagine

16 (V): its ~~employment~~

17 (V): sense – that

18 (V): contained in a kind of image that . . .

19 (M): ∫ ✓ ///

20 (M): ///

²⁸Man kann natürlich sagen: Der Eine kann sich rot doch vorstellen, aber das vorgestellte Rot ist ja nicht dasselbe, wie das Gesehene.

²⁹Nun, worin äußert sich denn die Fähigkeit, rot zu sehen und worin die Bekanntschaft mit dem Begriff des Tons? Man wird sagen: Er muß wissen was „Ton“ heißt. Aber was heißt es das zu wissen? – Ich sage „ich weiß was ‚rot‘ heißt“ – Jemand fragt: „Bist Du sicher?“ – Was würde ich da tun um mich davon zu überzeugen?³⁰

³¹Wenn ich nur etwas Schwarzes sehe und sage, es ist nicht rot, wie weiß ich, daß ich nicht Unsinn rede, d.h. daß es rot sein *kann*,³² daß es Rot gibt? Wenn nicht rot eben ein anderer Teilstrich auf dem Maßstab ist, auf dem auch schwarz einer ist. Was ist der Unterschied zwischen „das ist nicht rot“ und „das ist nicht abracadabra“? Ich muß offenbar wissen, daß „schwarz“, welches den tatsächlichen Zustand beschreibt (oder beschreiben hilft) das ist, an dessen Stelle in der Beschreibung „rot“ steht.³³

³⁴Das Gefühl ist, als müßte $\sim p$, um p zu verneinen, es erst in gewissem Sinne wahr machen. Man fragt „was ist nicht der Fall“. Dieses muß dargestellt werden, kann aber doch nicht so dargestellt werden, daß p wirklich wahr gemacht wird.

³⁵„Das Grau muß bereits im Raum von dunkler und heller vorgestellt sein, wenn ich davon reden will, daß es dunkler oder heller werden kann.“ D.h.: es *kann* zum Verständnis des Satzes gehören, daß man etwas helleres &³⁶ dunkleres vor sich sieht & man sagt dann etwa:³⁷ „dieses Grau kann so oder auch so werden“.

105 ³⁸Man könnte also vielleicht auch sagen: Der Maßstab muß schon angelegt sein, ich kann ihn nicht – willkürlich – anlegen, ich kann nur einen Teilstrich darauf hervorheben.

Das kommt auf Folgendes hinaus: Wenn es um mich her vollkommen still ist, so kann ich an diese Stille den Gehörsumraum nicht willkürlich anbringen (aufbauen),³⁹ oder nicht anbringen. D.h., es ist für mich entweder still im Gegensatz zu einem Laut, oder das Wort „still“ hat keine Bedeutung für mich. D.h. ich kann nicht *wählen* zwischen *innerem* Gehör und innerer Taubheit.

Und ebenso kann ich, wenn ich Grau sehe, nicht zwischen normalem innerem Sehen, partieller oder vollkommener Farbenblindheit *wählen*.“

⁴⁰„Kann ich mir Schmerzen in der Spitze meines Nagels denken, oder in meinen Haaren? Sind diese Schmerzen nicht ebenso wohl, und ebenso wenig vorstellbar, wie die an irgend einer Stelle des Körpers, wo ich gerade keine Schmerzen habe und mich an keine erinnere?“⁴¹

⁴²Wir⁴³ sind versucht zu sagen; „ich habe jetzt in der Hand keine Schmerzen“ heißt nur etwas, wenn ich weiß wie es ist, wenn man Schmerzen in der Hand hat. Was heißt es, das zu wissen? Was ist unser Kriterium dafür, daß man es weiß? Nun, ich würde sagen: „ich habe schon öfters Schmerzen gehabt“, „ich habe öfters Schmerzen an dieser Stelle gehabt“, oder „ich habe zwar nicht an *dieser* Stelle Schmerzen gehabt, aber an andern Stellen meines

28 (M): ///

29 (M): |

30 (M): gut darüber nachzudenken.

31 (M): ∫ ///

32 (V): sein *kann*,

33 (M): vielleicht lehrreich

34 (M): ✓

35 (M): vielleicht lehrreich ∫ ✓

36 (V): helleres *oder*

37 (V): sieht & *etwa sagt*:

38 (M): ////

39 (V): anbringen, (aufbauen),

40 (M): ? / ✓ ///

41 (R): (Siehe: Sinn & Grammatik)

42 (M): v.l. ∫ ///

43 (V): *Sehen wir die Sache vom Standpunkt des gesunden Menschenverstandes an*. Wir

²¹Of course you can say, “But the former can imagine red”; but the imagined red isn’t the same as the one that’s seen.

²²Well, how does the ability to see red manifest itself, and how does the familiarity with the concept of sound? It will be said: He has to know what “sound” means. But what does it mean to *know* that? – I say “I know what ‘red’ means”. – Someone asks: “Are you sure?” – What would I do to convince myself of this?²³

²⁴If all I see is something black and I say it isn’t red, how do I know that I’m not talking nonsense, i.e. that it *can*²⁵ be red, that there is red? Unless red is simply another graduation mark on a yardstick on which black is situated. What’s the difference between “That isn’t red” and “That isn’t abracadabra”? Obviously I must know that “black” – which describes (or helps to describe) the actual state of affairs – is what is replaced by “red” in a description.²⁶

²⁷One has the feeling that in some sense $\sim p$ first has to make p true in order to negate it. We ask “*What is not the case?*”. This has to be represented, but it can’t be represented in such a way that p is actually made true.

²⁸“Grey must already have been imagined within the space of darker and lighter if I want to speak about the fact that it can become darker or lighter.” That is: it *can* be part of understanding a proposition that we see something lighter and²⁹ darker in front of us, and then say, for example:³⁰ “This grey can become like *this*, or *that*.”

³¹So perhaps one could also say: “The yardstick must already have been applied. I can’t – arbitrarily – apply it; I can only emphasize a graduation mark on it”.

This amounts to the following: If everything around me is absolutely quiet, I can’t arbitrarily attach (construct) or not attach the space of hearing to this silence. That is, as far as I’m concerned either it’s quiet as opposed to there being a sound, or the word “quiet” has no meaning. That is, I can’t *choose* between *inner* hearing and inner deafness.

And likewise, when I see grey I cannot *choose* between normal inner sight, and partial or complete colour-blindness.

³²“Can I imagine pain in the tip of my nail or in my hair? Isn’t this pain just as much and as little imaginable as a pain in any other part of my body where for the moment I don’t have and don’t remember any pain?”³³

³⁴We³⁵ are tempted to say: “I don’t have any pain in my hand now” only means something if I know what it’s like to have a pain in my hand. What does knowing this mean? What is our criterion for knowing it? Well, I would say: “I’ve had pain several times”, “I’ve had pain in that place several times”, or “I haven’t had pain in *this* place, but I have had it

21 (M): ///

22 (M): |

23 (M): Good to think about.

24 (M): ∫ ///

25 (V): it ~~can~~

26 (M): Perhaps instructive

27 (M): ✓

28 (M): Perhaps instructive ∫ ✓

29 (V): ~~or~~

30 (V): us, and ~~say, for example:~~

31 (M): ///

32 (M): ? / ✓ ///

33 (R): (See: Sense and Grammar)

34 (M): *p. i.* [E: perhaps instructive] ∫ ///

35 (V): ~~Let’s look at the matter from the point of view of common sense.~~ We

Körpers“. Es könnte gefragt werden: worin besteht die Erinnerung an Deine vergangenen Schmerzen? fühlst Du sie in einer Art schattenhafter Weise wieder? Aber sei diese Erfahrung (des Sich-Erinnerns) wie immer, sie ist eine bestimmte Erfahrung und ich nenne sie die Erinnerung „an Schmerzen, die ich gehabt habe“ und dies zeigt eben, wie ich das Wort „Schmerzen“ und den Ausdruck der Vergangenheit gebrauche.

⁴⁴Die Verneinung enthält eine Art Allgemeinheit durch das Gebiet von Möglichkeiten, die sie offen läßt.

Aber freilich muß auch die Bejahung sie enthalten und nur einen andern Gebrauch von ihr machen.

⁴⁵„ $\sim p$ “ schließt einfach p aus. Was dann *statt* p der Fall sein kann, folgt aus dem Wesen des Ausgeschlossenen.⁴⁶

⁴⁷Ist die Verneinung identisch einer Disjunktion der ausgeschlossenen Fälle?

Sie ist es in manchen Fällen & in manchen ist sie es nicht.

„Die Permutation⁴⁸ von ABC die ich sah war nicht ACB.“

44 (M): ? / / / /

45 (M): ∫

46 (V): $\sim p$ schließt p aus; was es dann *zuläßt*, hängt von der Natur, d.h. der Grammatik, des p ab.

(R): \forall S. 21 Anmerkung

47 (M): /

48 (V): „Die ~~Komb~~

in other parts of my body.” The question could be raised: What does the memory of your past pains consist in? Do you feel them again in a shadowy sort of way? But be this experience (of remembering) as it may, it is a particular one, which I call the memory “of pain that I have had”, and this serves to show how I use the word “pain” in conjunction with the expression of the past.

³⁶Negation contains a kind of generality because of the range of possibilities that it leaves open.

But of course affirmation must also contain this range. It just makes a different use of it.

³⁷“ $\sim p$ ” simply excludes p. So what can be the case *instead of* p follows inherently from what was excluded.³⁸

³⁹Is negation identical to a disjunction of the excluded cases?

In some cases it is, and in some not.

“The permutation⁴⁰ of ABC that I saw was not ACB.”

36 (M): ? / / / / /

37 (M): J

38 (V): $\sim p$ excludes p; what it then *allows* depends on the nature, i.e. the grammar, of p. (R):
 \forall p. 21 note

39 (M): /

40 (V): ~~comb~~

„Wie kann das Wort ‚nicht‘
verneinen?“ Das Wort „nicht“
erscheint uns wie ein Anstoß zu
einer komplizierten Tätigkeit
des Verneinens.

Verneinen, eine „geistige Tätigkeit“¹.

Verneine etwas & beobachte was Du tust. Du schüttelst etwa innerlich den Kopf. Nun und was weiter?² Ist das nützlicher³ als ein „~“ vor einen Satz schreiben?

⁴ „Wie kann das Wort ‚nicht‘ verneinen?“ Ja, haben wir denn außer der Verneinung⁵ durch ein Zeichen, noch einen Begriff von der Verneinung?

Doch es fällt uns dabei etwas ein, wie: Hindernis, abwehrende Geste, Ausschluß. Aber das alles (ist) doch immer in einem Zeichen verkörpert.

⁶ Was ist der Unterschied zwischen: Wünschen, daß etwas geschieht und Wünschen, daß dasselbe nicht geschieht?

Wollte man es bildlich darstellen, man würde mit dem Bild der Handlung etwas vornehmen: es durchstreichen, in bestimmter Weise einzäunen,⁷ und dergleichen. Aber das erscheint uns als eine *rohe* Methode des Ausdrucks; aber ich glaube, daß jede wesentlich ebenso sein muß; in der Wortsprache setze ich das Zeichen „nicht“ in den Satz. Das scheint uns wie ein⁸ ungeschickter Behelf und man meint etwa, im *Denken* geschieht es schon anders. Aber,⁹ im Denken, Erwarten, Wünschen, geschieht es ganz ebenso. Sonst würde ja auch die Diskrepanz zwischen dem Denken und der Sprache – in der wir doch denken¹⁰ – unerträglich sein.

¹¹ Der¹² Ausdruck der Verneinung, den wir gebrauchen, wenn wir uns irgendeiner Schrift¹³ bedienen, erscheint uns *primitiv*; als gäbe es einen richtigeren, der mir nur in den rohen Verhältnissen dieser Ausdrucksform¹⁴ nicht zur Verfügung steht.

1 (O): Tätigkeit

2 (V): was hilft // nützt // das?

3 (O): nützlicher

4 (M): /

5 (V): denn abgesehen von der Verneinung

6 (M): /

7 (V): einrahmen,

8 (V): Satz. Wie gesagt, das scheint ein

9 (V): anders. Ich glaube aber,

10 (V): und dem Sprechen – in dem wir ja doch denken

11 (M): /

12 (V): Noch einmal, der

13 (V): Sprache

14 (V): Sprache

30

“How Can the Word ‘Not’ Negate?” The Word “Not” Seems to Us Like an Impetus to a Complicated Activity of Negating.

Negating, a “mental activity”.

Negate something and notice what you’re doing. You shake your head inwardly, for instance. Well, so what?¹ Is that more effective than writing “~” in front of a sentence?

²“How can the word ‘not’ negate?” Do we even have a concept of negation other than³ negation with a sign?

Yes, we can think of something like: impediment, rejecting gesture, exclusion. But all of them as well (are) always embodied in a sign.

⁴What’s the difference between: wishing that something will happen and wishing that *the same thing won’t* happen?

If you wanted to portray it graphically you’d do something to the picture of the action: cross it out, enclose⁵ it in a certain way, and other such things. This seems to us to be a *crude* method of expression; but I think that *every such method* must essentially be just like it; in word-language I place the sign “not” in the sentence. This seems to us⁶ a clumsy makeshift and we think, e.g., that it happens differently in *thinking*. But⁷ in thinking, expecting, wishing, it happens in exactly the same way. Otherwise the discrepancy between thinking and language – in which⁸ we think, after all – would be intolerable.

⁹The¹⁰ way we express negation in any sort of writing¹¹ strikes us as *primitive*; as if there were a more appropriate way that just isn’t at our disposal given the crude circumstances of this form of expression.¹²

1 (V): instance. And how does that help? // And of what use is that?

2 (M): /

3 (V): negation aside from

4 (M): /

5 (V): ~~frame~~

6 (V): sentence. ~~As we’ve said, this seems to be~~

7 (V): But ~~I believe~~

8 (V): thinking and speaking – during which

9 (M): /

10 (V): ~~To repeat~~, the

11 (V): ~~language~~

12 (V): this ~~language~~.

¹⁵Diesem Primitiven der Ausdrucksform, das uns bei der Verneinung aufgefallen ist, sind wir auch anderwärts¹⁶ begegnet;¹⁷ wenn man nämlich etwa einem Menschen begrifflich machen will, daß er einen gewissen Weg gehen soll, so kann man ihm den Weg aufzeichnen, und hierin mit beliebig weitgehender Genauigkeit verfahren. Die Andeutung jedoch, die ihm verständlich machen soll, daß er den Weg gehen soll, ist wieder von der primitiven Art, die man gerne verbessern möchte.

¹⁸„Was hilft es, daß als Negationszeichen nur ein Haken vor dem Satz p steht, ich muß ja doch die ganze Negation denken.“

¹⁹„Das Zeichen ‚nicht‘²⁰ deutet an, Du sollst,²¹ was darauf folgt, negativ auffassen.“²²

²³„Es deutet an“²⁴ heißt aber, daß dieses Zeichen der Verneinung nicht²⁵ der letzte sprachliche Ausdruck ist; daß²⁶ das nicht das Bild des Gedankens ist. Daß mehr in der Negation ist, als das.

²⁷Man möchte sagen: das Zeichen der Verneinung²⁸ ist nur eine Veranlassung um etwas sehr Kompliziertes²⁹ zu tun; – aber was? Läßt sich die Frage nicht beantworten,³⁰ so ist sie unsinnig, und dann ist es auch jener erste Satz.

Es ist, als veranlaßte uns das Zeichen der Negation zu etwas; aber wozu? das³¹ wird³² nicht gesagt. Es ist, als brauchte es nur angedeutet werden; als wüßten wir es schon. Als wäre eine Erklärung³³ unnötig, da wir die Sache ohnehin schon kennen.³⁴

109 ³⁵Gäbe es eine explizitere Ausdrucksweise der Negation, so müßte sie sich doch in die andere abbilden lassen und könnte darum nicht von anderer Multiplizität sein.

³⁶Nun wäre aber die Frage: wie zeigt sich das uns bekannte Spezifische der Negation in den Regeln, die vom Negationszeichen handeln.³⁷ Daß z.B. ein gezeichneter Plan eines Weges ein Bild des Weges ist, verstehen wir ohne weiteres; wo sich der gezeichnete Strich nach links biegt, biegt³⁸ auch der Weg nach links, etc. etc. Daß aber das Zeichen „nicht“ den Plan ausschließt, sehen wir nicht. Eher noch, wenn wir etwas ausgeschlossenes mit einem Strich umfahren, gleichsam abzäunen.³⁹ Aber so könnte man ja das „~“ als eine Tafel auffassen „Verbotener Weg“.

Denken wir aber daran, wie jemandem wirklich die Bedeutung so einer Tafel gelehrt würde. Man würde ihn etwa zurückhalten, den Weg zu gehen.

⁴⁰„Ich sage doch diese Worte nicht bloß, sondern ich meine auch etwas mit ihnen“. Wenn ich z.B. sage „Du darfst nicht hereinkommen“, so ist es der natürliche Akt, zur Begleitung

15 (M): / /

16 (V): wir ~~schon früher~~

17 (O): Dieses Primitiv der Ausdrucksform, das . . . ist, haben wir . . . begegnet;

18 (M): /

19 (M): /

20 (V): Zeichen „~“

21 (V): sollst ~~das~~,

22 (O): auffassen;“.

23 (M): XXX

24 (V): Es deutet an

25 (V): daß das nicht

26 (V): ist. Daß

27 (M): /

28 (V): ~~Ich~~ möchte sagen, ~~die~~ Verneinung

29 (V): etwas ~~viel Komplexeres~~ // Komplizierteres

30 (V): beantworten (~~und das eine Symbol der Negation durch ein anderes zu ersetzen, ist keine Antwort~~),

31 (V): aber ~~was~~, das

32 (V): wird ~~scheinbar~~

33 (V): Erklärung ~~jetzt~~

34 (R): \forall S. 3/2

35 (M): ? / / / /

36 (M): ? / / / / /

37 (V): gelten.

38 (V): links biegt, biegt ~~sich~~

39 (O): abzäunen.

40 (M): / / / / /

¹³We’ve run across this primitiveness of form of expression, which we’ve noticed in negation, in other places as well¹⁴; for instance, when you want to get across to someone that he is to take a certain path, you can draw the path for him as precisely as you wish. But the indication that is to make him understand that *he* should take the path is once again of a primitive nature, on which one would like to improve.

¹⁵“What good is it that only a squiggle is in front of the sentence p as a negation sign? I still have to think the whole negation.”

¹⁶“The sign ‘not’¹⁷ indicates that you’re supposed to take what follows it negatively.”

¹⁸However, “indicates”¹⁹ means that this sign for negation isn’t²⁰ the final linguistic expression of negation; that²¹ this isn’t the picture of the thought. That there is more to negation than this.

²²We want to say: The sign for negation²³ is no more than a prompt for doing something very complicated²⁴ – but what? If this question can’t be answered²⁵ it is nonsense, and then so is our initial sentence.

It’s as if the negation sign prompted us to do something; but what? That isn’t said.²⁶ It’s as if it only had to be alluded to; as if we already knew what it was. As if an explanation were unnecessary²⁷ because we already knew about the matter.²⁸

²⁹If there were a more explicit way of expressing negation, we’d still have to be able to portray it in terms of the other one, and therefore it couldn’t be of a different order of multiplicity.

³⁰But now the question is: How is the specificity of negation that we’re familiar with shown in the rules for the negation sign? We understand without ado that a hand-drawn map of a path is a picture of the path; where the hand-drawn line turns left the path turns left as well, etc. etc. But we don’t see that the “not” sign pertains to the map. We have a better chance at seeing this if we draw a line around something that is ruled out, fence it off, as it were. Thus one could take the “~” as a “No Trespassing” sign.

But let’s consider how someone is actually taught the meaning of such a sign. We’d restrain him from taking the path, for instance.

³¹“After all, I don’t just utter these words, but mean something by them.” If I say, for example, “You’re not allowed to come in”, then it’s natural to accompany these words by

13 (M): ∫ /

14 (V): negation, ~~earlier~~

15 (M): /

16 (M): /

17 (V): sign “~”

18 (M): XXX

19 (V): However, indicates

20 (V): that that isn’t

21 (V): expression of negation. That

22 (M): /

23 (V): ∫ want to say ~~the~~ negation

24 (V): something ~~much more complex~~ // more complicated

25 (V): answered (and replacing one symbol of negation with another isn’t an answer)

26 (V): but ~~what, apparently~~ isn’t said.

27 (V): unnecessary ~~now~~

28 (R): ∇ p. 3/2

29 (M): ? / ///

30 (M): ? / /// /

31 (M): ∫ /// /

dieser Worte, mich vor die Tür zu stellen und sie zuzuhalten. Aber es wäre nicht so offenbar naturgemäß, wenn ich sie ihm bei diesen Worten öffnen würde. Diese Worte haben, wie sie hier verstanden werden, offenbar etwas mit jenem Akt zu tun.⁴¹

Der Akt ist sozusagen eine Illustration zu ihnen – müßte als Sprache aufgefaßt werden können. Andererseits ist er aber auch der Akt, den ich abgesehen von jedem Symbolismus aus meiner Natur tue.⁴²

- 108v Wie ist es aber mit diesem Gedanken: Wenn „~p“ ein Bild sein soll, wäre es da nicht am natürlichsten, wenn es das Gegenteil von p durch das Gegenteil des Zeichens⁴³ „p“ darstellte. Man würde dann, daß zwei Menschen nicht miteinander kämpfen dadurch abbilden⁴⁴ daß man sie nicht miteinander kämpfend abbildete. Ich sagte einmal, ein solcher negativer Symbolismus wäre schon
- 110 möglich,⁴⁵ er sei nur darum nicht zu gebrauchen, weil man aus ihm nicht erfahren könne, *was* verneint sei. Dann ist er eben kein Symbolismus der Negation, wenn er uns nicht das Nötige mitteilt. Und dann fehlt es ihm am Wesentlichen.

Es hat ja seinen Grund, warum in gewissen Fällen der negative Symbolismus funktioniert und z.B. keine Antwort auch eine Antwort ist. In diesen Fällen ist eben der Sinn des Schweigens eindeutig bestimmt.

⁴⁶Es wird eine andere Art Porträt entworfen, durch ein Bild, was zeigen soll, wie es sich nicht verhält, als durch eines, was zeigt wie es sich verhält. Würde man es ein Porträt nennen?

⁴⁷Die Farbangabe, daß etwas nicht rot ist, ist von anderer Art als die, daß etwas rot (oder blau) ist. D.h. sie ist nicht in dem gleichen Sinn eine Farbangabe.

⁴⁸Aber es *kann*⁴⁹ die Negation eines Satzes eine Angabe gleicher Art sein, wie der negierte Satz.

⁵⁰„Ich brauche im negativen Satz das intakte Bild des positiven Satzes.“

⁵¹„Ich kann ein Bild davon zeichnen, wie Zwei miteinander fechten; aber doch nicht davon, wie Zwei miteinander nicht fechten (d.h. nicht ein Bild, das bloß dies darstellt).

„Sie fechten nicht miteinander“ heißt nicht, daß davon nicht die Rede ist, sondern es *ist* eben davon die Rede und wird (nur) ausgeschlossen.“

- 111 ⁵²Die Idee der Negation ist nur in einer Zeichenerklärung verkörpert und soweit wir eine solche Idee besitzen, besitzen wir sie nur in der Form so einer Erklärung. Denn wenn man fragen kann „*was* meinst Du mit diesem Zeichen⁵³“, so ist die Antwort nur eine Zeichenerklärung (irgendeiner Art).

41 (M): überlegen

42 (V): Natur tun will.

43 (V): Zeichens ~~von~~

44 (V): darstellen

45 (V): sein soll, wäre, was es bedeutet, nicht am besten dadurch darzustellen, daß das im Zeichen *nicht* der Fall ist, was, wenn es der Fall wäre, darstellen würde, daß p der Fall ist. Es ist aber klar, daß so ein Symbolismus nicht funktioniert.

Es ist dafür keine Erklärung, zu sagen (was ich einmal sagte), ein solcher negativer Symbolismus ginge schon,

46 (M): /

47 (M): ꞑ ꞑ ///

48 (M): /

49 (V): Dagegen *kann*

50 (M): ///

51 (M): ꞑ ꞑ ꞑ ꞑ

52 (M): ꞑ

53 (V): Du damit

stepping in front of the door and holding it closed. But it would not be so obviously natural if I uttered those words as I opened the door for him. As they are understood in this case, these words obviously have something to do with that action.³²

The action is an illustration of the words, so to speak – it should be possible to understand it as a language. On the other hand, it is also the action that I undertake³³ naturally, apart from all symbolism.

But what about this thought: If “~p” is to be a picture, wouldn’t it most naturally represent the opposite of p by using the opposite of the sign “p”? In that case, we’d depict³⁴ the fact that two people are not fighting each other by depicting them as not fighting each other. Once I said that this kind of negative symbolism would be possible, but just not³⁵ usable, because one couldn’t find out from it *what* was negated. If it doesn’t tell us what we need, then it just isn’t a symbolism of negation. And then it is essentially deficient.

There is a reason, after all, why negative symbolism works in certain cases, and why, for example, no answer is also an answer. It’s because in these cases the meaning of silence has been established unambiguously.

³⁶A different type of portrait is created by a picture that is to show how things aren’t than by one that shows how things are. Would we call it a portrait?

³⁷The statement that something isn’t red is of a different kind from the one that something is red (or blue). That is, the former isn’t a statement about colour in the same sense as the latter.

³⁸But³⁹ the negation of a proposition *can* be a statement of the same kind as the negated proposition.

⁴⁰“In the negative proposition I need the complete, accurate picture of the positive proposition.”

⁴¹“I can draw a picture of two people fencing with each other; but not of two people not fencing with each other (i.e. not a picture that shows only that).

‘They’re not fencing with each other’ doesn’t mean that that isn’t being talked about. That’s precisely what *is* being talked about; it’s (just) that it’s being ruled out.”

⁴²The idea of negation is embodied only in the explanation of a sign, and in so far as we have such an idea, we have it only in the form of such an explanation. For when one asks “*What* do you mean by this sign⁴³”, the answer is nothing other than an explanation of a sign (of some kind).

32 (M): consider

33 (V): I want to undertake

34 (V): represent

35 (V): to be a picture, wouldn’t its meaning be best represented by that *not* being the case which, if it were the case, would represent that p is the case? But it’s clear that such a symbolism doesn’t work.

It is no explanation of this to say (as I once said) that such a negative symbolism would work, but just not be

36 (M): /

37 (M): ꞑ ꞑ ///

38 (M): /

39 (V): On the other hand,

40 (M): ///

41 (M): ꞑ ꞑ ///

42 (M): ꞑ

43 (V): by this

⁵⁴Den Begriff der Negation⁵⁵ besitzen wir nur in einem Symbolismus. Und darum kann man nicht sagen: „auf die und die Art kann man die Negation nicht darstellen, weil diese Art nicht eindeutig wäre“ – als handelte es sich um die Beschreibung eines Gegenstandes, die nicht eindeutig gegeben worden wäre. Wenn der Symbolismus nicht erkennen läßt, was verneint wurde, so verneint er nicht; wie ein Schachbrett ohne Felder kein schlechtes, d.h. unpraktisches Schachbrett ist, sondern keins. Und wenn ich glaubte, auf⁵⁶ einem Brett ohne Felder Schach spielen zu können, so habe ich das Spiel einfach mißverstanden und werde etwa jetzt auf das Mißverständnis⁵⁷ aufmerksam gemacht.

Ein Symbolismus, der die Negation „nicht darstellen kann“, ist kein Symbolismus der Negation.

⁵⁸Ich glaube, ein Teil der Schwierigkeit rührt vom Gebrauch der Wörter „ja“ und „nein“ her (auch „wahr“ und „falsch“). Diese beiden lassen es so erscheinen, als wäre ein Satz und sein Gegenteil im Verhältnis zweier Pole zueinander oder zweier entgegengesetzter Richtungen. Während schon, daß $\sim\sim p = p$ ist, eine doppelte Bejahung aber keine Verneinung ist, zeigen kann, daß dieses Bild falsch ist.

⁵⁹Wenn gefragt würde: ist die Verneinung⁶⁰ in der Mathematik, etwa in $\sim(2 + 2 = 5)$, die gleiche, wie die nicht-mathematischer Sätze? so müßte erst bestimmt werden, was als Charakteristikum dieser⁶¹ Verneinung als solcher aufzufassen ist. Die Bedeutung eines Zeichens liegt ja in den Regeln, die seinen Gebrauch vorschreiben.⁶² Welche dieser Regeln machen das Zeichen „ \sim “ zur Verneinung? Denn es ist klar, daß gewisse Regeln, die sich auf „ \sim “ beziehen, für beide Fälle die gleichen sind; z.B. $\sim\sim p = p$. Man könnte ja auch fragen: ist die Verneinung eines Satzes „ich sehe einen roten Fleck“ die gleiche, wie die von „die Erde bewegt sich in einer Ellipse⁶³ um die Sonne“; und die Antwort müßte auch sein: Wie hast Du „Verneinung“ definiert, durch welche Klasse von Regeln? – daraus wird sich ergeben, ob wir in beiden Fällen „die gleiche Verneinung“ haben. Wenn die Logik allgemein von der Verneinung redet, oder einen Kalkül mit ihr treibt, so ist die Bedeutung des Verneinungszeichens nicht weiter festgelegt, als die Regeln seines Kalküls. Wir dürfen hier nicht vergessen, daß ein Wort seine Bedeutung nicht als etwas, ihm ein für allemal verliehenes, mit sich herumträgt, sodaß wir sicher sind, wenn wir nach dieser Flasche greifen, auch die bestimmte Flüssigkeit, z.B. Spiritus, in der Hand zu halten.⁶⁴

54 (M): ? /

55 (V): Verneinung

56 (V): mit

57 (V): jetzt darauf

58 (M): /

59 (M): ü /

60 (V): Negation

61 (V): der

62 (V): in den Regeln, nach denen es verwendet wird.

63 (O): Elipse

64 (V): Flüssigkeit, etwa Spiritus, zu erwischen.
(R): \forall Siehe S. 106 letzter Satz

⁴⁴Only within a system of symbols do we possess the concept of negation. And therefore we can’t say: “You can’t represent negation in such-and-such a way because that wouldn’t be unambiguous” – as if it were a matter of not giving an unambiguous description of an object. If the system of symbols doesn’t allow one to recognize what was negated, then it doesn’t negate; just as a chess board without squares is not a bad, i.e. an impractical, chess board, but no chess board at all. And if I thought I could play chess on⁴⁵ a board without squares, then I have simply misunderstood the game and am now, perhaps, having my misunderstanding⁴⁶ pointed out to me.

A symbolism that “cannot represent” negation is not a symbolism of negation.

⁴⁷I think part of the difficulty derives from the use of the words “yes” and “no” (“true” and “false” as well). These two words make it appear as if a proposition and its contradictory were related to each other like two poles or two opposite directions. Whereas the simple fact that $\sim\sim p = p$, but that a double affirmation is not a negation, shows that this picture is false.

⁴⁸If someone asked: Is negation in mathematics, say in $\sim(2 + 2 = 5)$, the same as the negation of non-mathematical propositions? – then first of all we’d have to determine what is to be taken as characteristic of this⁴⁹ negation as such. After all, the meaning of a sign lies in the rules that prescribe its use.⁵⁰ Which of these rules turn the sign “ \sim ” into negation? For it is clear that certain rules that pertain to “ \sim ” are the same for both cases; e.g. $\sim\sim p = p$. One could also ask: Is the negation of the proposition “I see a red patch” the same as that of “The earth travels around the sun in an ellipse”? And again the answer would have to be: How, by what set of rules, did you define “negation”? – This will show whether we have “the same negation” in both cases. If logic talks about negation in general, or carries out a calculus with it, then the meaning of the sign for negation is not specified further than are the rules of its calculus. Here we mustn’t forget that a word doesn’t carry its meaning around with it as something that it was bequeathed once and for all, allowing us to be certain that when we reach for a particular bottle we’ll have a specific liquid in hand, say alcohol.⁵¹

44 (M): ? /

45 (V): with

46 (V): having this

47 (M): /

48 (M): r /

49 (V): the

50 (V): rules according to which it is used.

51 (V): bottle that we’re taking hold of a specific liquid, say alcohol. (R): \forall see p. 106 last sentence

113 Ist die Zeit den Sätzen wesentlich?
 Vergleich von: Zeit und
 Wahrheitsfunktionen.

Tritt¹ die Zeit in ein Landschaftsbild ein? oder in ein Stilleben?
 Literatur die aus Landschaftsschilderungen besteht.

²Die Grammatik, wenn sie in der Form eines Buches uns vorläge, bestünde nicht aus einer Reihe bloß nebengeordneter Artikel, sondern würde eine andere Struktur zeigen. Und in dieser müßte man – wenn ich Recht habe – auch den Unterschied zwischen Phänomenologischem und Nicht-Phänomenologischem sehen. Es wäre da etwa ein Kapitel von den Farben, worin der Gebrauch der Farbwörter geregelt wäre; aber dem vergleichbar wäre nicht, was über die Wörter „nicht“, „oder“, etc. (die „logischen Konstanten“) in der Grammatik gesagt würde.

³Es würde z.B. aus den Regeln hervorgehen, daß diese letzteren Wörter in jedem Satz anzuwenden seien (nicht aber die Farbwörter). Und dieses „jedem“ hätte nicht den Charakter einer erfahrungsmäßigen Allgemeinheit; sondern der inappellablen Allgemeinheit einer obersten Spielregel. Es scheint mir ähnlich, wie das Schachspiel wohl ohne gewisse Figuren zu spielen (oder doch fortzusetzen) ist, aber nie ohne das Schachbrett. [Das ist nicht wahr, man könnte ganz gut mit einem Teil des Brettes auskommen.]

114 ⁴Wie offenbart sich die Zeitlichkeit der Tatsachen, wie drückt sie sich aus, als dadurch, daß gewisse Ausdrücke⁵ in unsern Sätzen vorkommen müssen. D.h.: Wie drückt sich die Zeitlichkeit der Tatsachen aus, als grammatisch? „Zeitlichkeit“ damit ist nicht gemeint daß ich um 5h komme sondern daß ich irgendwann komme d.h. daß mein Satz die Struktur hat, die er hat.

113v ⁶Woher – möchte ich fragen – die Allgemeinheit der Zeitlichkeit der Erfahrungssätze?⁷

Könnte⁸ man auch so fragen: „Wie⁹ kommt es daß man alle Erfahrungstatsachen mit dem was eine Uhr zeigt in Verbindung bringen kann?“?

114 ¹⁰Negation und Disjunktion, möchten wir sagen, hat mit dem Wesen des Satzes zu tun, die Zeit aber nicht, sondern mit seinem Inhalt.

Wie aber kann es sich in der Grammatik zeigen, daß Etwas mit dem Wesen des Satzes zusammenhängt und etwas anderes nicht, wenn sie beide gleich allgemein sind?

1 (V): ~~Landsch~~ Tritt

2 (M): ///

3 (M): /// – Schachbrett.

4 (M): ?

5 (V): Wendungen

6 (M): /

7 (V): „Woher“ – möchte ich fragen – „die ~~ganz~~ allgemeine Zeitlichkeit der Sätze?“

8 (O): Konnte

9 (V): „Woher

10 (M): /

31

Is Time Essential to Propositions? Comparison between Time and Truth-Functions.

Does time enter into a painting of a landscape? Or into a still life?
Literature consisting of descriptions of landscapes.

¹If grammar were available to us in the form of a book it wouldn't consist of a series of equivalent items one after another, but would have a different structure. And it is in this structure – if I am right – that one could see the difference between the phenomenological and the non-phenomenological. For instance, there would be a chapter about colours, in which the rules for the use of colour-words would be laid down; but what would be said in this grammar about the words “not”, “or”, etc. (the “logical constants”) wouldn't be comparable to this.

²The rules would show, e.g., that these latter words (but not the colour-words) could be used in every sentence. And this “every” wouldn't have the character of an empirical generality, but of the unappealable generality of a cardinal rule of the game. This strikes me as similar to how chess can be played (in its later stages) without certain pieces, but never without a chess board. [That isn't true; one could manage quite well with only part of the board.]

³How does the temporality of facts manifest itself, express itself, other than by certain expressions⁴ having to occur in our sentences? That is: How does the temporality of facts express itself other than grammatically? “Temporality” doesn't mean that I'm coming at 5 o'clock, but that I'm coming at some time, i.e. that my sentence has the structure it has.

⁵Whence – I'm inclined to ask – does it arise that, in general, empirical propositions are temporal?⁶

Could one also put the question this way: “How does it come about⁷ that we can connect all empirical facts with what a clock shows?”?

⁸Negation and disjunction, we're inclined to say, have to do with the essence of a proposition, but not time, which has to do with its content.

But if two things are equally universal, how can it be shown in grammar that one thing is connected with the essence of the proposition and the other isn't?

1 (M): ///

2 (M): /// – chess board.

3 (M): ?

4 (V): certain turns of phrases

5 (M): /

6 (V): “Whence” – I'm inclined to ask – “does it arise that, ~~completely~~ generally, propositions are temporal?”

7 (V): way: “Where does it come from

8 (M): /

Oder sollte ich sagen, die geringere Allgemeinheit wäre auf seiten der Zeit, da die mathematischen Sätze negiert und disjungiert werden können, aber nicht zeitlich sind? Ein Zusammenhang ist wohl da, wenn auch diese Form, die Sache darzustellen, irreführend ist.¹¹

Das zeigt eben was ich unter „Satz“ oder dem „Wesen des Satzes“ verstehe.

¹²Wie unterscheidet die Grammatik zwischen Satzform und Inhalt? Denn dies soll ja ein grammatikalischer Unterschied sein. Wie sollte man ihn beschreiben können, wenn ihn die Grammatik nicht zeigt?

¹³Was hat es mit dem Schema „Es verhält sich so und so“ für eine Bewandnis? Man könnte sagen, das „Es verhält sich“ ist der Angriff für die Wahrheitsf.¹⁴

„Es verhält sich“ ist also nur ein Ausdruck aus einer Notation der Wahrheitsfunktionen. Ein Ausdruck, der uns zeigt, welcher Teil der Grammatik hier in Funktion tritt.

Jene Zweifache Art der Allgemeinheit wäre so seltsam, wie wenn von zwei Regeln eines Spiels, die beide gleich ausnahmslos gelten, die eine als die fundamentalere angesprochen würde. Als könnte man also darüber reden,¹⁵ ob der König oder das Schachbrett für das Schachspiel essentieller wäre. Welches von beiden das Wesentlichere, welches das Zufälligere wäre.

115 ¹⁶Zum mindesten scheint eine Frage berechtigt: Wenn ich die Grammatik aufgeschrieben hätte und die verschiedenen Kapitel, über die Farbwörter, etc. etc. der Reihe nach da stünden, wie Regeln über alle die Figuren des Schachspiels, wie wüßte ich dann, daß dies nun *alle* Kapitel sind? Und wenn sich nun in allen vorhandenen Kapiteln eine gemeinsame Eigentümlichkeit findet, so haben wir es hier scheinbar mit einer logischen Allgemeinheit, aber keiner wesentlichen, d.h. voraussehbaren Allgemeinheit, zu tun. Man kann aber doch nicht sagen, daß die Tatsache, daß das Schachspiel mit 16 Figuren gespielt wird, ihm weniger wesentlich ist, als, daß es auf dem Schachbrett gespielt wird.

¹⁷Da Zeit und Wahrheitsfunktionen so verschieden schmecken und da sie ihr Wesen allein und ganz in der Grammatik offenbaren, so muß die Grammatik den verschiedenen Geschmack erklären.

Das eine schmeckt nach Inhalt, das andere nach Darstellungsform.

Sie schmecken so verschieden, wie der Plan und der Strich durch den Plan.

¹⁸Es kommt mir so vor, als wäre die Gegenwart, wie sie in dem Satz „der Himmel ist blau“ steht (wenn dieser Satz nicht-hypothetisch gemeint ist), keine Form der Zeit. Als ob also die Gegenwart in *diesem* Sinne unzeitlich wäre.

¹⁹Es ist merkwürdig, daß die Zeit, von der ich hier rede, nicht die im physikalischen Sinne ist. Es handelt sich hier nicht um eine Zeitmessung. Und es ist verdächtig, daß etwas, was mit einer solchen Messung nichts zu tun hat, in den Sätzen eine ähnliche Rolle spielen soll, wie die physikalische Zeit in den Hypothesen der Physik.

11 (M): Lehrreich

12 (M): XXX

13 (M): ? / ✓ (R): [Zu § 18]

14 (V): ist die Handhabe für den Angriff der Wahrheitsfunktionen.

15 (V): also fragen,

16 (M): ///

17 (M): /

18 (M): ? /

19 (M): /

Or should I say that the lesser universality is on the side of time since mathematical propositions can be negated and can be stated as disjunctions, but are not temporal? There *is* a connection here, even if this form of representing the matter is misleading.⁹

That just shows what I understand by “proposition” or “essence of a proposition”.

¹⁰How does grammar distinguish between the form of a proposition and its content? For this is supposed to be a grammatical difference. How can one describe it, if grammar doesn’t show it?

¹¹What’s special about the schema “Things are so and so”? One could say, “Things are” is the starting-point for truth-functions.¹²

So “Things are” is only one expression from a notation of truth-functions. An expression that shows us which part of grammar is here coming into play.

Having two kinds of generality would be as strange as if two rules of a game were equally valid without exception, but one were pronounced the more fundamental. As if there could be a debate about¹³ whether the king or the chess board is more essential to chess; about which of the two is more essential, which is more accidental.

¹⁴At the least, one question seems justified: If I had written the book of grammar, and the various chapters on colour words, etc., etc., were there, one after the other, like the rules for all the chess pieces, how would I know that those were *all* the chapters? And if a common characteristic shows up in all of the existing chapters, then we seem to be dealing with a logical generality, but not one that’s essential, i.e. foreseeable. But we can’t say that the fact that chess is played with 16 pieces is any less essential to it than its being played on a chessboard.

¹⁵Since time and truth-functions have such different flavours and since they manifest their nature solely and completely in grammar, grammar has to explain their difference in flavour.

One tastes like content, the other like form of representation.

They taste as different as a map and a line crossing out the map.

¹⁶It seems to me that the present, as it occurs in the proposition “The sky is blue” (if this proposition is meant non-hypothetically) is not a temporal form. It’s as if in *this* sense the present were atemporal.

¹⁷It’s remarkable that time, as I am talking about it here, is not time in a physical sense. Here it’s not a matter of measuring time. And it’s suspicious that something that has nothing to do with such measurement should play a role in propositions similar to that which physical time plays in the hypotheses of physics.

9 (M): Instructive

14 (M): ///

10 (M): XXX

15 (M): /

11 (M): ? / ✓ (R): [To § 18]

16 (M): ? /

12 (V): is the handle for activating truth-functions.

17 (M): /

13 (V): As if one could ask

116 ²⁰Diskutiere:

Der Unterschied zwischen der Logik des Inhalts und der Logik der Satzform überhaupt. Das eine erscheint gleichsam bunt, das andere matt. Das eine scheint von dem zu handeln, was das Bild darstellt, das andere wie²¹ der Rahmen des Bildes ein Charakteristikum der Bildform zu sein.²²

²³Daß alle Sätze die Zeit in irgend einer Weise enthalten, scheint uns zufällig, im Vergleich damit, daß auf alle Sätze die Wahrheitsfunktionen anwendbar sind.

Das scheint mit ihrem Wesen als Sätzen zusammenzuhängen, das andere mit dem Wesen der vorgefundenen Realität.²⁴

Ein Satz kann in sehr verschiedenem Sinne die Zeit enthalten.

Du²⁵ tust mir weh!

Es ist herrliches Wetter draußen.

Der Inn fließt in die Donau.

Wasser gefriert bei 0°.

Ich verschreibe mich oft.

Vor einiger Zeit. . . .

Ich hoffe er wird kommen.

Um 5 Uhr. . . .

Diese Stahlsorte ist sehr gut.

Unsere Erde war einmal ein Gasball.

20 (M): ? /

21 (O): das andere, wie

22 (M): überlege

23 (M): ? /

24 (M): überlegen

25 (V): enthalten.

~~Ich habe Zahnschmerzen!~~

Du

¹⁸Discuss:

The difference between the logic of content and the logic of propositional form in general. The one seems to be bright, as it were, the other dull. The one seems to be about what the picture represents, the other seems to be a characteristic of the form of the picture, like its frame.¹⁹

²⁰That all propositions in some way contain time seems to us accidental in comparison to the fact that truth-functions can be applied to them all.

The latter seems to be connected with their nature as propositions, the former with the nature of the reality we encounter.²¹

A proposition can contain time in very different senses.

You're²² hurting me!

The weather outside is gorgeous.

The Inn flows into the Danube.

Water freezes at 0°.

I often make mistakes when I'm writing.

A while ago. . . .

I hope he'll come.

At 5 o'clock. . . .

This kind of steel is very good.

Our earth once was a ball of gas.

18 (M): ? /

19 (M): consider

20 (M): ? /

21 (M): consider

22 (V): senses.

~~I have a toothache!~~

You're

Wesen der Hypothese.

117

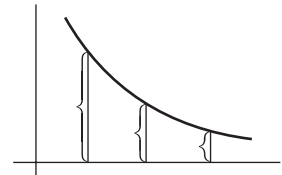
¹Eine Hypothese könnte man offenbar durch Bilder erklären. Ich meine, man könnte z.B. die Hypothese „hier liegt ein Buch“ durch Bilder erklären, die das Buch im Grundriß, Aufriß und verschiedenen Schnitten zeigen.

²Eine solche Darstellung gibt ein *Gesetz*. Wie die Gleichung einer Kurve ein Gesetz gibt, nach der die Ordinatenabschnitte aufzufinden sind, wenn man in verschiedenen Abszissen schneidet.³

Die fallweisen Verifikationen entsprechen dann solchen wirklich ausgeführten Schnitten.

Wenn unsere Erfahrungen die Punkte auf einer Geraden ergeben, so ist der Satz, daß diese Erfahrungen die verschiedenen Ansichten einer Geraden sind, eine Hypothese.

Die Hypothese ist eine Art der Darstellung dieser Realität, denn eine neue Erfahrung kann mit ihr übereinstimmen oder nicht-übereinstimmen, bezw. eine Änderung der Hypothese nötig machen.



118

⁴Drücken wir z.B. den Satz, daß eine Kugel sich in einer bestimmten Entfernung von unseren Augen befindet, mit Hilfe eines Koordinatensystems und der Kugelgleichung aus, so hat diese Beschreibung eine größere Mannigfaltigkeit, als die einer Verifikation durch das Auge. Jene Mannigfaltigkeit entspricht nicht *einer* Verifikation, sondern einem *Gesetz*, welchem Verifikationen gehorchen.

⁵Eine Hypothese ist ein Gesetz zur Bildung von Sätzen.

Man könnte auch sagen: Eine Hypothese ist ein Gesetz zur Bildung von Erwartungen.

Ein Satz ist sozusagen ein Schnitt durch eine Hypothese in einem bestimmten Ort.

⁶Nach meinem Prinzip müssen die beiden Annahmen⁷ ihrem Sinne nach identisch sein, wenn alle *mögliche* Erfahrung, die die eine bestätigt, auch die andere bestätigt. Wenn also keine Entscheidung zwischen beiden durch⁸ die Erfahrung denkbar ist.

Darstellung einer Linie als Gerade mit Abweichungen. Die Gleichung der Linie enthält einen Parameter, dessen Verlauf die Abweichungen von der Geraden ausdrückt.

1 (M): ∫

2 (M): ? /

3 (F): MS 107, S. 253.

4 (M): ? /

5 (M): ∫

6 (M): ∫

7 (E): In MS 107 (S. 287) steht Folgendes vor dieser Bemerkung: „Ist aber nicht doch ein Unterschied zwischen den Annahmen daß die Anderen Schmerzen haben und daß sie keine

haben & sich nur so benehmen wie ich, wenn ich welche habe?“ Weiter unten (Kapitel 104, S. 357) werden die beiden Bemerkungen folgendermaßen zusammengefaßt: „Die beiden Hypothesen, daß die Anderen Schmerzen haben, und die, daß sie keine haben, und sich nur so benehmen wie ich, wenn ich welche habe, müssen ihrem Sinne nach identisch sein, wenn . . . denkbar ist.“

8 (O): zwischen durch

The Nature of Hypothesis.

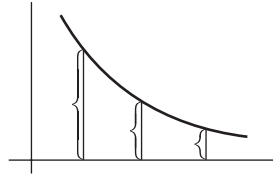
¹Obviously you could explain a hypothesis with pictures. I mean you could for example explain the hypothesis “There’s a book lying here” with pictures showing the book in plan, elevation and various cross-sections.

²Such a representation produces a *law*. Just as the equation of a curve produces a law, an equation you can use to discover the intercepts on the ordinate when you make cuts at various points on the abscissa.³

The verifications of particular cases then correspond to such cuts as are actually made.

If our experiences produce points on a straight line, the proposition that these experiences are various sections of a straight line is a hypothesis.

The hypothesis is a way of representing this reality, for a new experience may tally with it or not – or it may force us to modify the hypothesis.



⁴If for instance we use a system of coordinates and the equation for the sphere to express the proposition that a sphere is located at a certain distance from our eyes, this description has a greater multiplicity than one verified by eye. The first multiplicity corresponds not to a *single* verification but to a *law* that governs verifications.

⁵A hypothesis is a law for forming propositions.

One could also say: A hypothesis is a law for forming expectations.

A proposition is, so to speak, a section of a hypothesis at a certain point.

⁶According to my principle the two suppositions⁷ must be identical in sense if any *possible* experience that confirms the one also confirms the other. In other words, if no distinction between the two is conceivable based on experience.

Representation of any line as a straight line with deviations. The equation for the line contains a parameter, the course of which expresses the deviations from a straight line. It’s not

1 (M): J

2 (M): ? /

3 (F): MS 107, p. 253.


4 (M): ? /

5 (M): J

6 (M): J

7 (E): In MS 107 (p. 287) this remark is preceded by the remark: “But still, isn’t there a difference

between the suppositions that others are in pain, and that they aren’t but only behave the way I do when I am in pain?” Later in this TS (Ch. 104, p. 357e) the two remarks get combined: “The two hypotheses, the one that others are in pain, the other that they are not in pain but are only behaving the way I do when I am in pain, must be identical . . . between the two.”

Es ist nicht wesentlich, daß diese Abweichungen „gering“ seien. Sie können so groß sein, daß die Linie einer Geraden nicht ähnlich sieht.⁹ A  B
Die „Gerade mit Abweichungen“ ist nur eine Form der Beschreibung. Sie erleichtert es mir, einen bestimmten Teil der Beschreibung auszuschalten, zu vernachlässigen, wenn ich will. (Die Form „Regel mit Ausnahmen“.)

¹⁰Was heißt es, sicher zu sein, daß man Zahnschmerzen haben wird. (*Kann* man nicht sicher sein, dann erlaubt es die Grammatik nicht, das Wort „sicher“ in dieser Verbindung zu gebrauchen.)

Grammatik des Wortes „sicher sein“.

119 ¹¹Man sagt: „Wenn ich sage, daß ich einen Sessel dort sehe, so sage ich mehr, als ich sicher weiß“. Und nun heißt es meistens: „Aber *eines* weiß ich doch sicher“. Wenn man aber nun sagen will, was das ist, so kommt man in eine gewisse Verlegenheit.

„Ich sehe etwas *Braunes* – das ist sicher“; damit will man eigentlich sagen, daß die braune Farbe gesehen, und nicht vielleicht auch bloß aus anderen Anzeichen vermutet ist.¹² Und man sagt ja auch einfach: „Etwas Braunes *sehe* ich“.

¹³Wenn mir gesagt wird: „Sieh in dieses Fernrohr und zeichne mir auf, was Du siehst“, so ist, was ich zeichne, der Ausdruck eines Satzes, nicht einer Hypothese.

¹⁴Wenn ich sage „hier steht ein Sessel“, so ist damit – wie man sagt – „mehr“ gemeint, als die Beschreibung dessen, was ich wahrnehme. Und das kann nur heißen, daß dieser Satz nicht wahr sein muß, auch wenn die Beschreibung des Gesehenen stimmt. Unter welchen Umständen werde ich nun sagen, daß jener Satz nicht wahr war? Offenbar: wenn gewisse andere Sätze nicht wahr sind, die in dem ersten mit beinhaltet waren. Aber es ist nicht so, als ob nun der erste ein logisches Produkt gewesen wäre.

¹⁵Das beste Gleichnis für jede Hypothese, und selbst ein Beispiel, ist ein Körper mit seinen nach einer bestimmten Regel konstruierten Ansichten aus den verschiedenen Punkten des Raumes.

120 ¹⁶Der Vorgang einer Erkenntnis in einer wissenschaftlichen Untersuchung (in der Experimentalphysik etwa) ist freilich nicht der einer Erkenntnis im Leben außerhalb des Laboratoriums;¹⁷ aber er ist ein *ähnlicher* und kann, neben den andern gehalten,¹⁸ diesen beleuchten.

¹⁹Es ist ein wesentlicher Unterschied zwischen Sätzen wie „das ist ein Löwe“, „die Sonne ist größer als die Erde“, die alle ein „dieses“, „jetzt“, „hier“ enthalten und also an die Realität unmittelbar anknüpfen, und Sätzen wie „Menschen haben zwei Hände“ etc. Denn, wenn zufällig keine Menschen in meiner Umgebung wären, wie wollte ich diesen Satz kontrollieren?

9 (F): MS 107, S. 224.

10 (M): ? /

11 (M): ü /

12 (V): und nicht vielleicht auch nur // bloß // vermutet ist (wie etwa in dem Fall, wo ich es // sie // aus gewissen anderen Anzeichen vermute).

13 (M): J

14 (M): J /


15 (M): ? /

16 (M): /

17 (V): außerhalb dem Laboratorium;

18 (V): gestellt,

19 (M): J

essential that these deviations be “minor”. They can be so large that the line looks nothing like a straight line.⁸ A  B “Straight line with deviations” is only a form of description. It makes it easier for me to eliminate a certain part of the description, to neglect it, if I want to. (The form “rule with exceptions”.)

⁹What does it mean to be certain that one will have a toothache? (If one *cannot* be certain, then grammar doesn’t allow the use of the word “certain” in this connection.)

The grammar of the expression “to be certain”.

¹⁰We say: “If I say that I see a chair over there, I’m saying more than I know for certain”. And then we usually go on: “But *one thing* I do know for certain”. But if we now want to say what this is, we get into a predicament of sorts.

“I see something *brown* – that’s for certain”: this really means that the brown colour has been seen and not, say, merely been surmised from other indications.¹¹ And indeed we do simply say: “I *see* something brown”.

¹²If I am told: “Look into this telescope and draw what you see”, then what I draw is the expression of a proposition, not of a hypothesis.

¹³If I say “Here there’s a chair” then “more” is meant by this – as we say – than the description of what I perceive. And that can only mean that this proposition doesn’t have to be true, even if the description of what I saw is correct. Well, under what circumstances am I going to say that that proposition wasn’t true? Obviously: if certain other propositions that were contained in the original are not true. But it isn’t as if the original were a logical product.

¹⁴The best simile for any hypothesis – which is itself an example of a hypothesis – is a solid, along with various views of it that are constructed using a particular rule, from various points in space.

¹⁵To be sure, the process that leads to a piece of knowledge in a scientific investigation (say in experimental physics) is not the same as one that leads to a piece of knowledge in life outside the laboratory; but it is *similar* and, when held¹⁶ next to the latter, can shed light on it.

¹⁷There is an essential difference between propositions such as “That’s a lion”, and “The sun is larger than the earth”, all of which contain a “this”, “now”, “here”, and therefore connect to reality directly, and propositions such as “Humans have two hands”, etc. For if by chance no human beings were around, how would I go about checking this proposition?

8 (F): MS 107, p. 224.

9 (M): ? /

10 (M): r /

11 (V): not, say, // merely // been surmised (as in the case where I surmise it from certain other indications).

12 (M): ∫

13 (M): ∫ /

14 (M): ? /

15 (M): /

16 (V): placed

17 (M): ∫

²⁰Es werden immer Facetten²¹ der Hypothese verifiziert.

²²Ist es nun nicht etwa so, daß *das*, was die Hypothese erklärt, selbst nur wieder durch eine Hypothese ausdrückbar ist. Das heißt natürlich: gibt es überhaupt primäre Sätze; die also endgültig verifizierbar sind, und nicht die Facetten²³ einer Hypothese sind? (Das ist etwa, als würde man fragen „gibt es Flächen, die nicht Oberflächen von Körpern sind?“)

²⁴Es kann jedenfalls kein Unterschied sein zwischen einer Hypothese, als Ausdruck einer unmittelbaren Erfahrung gebraucht, und einem Satz im engeren Sinne.

²⁵Es ist ein Unterschied zwischen einem Satz wie „hier liegt eine Kugel vor mir“ und „es schaut so aus, als läge eine Kugel vor mir“. – Das zeigt sich auch so: man kann sagen „es scheint eine Kugel vor mir zu liegen“, aber es ist sinnlos zu sagen: „es schaut so aus, als schiene eine Kugel hier zu liegen“. Wie man auch sagen kann „hier liegt wahrscheinlich eine Kugel“, aber nicht „wahrscheinlich scheint hier eine Kugel zu liegen“. Man würde in so einem Falle sagen: „ob es *scheint*, mußt Du doch wissen“.

121 ²⁶In dem, was den Satz mit der gegebenen Tatsache verbindet, ist nichts Hypothetisches.

²⁷Es ist doch klar, daß eine Hypothese von der Wirklichkeit – ich meine von der unmittelbaren Erfahrung – einmal mit ja, einmal mit nein beantwortet wird; (wobei freilich das „ja“ und „nein“ hier nur Bestätigung und Fehlen der Bestätigung ausdrückt) und daß man dieser Bejahung und Verneinung Ausdruck verleihen kann.

²⁸Die Hypothese wird, mit *der* Facette²⁹ an die Realität angelegt, zum Satz.

³⁰Ob der Körper, den ich sehe, eine Kugel ist, kann zweifelhaft sein, aber, daß er von hier etwa eine Kugel zu sein scheint, kann nicht zweifelhaft sein. – Der Mechanismus der Hypothese würde nicht funktionieren, wenn der Schein noch zweifelhaft wäre; wenn also auch nicht eine Facette³¹ der Hypothese unzweifelhaft verifiziert würde. Wenn es hier Zweifel gäbe, was könnte den Zweifel heben? Wenn auch diese Verbindung locker wäre, so gäbe es auch nicht Bestätigung einer Hypothese, die Hypothese hinge dann gänzlich in der Luft und wäre zwecklos (und damit sinnlos).

³²Wenn ich sagte „ich sah einen Sessel“; so widerspricht dem (in *einem* Sinne) nicht der Satz „es war keiner da“. Denn den ersten Satz würde ich auch in der Beschreibung eines Traums verwenden und niemand würde mir dann mit den Worten des zweiten widersprechen. Aber die Beschreibung des Traums mit jenen Worten wirft ein Licht auf den Sinn der Worte „*ich sah*“.

In dem Satz „es war ja keiner da“ kann das „da“ übrigens verschiedene Bedeutung haben.

122 ³³Ich stimme mit den Anschauungen neuerer Physiker überein,³⁴ wenn sie sagen, daß die Zeichen in ihren Gleichungen keine „Bedeutungen“ mehr haben, und daß die Physik zu keinen solchen Bedeutungen gelangen könne, sondern bei den Zeichen stehen bleiben müsse: sie sehen

20 (M): ! /

21 (O): Fassetten

22 (M): ∫

23 (O): Fassetten

24 (M): /

25 (M): ? /

26 (M): ∫

27 (M): ∫

28 (M): ? ∫

29 (O): Fassette

30 (M): ∫

31 (O): Fassette

32 (M): ? /

33 (M): ? /

34 (E): In einem früheren Manuskript (107, S. 223) heißt es spezifischer: „Die Anschauungen neuerer Physiker (Eddington) stimmen ganz mit der meinen überein, . . .“

¹⁸It's always facets of a hypothesis that are verified.

¹⁹Isn't it more or less the case that *what* a hypothesis explains can itself be expressed only by a hypothesis? Of course this means: Are there such things as primary propositions at all; that is to say, propositions that are definitively verifiable, and are not facets of a hypothesis? (That is somewhat like asking "Are there surfaces that aren't surfaces of solids?")

²⁰In any case, there can be no difference between a hypothesis used as an expression of an immediate experience and a proposition in the narrower sense.

²¹There is a difference between a proposition such as "There's a ball lying in front of me" and "It looks as if there were a ball lying in front of me". – This also comes out this way: One can say: "There seems to be a ball lying in front of me", but it makes no sense to say: "It looks as if there seemed to be a ball lying here". Just as one can also say "There's probably a ball lying here", but not "Probably a ball seems to be lying here". In such a case one would say: "Surely you must know whether it *seems*".

²²There is nothing hypothetical in what connects a proposition to a given fact.

²³It's clear that a hypothesis is answered by reality – I mean by immediate experience – sometimes with a "yes" and sometimes with a "no" (here "yes" and "no" only express confirmation and lack of confirmation, to be sure), and that one can give expression to this affirmation and denial.

²⁴When *this* facet of a hypothesis is laid alongside reality, the hypothesis turns into a proposition.

²⁵Whether the body I see is a sphere may be doubtful, but that from here, say, it seems to be a sphere cannot be doubtful. – The mechanism of hypothesis would not work if appearance were still in doubt, i.e. if not even one facet of the hypothesis were verified beyond a doubt. If there were doubt there, what could remove it? If this connection too were loose, then there also wouldn't be any such thing as the confirmation of a hypothesis; it would be completely suspended in air and would be pointless (and thus senseless).

²⁶If I were to say "I saw a chair", then (in *one* sense) the proposition "There wasn't any chair there" doesn't contradict that. For I could also use the first proposition in describing a dream, and then nobody who used the words of the second would contradict me. But the description of the dream that uses those words sheds light on the sense of the words "*I saw*".

In the proposition "But there wasn't any chair there", "there" can have various meanings, by the way.

²⁷I agree with the views of contemporary physicists²⁸ when they say that the signs in their equations no longer have any "meanings" and that physics cannot arrive at any such meanings, but has to stop at the signs: for they don't see that these signs have meaning in

18 (M): ! /

19 (M): §

20 (M): /

21 (M): ? /

22 (M): §

23 (M): §

24 (M): ? §

25 (M): §

26 (M): ? /

27 (M): ? /

28 (E): In an earlier version of this remark (MS 107, p. 223) Wittgenstein has: "My view agrees completely with those of modern physicists (Eddington) . . .".

nämlich nicht, daß diese Zeichen insofern Bedeutung haben – und nur insofern – als ihnen, auf welchen Umwegen immer, das beobachtete Phänomen entspricht, oder nicht entspricht.

³⁵Denken wir uns, daß das Schachspiel nicht als Brettspiel erfunden worden wäre, sondern als Spiel, das mit Ziffern und Buchstaben auf Papier zu spielen ist und so, daß sich niemand dabei ein Quadrat mit 64 Feldern etc. vorgestellt hätte. Nun aber hätte jemand die Entdeckung gemacht, daß dieses Spiel ganz einem entspricht, das man auf einem Brett in der und der Weise spielen könnte. Diese Erfindung wäre eine große Erleichterung des Spiels gewesen (Leute, denen es früher zu schwer gewesen wäre, könnten es nun spielen). Aber es ist klar, daß diese neue Illustration der Spielregeln nur ein neuer, leichter übersehbarer, Symbolismus wäre, der übrigens mit dem Geschriebenen auf gleicher Stufe stünde. Vergleiche nun damit das Gerede darüber, daß die Physik heute nicht mehr mit mechanischen Modellen, sondern „nur mit Symbolen“ arbeitet.

35 (M): /

so far – and only in so far – as a phenomenon that has been observed corresponds to them or doesn't, no matter how roundabout the way.

²⁹Let's imagine that chess hadn't been invented as a board game, but as a game to be played with numbers and letters on paper, and in such a way that nobody had imagined a square subdivided into 64 smaller squares, etc. But now someone has discovered that this game corresponds exactly to one that could be played on a board in such and such a way. This invention has made the game much easier (people for whom it had been too difficult previously can now play it). But it is clear that this new illustration of the rules of the game would only be a new, more easily surveyable symbolism, which in other respects would be on the same level as the game that's written. Now compare with this the prattle that physics nowadays no longer works with mechanical models but "only with symbols".

Wahrscheinlichkeit.

123

¹Die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese hat ihr Maß darin, wieviel Evidenz nötig ist, um es vorteilhaft zu machen, sie umzustoßen.

Nur in diesem Sinne kann man sagen, daß wiederholte gleichförmige Erfahrung in der Vergangenheit das Andauern dieser Gleichförmigkeit in der Zukunft wahrscheinlich macht.

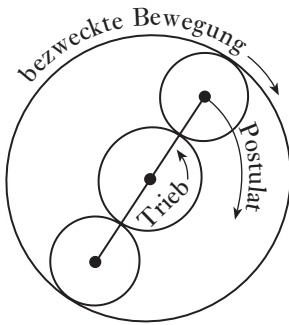
Wenn ich nun in diesem Sinne sage: Ich nehme an, daß morgen die Sonne wieder aufgehen wird, weil das Gegenteil zu unwahrscheinlich ist, so meine ich hier mit „wahrscheinlich“ oder „unwahrscheinlich“ etwas ganz Anderes, als mit diesen Worten im Satz „es ist gleich wahrscheinlich, daß ich Kopf oder Adler werfe“ gemeint ist. Die beiden Bedeutungen des Wortes „wahrscheinlich“ stehen zwar in einem gewissen Zusammenhang, aber sie sind nicht identisch.

²Man gibt die Hypothese nur um einen immer höheren Preis auf.

³Die Induktion ist ein Vorgang nach einem ökonomischen Prinzip.

124

⁴Die Frage der Einfachheit der Darstellung durch eine bestimmte angenommene Hypothese hängt, glaube ich, unmittelbar mit der Frage der Wahrscheinlichkeit zusammen.



⁵Man kann einen Teil einer Hypothese vergleichen mit der Bewegung eines Teils eines Getriebes, einer Bewegung, die man festlegen kann, ohne dadurch die bezweckte Bewegung zu präjudizieren. Wohl aber hat man dann das übrige Getriebe auf eine bestimmte Art einzurichten, daß es die gewünschte Bewegung hervorbringt. Ich denke an ein Differentialgetriebe. – Habe ich die Entscheidung getroffen, daß von einem gewissen Teil meiner Hypothese nicht abgewichen werden soll, was immer die zu beschreibende Erfahrung sei, so habe ich eine Darstellungsweise festgelegt und jener Teil der Hypothese ist nun ein Postulat. Ein

Postulat muß von solcher Art sein, daß keine denkbare Erfahrung es widerlegen kann, wenn es auch äußerst unbequem sein mag, an dem Postulat festzuhalten. In dem Maße, wie man hier von einer größeren oder geringeren Bequemlichkeit reden kann, gibt es eine größere oder geringere Wahrscheinlichkeit des Postulats.

⁶Von einem Maß dieser Wahrscheinlichkeit zu reden, ist nun vor⁷ der Hand sinnlos. Es verhält sich hier ähnlich wie im Falle, etwa, zweier Zahlenarten, wo wir mit einem

1 (M): ? /

2 (M): ? /

3 (M): ? /

4 (M):]

5 (M): / (F): MS 108, S. 109.

6 (M): ? /

7 (V): von

33

Probability.

¹The probability of a hypothesis is measured in terms of how much evidence is needed to make it profitable to overturn it.

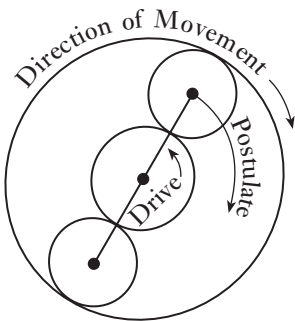
Only in this sense can we say that repeated uniform experience in the past makes the continuance of this uniformity probable in the future.

Now if in this sense I say: "I assume that the sun will rise again tomorrow because the opposite is too improbable", then here I mean something entirely different by "probable" or "improbable" from what I mean by these words in the proposition "It's equally probable that I'll throw heads or tails". The two meanings of the word "probable" have a certain connection, to be sure, but they are not identical.

²We give up a hypothesis only for an ever higher gain.

³Induction is a process based on an economic principle.

⁴The question, how simple is the account that results from assuming a particular hypothesis, is directly connected, I believe, with the question of probability.




⁵One can compare a part of a hypothesis with the movement of a part of a gear train, a movement that can be established without thereby prejudging the intended motion. But then of course one does have to make appropriate adjustments to the rest of the train for it to produce the desired motion. I'm thinking of differential gearing. – If I've decided that there is to be no deviation from a certain part of my hypothesis, no matter what the experience to be described may be, then I've stipulated a mode of representation, and that part of the hypothesis is now a postulate. A postulate must be irrefutable by any conceivable experience, even though clinging to it may be extremely inconvenient. To the extent that one can speak here of greater or lesser convenience there is a greater or lesser probability of the postulate.

⁶At this point it makes no sense to talk about a measure for this probability. The situation here is like that, say, of two kinds of numbers, where we can say with a certain amount

1 (M): ? /
2 (M): ? /
3 (M): ? /

4 (M):]
5 (M): / (F): MS 108, p. 109.
6 (M): ? /

gewissen Recht sagen können, die eine sei der andern ähnlicher (stehe ihr näher) als einer dritten, ein zahlenmäßiges Maß der Ähnlichkeit aber nicht existiert. Man könnte sich natürlich auch in solchen Fällen ein Maß konstruiert denken, indem man etwa die Postulate oder Axiome zählt, die beide Systeme gemein haben, etc. etc.

⁸Ich gebe jemandem die Information und nur diese: A  B
Du wirst um die und die Zeit auf der Strecke AB einen Lichtpunkt erscheinen sehen. Hat nun die Frage einen Sinn, „ist es wahrscheinlicher, daß dieser Punkt im Interval AC erscheint, als in CB“? Ich glaube, offenbar nein. – Ich kann freilich bestimmen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis in CB eintritt, sich zu der, daß es in AC eintritt, verhalten soll, wie $\frac{CB}{AC}$, aber das ist eine Bestimmung, zu der ich empirische Gründe haben kann, aber a priori ist darüber nichts zu sagen. Die beobachtete Verteilung von Ereignissen kann mich⁹ zu dieser Annahme führen. Die Wahrscheinlichkeit, wo unendlich viele Möglichkeiten in Betracht kommen, muß natürlich als Limes betrachtet werden. Teile ich nämlich die Strecke AB in beliebig viele, beliebig ungleiche Teile und betrachte die Wahrscheinlichkeiten, daß das Ereignis in irgend einem dieser Teile stattfindet, als untereinander gleich, so haben wir sofort den einfachen Fall des Würfels vor uns. Und nun kann ich ein Gesetz – willkürlich – aufstellen, wonach Teile gleicher Wahrscheinlichkeit gebildet werden sollen. Z.B., das Gesetz, daß gleiche Länge der Teile gleiche Wahrscheinlichkeit bedingt.¹⁰ Aber auch jedes andere Gesetz ist gleichermaßen erlaubt.

Könnte ich nicht auch im Fall des Würfels etwa 5 Flächen zusammennehmen als eine Möglichkeit und sie der sechsten als der zweiten Möglichkeit gegenüberstellen? Und was, außer der Erfahrung, kann mich hindern, diese beiden Möglichkeiten als gleich wahrscheinlich zu betrachten?

Denken wir uns etwa einen roten Ball geworfen, der nur eine ganz kleine grüne Calotte hat. Ist es in diesem Fall nicht viel wahrscheinlicher, daß er auf dem roten Teil auffällt, als auf dem grünen? – Wie würde man aber diesen Satz begründen? Wohl dadurch, daß der Ball, wenn man ihn wirft, viel öfter auf die rote, als auf die grüne Fläche auffällt. Aber das hat nichts mit der Logik zu tun. – Man könnte die rote und grüne Fläche und die Ereignisse, die auf ihnen stattfinden, immer auf solche Art auf eine Fläche projizieren, daß die Projektion der grünen Fläche gleich oder größer wäre als die der roten; so, daß die Ereignisse, in dieser Projektion betrachtet, ein ganz anderes Wahrscheinlichkeitsverhältnis zu haben scheinen, als auf der ursprünglichen Fläche. Wenn ich z.B. die Ereignisse in einem geeigneten gekrümmten Spiegel sich abbilden lasse und mir nun denke, was ich für das wahrscheinlichere Ereignis gehalten hätte, wenn ich nur das Bild im Spiegel sehe.

Dasjenige, was der Spiegel nicht verändern kann, ist die Anzahl bestimmt umrissener Möglichkeiten. Wenn ich also auf meinem Ball n Farbenflecke habe, so zeigt der Spiegel auch n, und habe ich *bestimmt*, daß diese als gleich wahrscheinlich gelten sollen, so kann ich diese Bestimmung auch für das Spiegelbild aufrecht erhalten.


Um mich noch deutlicher zu machen: Wenn ich das Experiment im Hohlspiegel ausführe, d.h. die *Beobachtungen* im Hohlspiegel mache, so wird es vielleicht scheinen, als fiel der Ball öfter auf die kleine Fläche, als auf die viel größere und es ist klar, daß keinem der Experimente – im Hohlspiegel und außerhalb – ein Vorzug gebührt.

8 (M): / (F): MS 108, S. 110.

10 (V): bedingt.

9 (O): nicht (E): Auf Grund von MS 108 (S. 111) geändert.

of justification that one of them is more like (is closer to) the other than a third, but where there isn't any numerical measure of this likeness. Of course one could imagine a measure being constructed in such cases too, say by counting the postulates or axioms common to the two systems, etc. etc.

⁷I give someone this – and only this – information: At A  B such and such a time you will see a point of light appear on the segment AB. Now does this question make sense:

“Is it more probable that this point will appear in the segment AC than in CB”? Obviously not, I believe. – To be sure, I can stipulate that the probability of the event happening in CB should relate to its probability of occurring in AC as $\frac{CB}{AC}$, but that is a stipulation for which I might have empirical grounds; nothing can be said about it *a priori*. The observed distribution of events can lead me to⁸ this assumption. Where an infinite number of possibilities come into consideration, probability must of course be viewed as a limit. For if I divide the segment AB into an arbitrary number of arbitrarily unequal parts and view the probabilities that the event will take place in any one of these parts as equal to every other, then we are immediately faced with the simple case of a die. And now I can – arbitrarily – posit a law for constructing parts that have an equal probability. For instance, the law that parts of equal length are equally probable. But any other law is just as permissible.

In the case of the die, couldn't I also subsume, say, 5 faces as one possibility and oppose them to the sixth as a second possibility? And what, apart from experience, can prevent me from regarding these two possibilities as equally probable?

Let's imagine, for example, a red ball with just a very small green patch on it being thrown in the air. In this case isn't it much more probable that it will land on the red part than on the green? – But how would one justify this proposition? Presumably by pointing out that when the ball is thrown it lands much more often on its red than on its green surface. But that's got nothing to do with logic. – One could always project the red and green surfaces and the incidences of their landings onto another surface in such a way that the projection of the green surface would be equal to or greater than that of the red; so that the incidences as viewed in this projection seem to have a totally different probability ratio than on the original surface. As would happen, for example, if I have the incidences reflected in a suitably curved mirror, and now imagine what I would have taken to be the more probable event if I had seen only the image in the mirror.

What the mirror cannot change is the number of clearly defined possibilities. So if I have n colour patches on the ball then the mirror too shows n , and if I have *stipulated* that they are to count as equally probable, then I can also maintain this stipulation for the image in the mirror.

To make myself even clearer: If I conduct the experiment with a concave mirror, i.e. make the *observations* in a concave mirror, then it might seem as if the ball were falling more often on its smaller surface than on its much larger one, and it's clear that neither the experiment in the concave mirror nor the one outside it is privileged.

7 (M): / (F): MS 108, p. 110.

8 (O): cannot lead to (E): We have made this correction on the basis of the corresponding passage in MS 108 (p. 111).

¹¹Wir können unser altes Prinzip auf die Sätze, die eine Wahrscheinlichkeit ausdrücken, anwenden und sagen, daß wir ihren Sinn erkennen werden, wenn wir bedenken, was sie verifiziert.

Wenn ich sage „das wird wahrscheinlich eintreffen“, wird dieser Satz durch das Eintreffen verifiziert, oder durch das Nichteintreffen falsifiziert? Ich glaube, offenbar nein. Dann sagt er auch nichts darüber aus. Denn, wenn ein Streit darüber entstünde, ob es
127 wahrscheinlich ist oder nicht, so würden immer nur Argumente aus der Vergangenheit herangezogen werden. Und auch dann nur, wenn es bereits bekannt wäre, was eingetroffen ist.

¹²Die Kausalität beruht auf einer beobachteten Gleichförmigkeit. Nun ist zwar nicht gesagt, daß eine bisher beobachtete Gleichförmigkeit immer so weiter gehen wird, aber, daß die Ereignisse bisher gleichförmig waren, muß feststehen; *das* kann nicht wieder das unsichere Resultat einer empirischen Reihe sein, die selbst auch wieder nicht gegeben ist, sondern von einer ebenso unsicheren abhängt, u.s.f. ad inf.

¹³Wenn Leute sagen, der Satz „es ist wahrscheinlich, daß p eintreffen wird“ sage etwas über das Ereignis p, so vergessen sie, daß es auch wahrscheinlich bleibt, wenn das Ereignis p *nicht* eintritt.

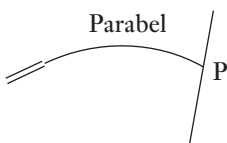
¹⁴Wir sagen mit dem Satz „p wird wahrscheinlich eintreffen“ zwar etwas über die Zukunft, aber nicht¹⁵ etwas „über das Ereignis p“, wie die grammatische Form der Aussage uns glauben macht.

¹⁶Wenn ich nach dem Grund einer Behauptung frage, so ist die Antwort auf diese Frage nicht für den Gefragten und eben *diese* Handlung (die Behauptung), sondern *allgemein* gültig.

¹⁷Wenn ich sage: „das Wetter deutet auf Regen“, sage ich etwas über das zukünftige Wetter? Nein, sondern über das gegenwärtige, mit Hilfe eines Gesetzes, welches das Wetter zu einer Zeit mit dem Wetter in einer früheren¹⁸ Zeit in Verbindung bringt. Dieses Gesetz muß bereits vorhanden sein, und mit seiner Hilfe fassen wir gewisse Aussagen über unsere Erfahrung zusammen. –
128

Aber dasselbe könnte man dann auch für historische Aussagen behaupten. Aber es war ja auch vorschnell, zu sagen, der Satz „das Wetter deutet auf Regen“ sage nichts über das zukünftige Wetter. Das kommt darauf an, was man darunter versteht, „etwas über etwas auszusagen“. Der Satz sagt eben seinen Wortlaut!

Er sagt¹⁹ nur etwas über die Zukunft in einem Sinn, in welchem seine Wahr- und Falschheit gänzlich unabhängig ist von dem, was in der Zukunft geschehen wird.



²⁰Wenn wir sagen, „das Gewehr zielt jetzt auf den Punkt P“, so sagen wir nichts darüber, wohin der Schuß treffen wird. Der Punkt auf den es zielt, ist ein *geometrisches* Hilfsmittel zur Angabe seiner Richtung. Daß wir gerade dieses Mittel verwenden, hängt allerdings mit gewissen Beobachtungen²¹ zusammen (Wurfparabel, etc.), aber diese treten jetzt nicht in die Beschreibung der Richtung ein.

11 (M): /

12 (M): ∫

13 (M): ∫

14 (M): ∫

15 (V): Zukunft, nicht

16 (M): ∫

17 (M): † /

18 (V): mit dem Wetter zu einer späteren

19 (V): Der Satz „p wird wahrscheinlich eintreten“ sagt

20 (M): ? / (F): MS 113, S. 2r.

21 (V): Erfahrungen

⁹We can apply our old principle to propositions that express a probability, and say that we shall discover their sense when we consider what verifies them.

If I say “That will probably occur”, is this proposition verified by its occurrence or falsified by its non-occurrence? Obviously not, I believe. Then neither does it say anything about it. For if a disagreement developed as to whether it is probable or not, then only arguments from the past would be marshalled. And even this would happen only if what has occurred were already known.

¹⁰Causality depends on an observed regularity. Now to be sure, it isn’t certain that a regularity so far observed will continue this way forever, but what has to be certain is that the events have been regular up until now; *that* cannot be the uncertain result of an empirical series that in turn isn’t a given, but depends on one that is equally uncertain, and so on *ad infinitum*.

¹¹When people say that the proposition “It is probable that p will occur” says something about the event p, they forget that it remains probable even if the event p does *not* occur.

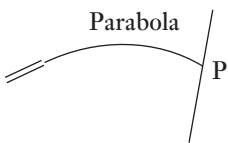
¹²When we utter the sentence “p will probably occur” we do say something about the future, to be sure, but not¹³ something “*about* the event p”, as the grammatical form of the statement would have us believe.

¹⁴If I ask for the grounds of an assertion, the answer to this question is not valid for the person I asked and for *this* specific action (the assertion), but *in general*.

¹⁵If I say “The weather looks like rain” am I saying anything about future weather? No, rather something about the present weather, with the help of a law that connects the weather at a certain time with the weather at an earlier¹⁶ time. This law must already exist, and with its help we summarize certain statements about our experience. –

But one could also say the same for historical statements. So it really was rash to say that the proposition “The weather looks like rain” doesn’t say anything about future weather. It depends on what you understand by “saying something about something”. A sentence simply says its wording!

It says¹⁷ something about the future only in the sense in which its truth and falsehood are completely independent of what will happen in the future.



¹⁸When we say, “The gun is now aiming at point P”, we’re not saying anything about where the shot will hit. The point the gun is aiming at is a *geometric* aid for indicating its direction. To be sure, our use of just this aid is connected with certain observations¹⁹ (trajectory parabola, etc.), but these observations don’t enter into our description of the direction at this time.

9 (M): /

10 (M): J

11 (M): J

12 (M): J

13 (V): to be sure, not

14 (M): J

15 (M): f /

16 (V): at a later

17 (V): The proposition “p will probably take place” says

18 (M): ? / (F): MS 113, p. 2r.

19 (V): experiences

²²Die Galton'sche²³ Photographie, das Bild einer Wahrscheinlichkeit.²⁴ Das Gesetz der Wahrscheinlichkeit, das Naturgesetz, was man sieht, wenn man blinzelt.

²⁵Was heißt es: „die Punkte, die das Experiment liefert, liegen durchschnittlich auf einer Geraden“? oder: „wenn ich mit einem guten Würfel würfle, so werfe ich durchschnittlich alle 6 Würfle eine 1“? Ist dieser Satz mit *jeder* Erfahrung, die ich etwa mache, vereinbar? Wenn er das ist, so sagt er nichts. Habe ich (*vorher*) angegeben, mit welcher Erfahrung er nicht mehr vereinbar ist, welches die Grenze ist, bis zu der die Ausnahmen von der Regel gehen dürfen, ohne die Regel umzustoßen? Nein. Hätte ich aber nicht eine solche Grenze aufstellen können? Gewiß. – Denken wir uns, die Grenze wäre so gezogen: wenn unter 6 aufeinander folgenden Würfeln 4 gleiche auftreten, ist der Würfel schlecht. Nun fragt man aber: „Wenn das aber nur selten genug geschieht, ist er dann nicht doch gut?“²⁶ – Darauf lautet die Antwort: Wenn ich das Auftreten von 4 gleichen Würfeln unter 6 aufeinander folgenden für eine bestimmte Zahl von Würfeln erlaube, so ziehe ich damit eine *andere* Grenze, als die erste war. Wenn ich aber sage „jede Anzahl gleicher aufeinander folgender Würfe ist erlaubt, wenn sie nur selten genug auftritt, dann habe ich damit die Güte des Würfels im strengen Sinne als unabhängig von den Wurfresultaten erklärt. Es sei denn, daß ich unter der Güte des Würfels nicht eine Eigenschaft des Würfels, sondern eine Eigenschaft einer bestimmten Partie im Würfelspiel verstehe. Denn dann kann ich allerdings sagen: Ich nenne den Würfel in einer Partie gut, wenn unter den N Würfeln der Partie nicht mehr als $\log N$ gleiche aufeinander folgende vorkommen. Hiermit wäre aber eben kein Test zur Überprüfung von Würfeln gegeben, sondern ein Kriterium zur Beurteilung einer Partie des Spiels.

²⁷Man sagt, wenn der Würfel ganz gleichmäßig und sich selbst überlassen ist, dann muß die Verteilung der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 unter den Wurfresultaten gleichförmig sein, weil *kein Grund vorhanden ist*, weshalb die eine Ziffer öfter vorkommen sollte als die andere.

²⁸Stellen wir nun aber die Wurfresultate statt durch die Ziffern 1 bis 6 durch die Werte²⁹ der Funktion $(x - 3)^2$ für die Argumente 1 bis 6 dar, also durch die Ziffern 0, 1, 4, 9. Ist ein Grund vorhanden, warum eine *dieser* Ziffern öfter in den neuen Wurfresultaten fungieren soll, als eine andere? Dies lehrt uns, daß das Gesetz a priori der Wahrscheinlichkeit eine Form von Gesetzen ist, wie die der Minimumgesetze der Mechanik etc. Hätte man durch Versuche herausgefunden, daß die Verteilung der Würfe 1 bis 6 mit einem regelmäßigen Würfel so ausfällt, daß die Verteilung der Werte $(x - 3)^2$ eine gleichmäßige wird, so hätte man nun *diese* Gleichmäßigkeit als die Gleichmäßigkeit a priori erklärt.

So machen wir es auch in der kinetischen Gastheorie: wir stellen die Verteilung der Molekülbewegungen in der Form irgend einer gleichförmigen Verteilung dar; *was* aber gleichförmig verteilt ist – so wie an anderer Stelle *was* zu einem Minimum wird – wählen wir so, daß unsere Theorie mit der Erfahrung übereinstimmt.

³⁰„Die Moleküle bewegen sich bloß nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit“, das soll heißen: die Physik tritt ab, und die Moleküle bewegen sich jetzt quasi bloß nach Gesetzen der Logik. Diese Meinung ist verwandt der, daß das Trägheitsgesetz ein Satz a priori ist; und auch hier redet man davon, was ein Körper tut, wenn er sich selbst überlassen ist. Was

22 (M): ? /

23 (O): Gallstone'sche

24 (E): Siehe: Francis Galton, *Inquiries into Human Faculty and Its Development*, London, 1883, 1. Kap. und Anhang A, „Composite Portraiture“.

25 (M): /

26 (V): gut!?“

27 (M): /

28 (M): /

29 (O): Worte

30 (M): /

²⁰Galtonian photography, the picture of a probability.²¹ The law of probability, the law of nature, what you see when you screw up your eyes.

²²What does this mean: “The points that result from the experiment lie on the average on a straight line”? or: “If I play dice with a good die, then on average I get a 1 every sixth try”? Is this proposition compatible with *every* experience I might have? If it is, it says nothing. Have I indicated (in advance) which experience is incompatible with it, and the limit that exceptions to the rule may approach without overthrowing the rule? No. But couldn’t I have set up such a limit? Certainly. – Let’s imagine it were set up this way: if among 6 consecutive throws 4 turn out the same, the die is bad. But now someone asks: “But if that happens only rarely, isn’t the die still good?”²³ – The answer to this is: If within a certain number of throws I allow 4 throws to be the same out of 6 consecutive ones, then the limit I am setting is *different* from the first one. But if I say “Any number of consecutive equal throws is allowed if this only occurs sufficiently rarely”, then in a strict sense I have declared the quality of the die to be independent of the results of the throws. Unless by “quality of the die” I understand not a property of the die, but of a particular round in a game of dice. For then I really can say: I call the die in a round “good” if among N throws in that round not more than $\log N$ equal results occur consecutively. But this wouldn’t give us a test for checking dice, but a criterion for judging a particular round of a game.

²⁴We say, if the die is completely regular and is left to itself the distribution of the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6 that results from throwing it must be uniform, because *there is no reason* why one number should occur more frequently than another.

²⁵But now, instead of representing the results of the throws by the numbers 1 to 6, let’s represent them by the values of the function $(x - 3)^2$ for the arguments 1 to 6, i.e. by the numbers 0, 1, 4, 9. Is there a reason why one rather than another of *these* numbers ought to figure more frequently among the new results? This teaches us that the *a priori* law of probability is a form of law, like that of the minimum-principles of mechanics, etc. If we had discovered experimentally that the distribution of the throws 1 to 6 with a regular die turned out such that the distribution of the values $(x - 3)^2$ became uniform, then *this* regularity would have been declared to be the *a priori* regularity.

That is the way we proceed in kinetic gas theory as well: We represent the distribution of the molecular movements in the form of some uniform distribution; but we choose *what* is distributed uniformly – just as elsewhere we choose *what* turns into a minimum – so that our theory agrees with experience.

²⁶“Molecules move only according to the laws of probability” is supposed to mean: physics exits and now the molecules move, as it were, purely according to the laws of logic. This idea is related to the idea that the law of inertia is an *a priori* proposition; and there too one speaks of what a body does when left to itself. What’s the criterion for its being left to itself?

20 (M): ? /

21 (E): Cf. Francis Galton, *Inquiries into Human Faculty and Its Development*, London, 1883, Ch. I and Appendix A, “Composite Portraiture”.

22 (M): /

23 (V): good!?”

24 (M): /

25 (M): /

26 (M): /

ist das Kriterium dafür, daß er sich selbst überlassen ist? Ist es am Ende das, daß er sich gleichförmig in einer Geraden bewegt? Oder ist es ein anderes. Wenn das letztere, dann ist es eine Sache der Erfahrung, ob das Trägheitsgesetz stimmt; im ersten Fall aber war es gar kein Gesetz, sondern eine Definition. Und Analoges gilt von einem Satz: „wenn die Teilchen sich selbst überlassen sind, dann ist die Verteilung ihrer Bewegungen die und die“. Welches ist das Kriterium dafür, daß sie sich selbst überlassen sind? etc.

131 ³¹| Wenn die Messung ergibt, daß der Würfel genau und homogen ist, – ich nehme an, daß die Ziffern auf seinen Flächen die Wurfresultate nicht beeinflussen – und die werfende Hand bewegt sich regellos – folgt daraus die durchschnittlich gleichmäßige Verteilung der Würfe 1 bis 6? Woraus sollte man die schließen? Über die Bewegung beim Werfen hat man keine Annahme gemacht und die Prämisse³² der Genauigkeit des Würfels ist doch von ganz anderer Multiplizität,³³ als eine durchschnittlich gleichförmige Verteilung von Resultaten. Die Prämisse ist gleichsam einfarbig, die Konklusion gesprenkelt. Warum hat man gesagt, der Esel werde zwischen den beiden gleichen Heubündeln verhungern, und nicht, er werde von beiden durchschnittlich gleich oft fressen?³⁴|

³⁵Zu sagen, die Punkte, die dieses Experiment liefert, liegen durchschnittlich auf dieser Linie, z.B. einer Geraden, sagt etwas Ähnliches wie: „aus dieser Entfernung gesehen, scheinen sie in einer Geraden zu liegen“.

Ich kann von einer Strecke³⁶ sagen, der allgemeine Eindruck ist der einer Geraden; aber nicht: „die Strecke³⁷ schaut gerade aus, denn sie kann das Stück einer Linie sein, die mir als Ganze³⁸ den Eindruck der Geraden macht“. (Berge auf der Erde und auf dem Mond. Erde eine Kugel.)

132 ³⁹Das Experiment des Würfels dauert eine gewisse Zeit, und unsere Erwartungen über die zukünftigen Ergebnisse des Würfels können sich nur auf Tendenzen gründen, die wir in den Ergebnissen des Experiments wahrnehmen. D.h., das Experiment kann nur die Erwartung begründen, daß es *so* weitergehen wird, wie (es) das Experiment gezeigt hat. Aber wir können nicht erwarten, daß das Experiment, wenn fortgesetzt, nun Ergebnisse liefern wird, die mehr als die des wirklich ausgeführten Experiments mit einer vorgefaßten Meinung über seinen Verlauf übereinstimmen. Wenn ich also z.B. Kopf und Adler werfe und in den Ergebnissen des Experiments keine Tendenz der Kopf- und Adler-Zahlen finde, sich weiter einander zu nähern, so gibt das Experiment mir keinen Grund zur Annahme, daß seine Fortsetzung eine solche Annäherung zeigen wird. Ja die Erwartung dieser Annäherung muß sich selbst auf einen bestimmten Zeitpunkt beziehen, denn man kann nicht sagen, man erwarte, daß ein Ereignis *einmal* – in der unendlichen Zukunft – eintreten werde.

⁴⁰Alle „begründete Erwartung“ ist Erwartung, daß eine bis jetzt beobachtete Regel weiter⁴¹ gelten wird.

(Die Regel aber muß beobachtet worden sein und kann nicht selbst wieder bloß erwartet werden.)

⁴²Die Logik der Wahrscheinlichkeit hat es mit dem Zustand der Erwartung nur soweit zu tun, wie die Logik überhaupt, mit dem Denken.

31 (M): /

32 (V): Annahme

33 (V): Art

34 (V): und nicht, er werde durchschnittlich so oft von dem einen, wie von dem andern fressen?

35 (M): /

36 (V): Linie

37 (V): Linie

38 (V): Ganzes

39 (M): /

40 (M): /

41 (V): weiterhin

42 (M): /

Possibly that it moves uniformly in a straight line? Or is it a different criterion? If the latter, then it's an empirical matter whether the law of inertia is correct; but if the former, then it wasn't a law at all, but a definition. And something analogous is true of this proposition: "When particles are left to themselves then the distribution of their movements is such and such". What is the criterion for their being left to themselves? Etc.

²⁷ | If a measurement proves that the die is exact and homogenous – I'm assuming that the numbers on its surfaces don't influence the results of the throws – and the hand performing the throws moves arbitrarily, does an average uniform distribution of the throws 1 to 6 result? How is one to deduce that? No assumption was made about the throwing motion, and the premiss²⁸ that the die is accurate is of an entirely different multiplicity²⁹ than an average uniform distribution of results. The premiss is monochrome, as it were, the conclusion mottled. Why was it said that the ass would starve between two identical bundles of hay and not that he would eat from both with an equal average frequency?³⁰ |

³¹ To say that the points produced by this experiment lie on average on a line, e.g. a straight line, is to say something like: "Viewed from this distance, they seem to lie in a straight line".

I can say of a line segment³² that it gives the general impression of a straight line; but not "The line segment³³ looks straight because it can be part of a line that, as a whole, seems to me to be straight." (Mountains on earth and on the moon. The earth a sphere.)

³⁴ The experiment of throwing the die lasts a certain time, and our expectations about future results of casting the die can only be based on tendencies that we observe in the results of the experiment. That is, the experiment can only justify the expectation that things will continue *in the way* shown by the experiment. But we can't expect that the experiment, if continued, will now produce results that tally better with a preconceived idea of its course than did those of the experiment that was actually carried out. So if I am flipping a coin, for instance, and discover no tendency in the results of the experiment for the number of heads and tails to continue to approximate to each other more closely, then the experiment gives me no reason to assume that continuing it will show such a convergence. Indeed, the expectation of this convergence must itself refer to a definite point in time, for we can't say that we expect that an event will occur *eventually* – in the infinite future.

³⁵ Any "reasonable expectation" is an expectation that a rule that has been followed up until now will continue to hold.

(But the rule must have been followed, and can't itself be merely expected.)

³⁶ The logic of probability is concerned with a state of expectation only to the extent that logic in general is concerned with thinking.

27 (M): /

28 (V): assumption

29 (V): of a different kind

30 (V): and not that on average he will eat from the one as frequently as from the other?

31 (M): /

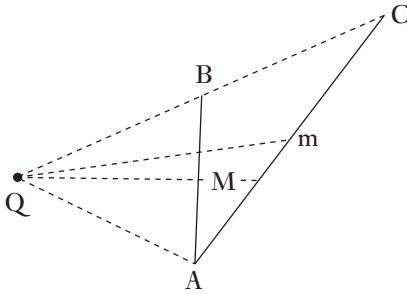
32 (V): line

33 (V): line

34 (M): /

35 (M): /

36 (M): /



⁴³Von der Lichtquelle Q wird ein Lichtstrahl ausgesandt, der die Scheibe AB trifft, dort einen Lichtpunkt erzeugt und dann die Scheibe AC trifft. Wir haben nun keinen Grund, anzunehmen, daß der Lichtpunkt auf AB eher auf der einen Seite der Mitte M, als auf der andern liegen wird; aber auch keinen Grund, anzunehmen, der Lichtpunkt auf AC werde auf der einen und nicht auf der andern Seite der Mitte m liegen.⁴⁴ Das gibt also widersprechende Wahrscheinlichkeiten.

Wenn ich nun eine Annahme über den Grad der Wahrscheinlichkeit mache, daß der eine Lichtpunkt im Stück AM liegt, – wie wird diese Annahme verifiziert. Wir meinen⁴⁵ doch, durch einen Häufigkeitsversuch. Angenommen nun, dieser bestätigt die Auffassung, daß die Wahrscheinlichkeiten für das Stück AM und BM gleich sind (also für Am und Cm verschieden), so ist sie damit als die richtige erkannt und erweist sich also als eine physikalische Hypothese. Die geometrische Konstruktion zeigt nur, daß die Gleichheit der Strecken AM und BM *kein* Grund zur Annahme gleicher Wahrscheinlichkeit war.

- 133 ⁴⁶Wenn ich annehme, die Messung ergebe, daß der Würfel genau und homogen ist, und die Ziffern auf seinen Flächen die Wurfresultate nicht beeinflussen, und die Hand, die ihn wirft, bewegt sich ohne bestimmte Regel; folgt daraus eine⁴⁷ durchschnittlich gleichförmige Verteilung der Würfe 1 bis 6 unter den Wurfresultaten? – Woraus sollte sie hervorgehen? Daß der Würfel genau und homogen ist, kann doch keine *durchschnittlich gleichförmige* Verteilung von Resultaten begründen. (Die Voraussetzung ist sozusagen homogen, die Folgerung wäre gesprenkelt.) Und über die Bewegung beim Werfen haben wir ja keine Annahme gemacht. (Mit der Gleichheit der beiden Heubündel hat man zwar begründet, daß der Esel in ihrer Mitte verhungern (werde); aber nicht, daß er ungefähr gleich oft von jedem fressen werde.) – Mit unseren Annahmen ist es auch vollkommen vereinbar, daß mit dem Würfel 100 Einser nacheinander geworfen werden, wenn Reibung, Handbewegung, Luftwiderstand so zusammentreffen. Die Erfahrung, daß das nie geschieht, ist eine diese Faktoren betreffende.⁴⁸ Und die Vermutung der gleichmäßigen Verteilung der Wurfresultate ist eine Vermutung über das Arbeiten dieser Faktoren.⁴⁹

Wenn man sagt, ein gleicharmiger Hebel, auf den symmetrische Kräfte wirken, müsse in Ruhe bleiben, weil keine Ursache vorhanden ist, weshalb er sich eher auf die eine als auf die andre Seite neigen sollte, so heißt das nur, daß, wenn wir gleiche Hebelarme und symmetrische Kräfte konstatiert haben und nun der Hebel sich nach der einen Seite neigt, wir dies aus den uns bekannten – oder von uns angenommenen – Voraussetzungen nicht erklären können. (Die Form, die wir „Erklärung“ nennen, muß auch asymmetrisch sein; wie die Operation, die aus „ $a + b$ “ „ $2a + 3b$ “⁵⁰ macht.) Wohl aber können wir die andauernde Ruhe des Hebels aus unsern Voraussetzungen erklären. – Aber auch eine schwingende Bewegung, die durchschnittlich gleich oft von der Mitte⁵¹ nach rechts und nach links gerichtet ist? Die schwingende Bewegung nicht, denn in der ist ja wieder Asymmetrie. Nur

134

43 (F): MS 114, S. 18v.

44 (V): Wir haben nun keinen Grund zur Annahme, der Lichtpunkt auf AB werde rechts von der Mitte M liegen, noch zur entgegengesetzten; aber auch keinen Grund anzunehmen, der Lichtpunkt auf AC werde auf *der* und nicht auf jener Seite von der Mitte m liegen.

45 (V): denken

46 (M): ? /

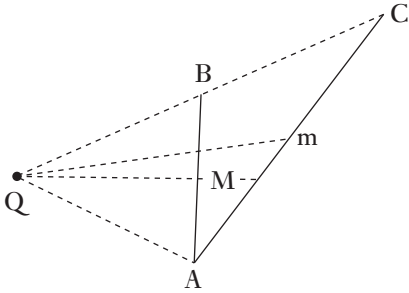
47 (V): die

48 (V): ist eine, die diese Faktoren betrifft.

49 (V): Einflüsse.

50 (V): „ $a + b$ “ „ $2a$ “ „ $2a + 3b$ “

51 (V): Mittellage



³⁷A ray of light, emitted from a light source Q, falls upon a disc AB, creating a point of light there, and then falls on disc AC. We have no reason to assume that the point of light on AB is more likely to lie on one side of the centre M than on the other; and also none to assume that the point of light on AC will be located on one but not on the other side of the centre m.³⁸ Thus we have contradictory probabilities. Now if I make an assumption about the degree of probability that the one point of light will

be situated in segment AM – how is this assumption verified? By a frequency experiment, we would think. Now, assuming that this experiment confirms the view that the probabilities for segments AM and BM are equal (and are therefore different for Am and Cm), then this view is thereby acknowledged as correct, and thus proves to be a hypothesis of physics. The geometric construction merely shows that the equality of the segments AM and BM gave us *no* reason to assume equal probability.

³⁹If I assume that a measurement proves a die to be accurate and homogeneous and that the numbers on its surfaces don't influence the results of the throws and that the hand that throws it moves without following any definite pattern, does it follow that among the results of the throws there will be on average a⁴⁰ uniform distribution of throws 1 to 6? – From what should this distribution follow? That the die is accurate and homogeneous can't be the basis for an *average uniform* distribution of results. (The premiss is homogeneous, so to speak, the conclusion mottled.) And we haven't made any assumption about the movements in throwing. (To be sure, the equality of the two bundles of hay has been given as the reason that an ass (will) starve between them; but not as a reason for his eating from both bundles with more or less equal frequency.) – It is also completely compatible with our assumptions that 100 ones will be cast in succession if friction, movements of the hand, and air-resistance combine in a certain way. Our experience that this never happens is related to these factors. And the conjecture about the regular distribution of the results of the throws is a conjecture about the workings of these factors.⁴¹

If someone says that an equal-armed lever, when affected by symmetrical forces, must remain at rest because there is no reason for it to tip toward one side rather than the other, then all that means is that, if we have established that the lever has equally long arms and that the forces are symmetrical, but now the lever leans to one side, we cannot explain this from the presuppositions we know – or have assumed. (The form that we call "explanation" must also be asymmetrical; like the operation that makes " $2a + 3b$ "⁴² out of " $a + b$ ".) What we can explain on the basis of our presuppositions is the lever's constantly remaining at rest. – But can we also explain a swinging motion towards the left and then right of the middle⁴³ with equal average frequency? No, because once again there is an asymmetry in it. All we can explain is the symmetry in this asymmetry. If the lever had uniformly swung right, then

37 (F): MS 114, p. 18v.

38 (V): We have no reason to assume that the point of light on AB will lie on the right side of the centre M, nor do we have any reason for assuming the opposite; but we also have no reason to assume that the point of light on AC

will be located on *this* and not on that side of the centre m.

39 (M): ? /

40 (V): the

41 (V): influences.

42 (V): "~~2a~~"

43 (V): middle position

die Symmetrie in dieser Asymmetrie. Hätte sich der Hebel gleichförmig nach rechts gedreht, so könnte man analog sagen: Mit der Symmetrie der Bedingungen kann ich die Gleichförmigkeit der Bewegung, aber nicht ihre Richtung erklären.

Eine Ungleichförmigkeit der Verteilung der Wurfresultate ist mit der Symmetrie des Würfels *nicht* zu erklären. Und nur insofern erklärt diese Symmetrie die Gleichförmigkeit der Verteilung. – Denn man kann natürlich sagen: Wenn die Ziffern auf den Würfelflächen keine Wirkung haben, dann kann ihre Verschiedenheit nicht eine Ungleichförmigkeit der Verteilung erklären; und gleiche Umstände können selbstverständlich nicht Verschiedenheiten erklären; soweit also könnte man auf eine Gleichförmigkeit schließen. Aber woher dann überhaupt verschiedene Wurfresultate? Was diese⁵² erklärt, muß nun auch ihre durchschnittliche Gleichförmigkeit erklären. Die Regelmäßigkeit des Würfels stört nur eben diese Gleichförmigkeit nicht.

⁵³Angenommen, Einer der täglich im Spiel würfelt, würde etwa eine Woche lang nichts als Einser werfen, und zwar mit Würfeln, die nach allen anderen Methoden⁵⁴ der Prüfung⁵⁵ sich als gut erweisen, und wenn ein Anderer sie wirft, auch die gewöhnlichen Resultate liefern.⁵⁶ Hat er nun Grund, hier ein Naturgesetz anzunehmen, dem gemäß er immer Einser werfen muß;⁵⁷ hat er Grund zu glauben, daß das nun so weiter gehen wird, – oder (vielmehr) Grund anzunehmen, daß diese Regelmäßigkeit nicht lange mehr andauern wird?⁵⁸ Hat er also Grund das Spiel aufzugeben, da es sich gezeigt hat, daß er nur Einser werfen kann; oder weiterzuspielen, da es jetzt nur um so wahrscheinlicher ist, daß er beim nächsten Wurf eine höhere Zahl werfen wird? – In Wirklichkeit wird er sich weigern, die Regelmäßigkeit als ein Naturgesetz anzuerkennen; zum mindesten wird sie lang andauern müssen, ehe er diese
135 Auffassung in Betracht zieht. Aber warum? – Ich glaube, weil so viel frühere Erfahrung seines Lebens gegen ein solches Gesetz spricht, die alle – sozusagen – erst überwunden werden muß, ehe wir eine ganz neue Betrachtungsweise annehmen.

⁵⁹Wenn wir aus der relativen Häufigkeit eines Ereignisses auf seine relative Häufigkeit in der Zukunft Schlüsse ziehen, so können wir das natürlich nur nach der bisher tatsächlich beobachteten Häufigkeit tun. Und nicht nach einer, die wir aus der beobachteten durch irgend einen Prozess der Wahrscheinlichkeitsrechnung erhalten haben. Denn die berechnete Wahrscheinlichkeit stimmt *mit jeder beliebigen* tatsächlich beobachteten Häufigkeit überein, da sie die Zeit offen läßt.

⁶⁰Wenn sich der Spieler, oder die Versicherungsgesellschaft, nach der Wahrscheinlichkeit richten, so richten sie sich nicht nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung, denn nach dieser allein kann man sich nicht richten, da, *was immer* geschieht, mit ihr in Übereinstimmung zu bringen ist; sondern die Versicherungsgesellschaft richtet sich nach einer tatsächlich beobachteten Häufigkeit. Und zwar ist das natürlich eine absolute Häufigkeit.

52 (V): Wurfresultate? Gewiß, was diese

53 (M): /

54 (V): Arten

55 (V): Untersuchung

56 (V): geben.

57 (V): Einser wirft;

58 (V): kann?

59 (M): /

60 (M): /

analogously we could say: Given the symmetry of the conditions we can explain the uniformity of the motion, but not its direction.

A lack of uniformity in the distribution of the results of the throws *cannot* be explained by the symmetry of the die. And this is the extent to which this symmetry explains the uniformity of the distribution. – For of course one can say: If the numbers on the surfaces of the die have no effect, then their being different can't explain a lack of uniformity in the distribution; and of course, identical circumstances can't explain differences; so to this extent one could infer uniformity. But then why do we have different results of throws at all? Whatever explains⁴⁴ them must also explain their uniformity on average. It's just that the regularity of the die doesn't upset this uniformity.

⁴⁵Let's assume that someone playing dice every day were to throw, say, nothing but ones for a whole week, and that he does this with dice that turn out to be good when subjected to all other methods of testing,⁴⁶ and that also produce⁴⁷ the normal results when someone else throws them. Does he now have reason to assume a natural law here, according to which he always has to throw⁴⁸ ones? Does he have reason to believe that things will continue in this way – or (rather) to assume that this regularity won't⁴⁹ last much longer? So does he have reason to quit the game since it has turned out that he can throw only ones; or to continue playing, because now it is just all the more likely that on the next try he'll throw a higher number? – In actual fact he'll refuse to acknowledge the regularity as a law of nature; at least it will have to last for a long time before he'll consider this view of regularity. But why? – I think it's because so much of his previous experience in life refutes such a law, experience that has to be, so to speak – vanquished – before we accept a totally new way of looking at things.

⁵⁰If we infer the relative frequency of an event in the future from its relative frequency, then of course we can do this only based on the frequency that has in fact been observed so far. We can't do this based on a frequency we have got by applying some process of the probability calculus to the one we've observed. For since it leaves the time open, the probability we calculate agrees *with any* frequency we actually observe.

⁵¹When gamblers or insurance companies base their actions on probability, they don't base them on the probability calculus. For you can't base them on that alone, since *whatever* happens can be made to agree with it. Rather, insurance companies base their actions on an actually observed frequency. And that, of course, is an absolute frequency.

44 (V): Certainly whatever explains

45 (M): /

46 (V): all other kinds of investigation,

47 (V): give

48 (V): he always throws

49 (V): can't

50 (M): /

51 (M): /

Der Begriff „ungefähr“. Problem des „Sandhaufens“.

¹„Er kam *ungefähr* von dort →.“

„Ungefähr *da* ist der hellste Punkt des Horizontes.“

„Mach' das Brett ungefähr 2m lang.“

Muß ich, um das sagen zu können, Grenzen wissen, die den Spielraum dieser Länge bestimmen? Offenbar nicht. Genügt es nicht z.B. zu sagen: „der Spielraum ± 1 cm ist ohnweiteres erlaubt; ± 2 cm wäre schon zu viel“? – Es ist doch dem Sinn meines Satzes auch wesentlich, daß ich nicht imstande bin, dem² Spielraum „genaue“ Grenzen zu geben. Kommt das nicht offenbar³ daher, daß der Raum, in dem ich hier arbeite, eine andere Metrik⁴ hat, als der Euklidische?

Wenn man nämlich den Spielraum genau durch den Versuch feststellen wollte, indem man die Länge ändert und sich den Grenzen des Spielraums nähert und⁵ immer fragt, ob diese Länge noch angehe oder schon nicht mehr, so käme man nach einigen Einschränkungen zu Widersprüchen, indem einmal ein Punkt noch als innerhalb der Grenzen liegend bezeichnet würde, ein andermal ein weiter innerhalb gelegener als schon unzulässig erklärt würde; beides etwa mit der Bemerkung, die Angaben⁶ seien nicht mehr (ganz) sicher.

137 ⁷Die Unsicherheit ist von der Art, wie die der Angabe⁸ des höchsten Punktes einer Kurve. Wir sind eben nicht im euklidischen Raum und es gibt hier nicht im euklidischen Sinne einen höchsten Punkt. Die Antwort wird heißen: „der höchste Punkt ist ungefähr *da*“, und die Grammatik des Wortes „ungefähr“ – in diesem Zusammenhang – gehört dann zur Geometrie unseres Raumes.

⁹Ist es denn nicht so, wie man etwa beim Fleischhauer nur auf Dekka genau abwägt, obwohl das andererseits willkürlich ist, und nur bestimmt durch die herkömmlichen Messinggewichte?¹⁰ Es genügt hier zu wissen: mehr als P_1 wiegt es nicht und weniger als P_2 auch nicht. Man könnte sagen: die Gewichtsangabe besteht hier prinzipiell nicht aus einer Zahlangabe, sondern aus der Angabe eines Intervalls, und die Intervalle bilden eine diskontinuierliche Reihe.

¹¹Man könnte doch sagen: „halte Dich jedenfalls *innerhalb* ± 1 cm“, damit¹² eine willkürliche Grenze setzend. – Würde nun gesagt: „gut, aber dies ist doch nicht die wirkliche Grenze

1 (M): ? /

2 (O): den

3 (V): das offenbar

4 (V): Metrik ~~is~~

5 (O): ändert // und . . . nähert // und

6 (V): Antworten

7 (M): ? /

8 (O): die, der Angabe

9 (M): ∫ /

10 (O): Messinggewichte.

11 (M): ? /

12 (O): 1 cm“ damit

The Concept “Roughly”. Problem of the “Heap of Sand”.

¹“He came from *roughly* there → .”

“Roughly *there* is the brightest point on the horizon.”

“Make the board roughly 2 m long.”

In order to say this do I have to know the limits that specify the margins of tolerance for this length? Obviously not. Isn't it enough to say, for example: “A margin of ± 1 cm is perfectly all right; ± 2 cm would be too much”? After all, it's essential to the sense of my sentence that I can't assign “exact” limits to the margin. Isn't that obviously² because the space in which I am working here doesn't have³ the same metric as the Euclidean one?

Suppose we wanted to establish the margin exactly by experiment – we alter the length and each time we approach the limits of the margin we ask whether such a length is still acceptable or not. Then, after some narrowing down of the length we would arrive at contradictions, where a point was at one time designated as falling within the limits, but one that lay closer to the true length was declared at another time to be impermissible; and both responses might be accompanied by the remark that the statements⁴ were no longer (completely) certain.

⁵This uncertainty is like that of specifying the highest point of a curve. We're simply not in Euclidean space and here there is no highest point in the Euclidean sense. The answer will be: “The highest point is roughly *there*”, and then the grammar of the word “roughly” – in this context – belongs to the geometry of our space.

⁶Isn't it just like at the butcher's where the weighing is only accurate to within 10 grams, though from another point of view this is arbitrary, merely the result of the customary brass weights. Here all we need to know is: it doesn't weigh more than P_1 , and not less than P_2 . One could say: In principle specifying the weight is not a specification of a number, but of an interval, and intervals form a discontinuous series.

⁷Yet one might say: “In any case stay *within* ± 1 cm”, thus setting an arbitrary limit. – If someone now said: “Fine, but that isn't the real limit of the permissible margin; so what

1 (M): ? /

2 (V): Is that obviously

3 (V): working here ~~is~~

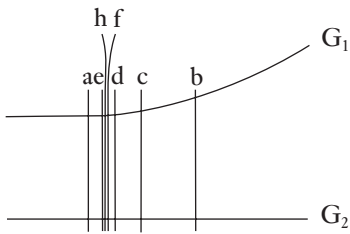
4 (V): answers

5 (M): ? /

6 (M): ∫ /

7 (M): ? /

des zulässigen Spielraums: welche ist es also?“, so¹³ wäre etwa die Antwort „ich weiß keine, ich weiß nur, daß ± 2 cm schon zu viel wäre“.



¹⁴Denken wir uns folgendes psychologisches Experiment: Wir zeigen dem Subjekt zwei Linien G_1 , G_2 , durch welche quer die Gerade A gezogen ist. Das Stück dieser Geraden, welches zwischen G_1 und G_2 liegt, werde ich die Strecke a nennen. Wir ziehen nun in beliebiger Entfernung von a und parallel dazu b und fragen, ob er die Strecke b größer sieht als a, oder die beiden Längen nicht mehr unterscheidet. Er antwortet, b erscheine

138 größer als a. Darauf nähern wir uns a, indem wir die Distanz von a zu b mit unsern Meßinstrumenten halbieren und ziehen c. „Siehst Du c größer als a?“ – „Ja“. Wir halbieren die Distanz c–a und ziehen d. „Siehst Du d größer als a?“ – „Ja“. Wir halbieren a–d. „Siehst Du e größer als a?“ – „Nein“. Wir halbieren daher e–d. „Siehst Du f größer als e?“ – „Ja“. Wir halbieren also e–f und ziehen h. Wir könnten uns so auch von der linken Seite der Strecke a nähern, und dann sagen, daß einer gesehenen Länge a im euklidischen Raum nicht *eine* Länge, sondern ein Intervall von Längen entspricht, und in ähnlicher Weise *einer* gesehenen Lage eines Strichs (etwa des Zeigers eines Instruments) ein Intervall von Lagen im euklidischen Raum; aber dieses Intervall hat nicht scharfe Grenzen. Das heißt: es ist nicht von Punkten begrenzt, sondern von konvergierenden Intervallen, die nicht gegen einen Punkt konvergieren. (Wie die Reihe der Dualbrüche, die wir durch Werfen von Kopf und Adler erzeugen.) Das Charakteristische zweier Intervalle, die so nicht durch Punkte sondern *unscharf* begrenzt sind, ist, daß auf die Frage, ob sie einander übergreifen oder getrennt voneinander liegen, in gewissen Fällen die Antwort lautet: „unentschieden“. Und daß die Frage, ob sie einander berühren, einen Endpunkt miteinander gemein haben, immer sinnlos ist, da sie ja keine Endpunkte haben. Man könnte aber sagen: sie haben *vorläufige* Endpunkte. In dem Sinne, in welchem die Entwicklung von π ein vorläufiges Ende hat. An dieser Eigenschaft des „unscharfen“ Intervalls ist natürlich nichts geheimnisvolles, sondern das etwas Paradoxe klärt sich durch die doppelte Verwendung des Wortes „Intervall“ auf.

Es ist dies der gleiche Fall, wie der der doppelten Verwendung des Wortes „Schach“, wenn es einmal die Gesamtheit der jetzt geltenden Schachregeln bedeutet, ein andermal: das Spiel, welches N.N. in Persien erfunden hat und welches sich so und so entwickelt hat. In einem Fall ist es unsinnig, von einer Entwicklung¹⁵ der Schachregeln zu reden, im andern Fall nicht. Wir können „Länge einer gemessenen Strecke“ entweder das nennen, was bei 139 einer bestimmten Messung, die ich heute um 5 Uhr durchführe, herauskommt, – dann gibt es für diese Längenangabe kein „ \pm etc.“ – oder¹⁶ etwas, dem sich Messungen nähern etc.; in den zwei Fällen wird das Wort „Länge“ mit ganz verschiedener Grammatik gebraucht. Und ebenso das Wort „Intervall“, wenn ich einmal etwas Fertiges, einmal etwas sich Entwickelndes ein Intervall nenne.

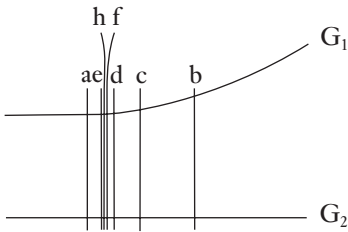
13 (O): es also?“ so

14 (M): / (F): MS 114, S. 7r.

15 (V): Änderung

16 (V): „ \pm etc.“, oder

is?” then the answer might be: “I don’t know of any, I just know that ± 2 cm would be too much”.



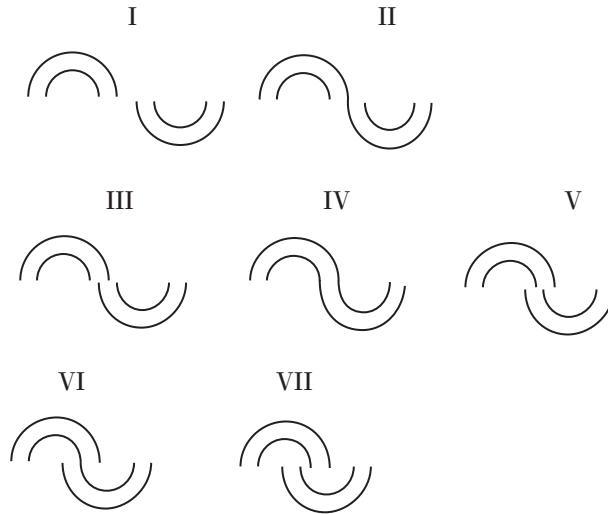
⁸Let’s imagine the following psychological experiment: We show our subject two lines G_1 , G_2 across which the straight line a has been drawn. I’ll call the part of this line that lies between G_1 and G_2 segment a . Now, at an arbitrary distance from a and parallel to it, we draw b and ask whether he sees the line segment b as being longer than a or whether he no longer distinguishes between the two lengths. He answers that b seems

longer than a . Then we move closer to a by halving the distance between a and b with our measuring instruments, and draw c . “Do you see c as longer than a ?” – “Yes”. We halve the distance c – a and draw d . “Do you see d as longer than a ?” – “Yes”. We halve a – d . “Do you see e as longer than a ?” – “No”. So we halve e – d . “Do you see f as longer than e ?” – “Yes”. So we halve e – f and draw h . In the same way we could also approach segment a from the left side and then say that what corresponds to a perceived length a in Euclidean space is not *one* length, but an interval of lengths, and similarly, that what corresponds to *one* perceived position of a line (say of the pointer of an instrument) is an interval of positions in Euclidean space; but this interval doesn’t have sharply defined limits. That means: it isn’t bounded by points, but by converging intervals that don’t converge toward a single point. (Like the series of binary fractions that we generate by throwing heads and tails.) What is characteristic of two intervals that are bounded in this way – not by points but by *blurred* boundary lines – is that in certain cases the answer to the question whether they overlap or are separate from each other is: “undecided”. And that the question whether they touch, have an end point in common, is always senseless, because of course they have no end points. But one could say: They have *temporary* end points, in the sense in which the expansion of π has a temporary end. Of course there is nothing mysterious about this property of “blurred” intervals; rather, its somewhat paradoxical nature is explained by the ambiguity of the word “interval”.

Here we have the same type of ambiguity as that of the word “chess”; at times that means the totality of currently valid chess rules, and at times the game that N N invented in Persia and that has developed in such and such a way. In the one case it is nonsensical to speak about a development of⁹ the rules of chess, and in the other it is not. We can either call what results from a particular measurement that I carry out today at 5 o’clock “the length of a measured line segment” – in which case there is no “ \pm etc.” for this specification of length – or something to which measurements approximate, etc. In the two cases the word “length” is used with completely different grammars. So too is the word “interval”, where at some times I call something that has been completed an interval and at others something that’s in flux.

8 (M): / (F): MS 114, p. 7r.

9 (V): about a change in



- ¹⁷I) die Intervalle liegen getrennt
 II) sie liegen getrennt und berühren sich vorläufig
 III)¹⁸ unentschieden
 IV) unentschieden
 V) unentschieden
 VI) sie übergreifen
 VII) sie übergreifen

Wir können uns aber nicht wundern, daß nun ein Intervall so seltsame Eigenschaften haben soll; da wir eben das Wort „Intervall“ jetzt in einem nicht gewöhnlichen Sinn gebrauchen. Und wir können nicht sagen, wir haben neue Eigenschaften gewisser Intervalle entdeckt. Sowenig wie wir neue Eigenschaften des Schachkönigs entdecken würden, wenn wir die Regeln des Spiels änderten, aber die Bezeichnung „Schach“ und „König“ beibehielten. (Vergl. dagegen Brouwer, über das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten.)

Jener Versuch ergibt also wesentlich, was wir ein „unscharfes“ Intervall genannt haben; dagegen wären natürlich andere Experimente denkbar,¹⁹ die statt dessen ein scharfes Intervall ergeben. Denken wir etwa, wir bewegten ein Lineal von der Anfangsstellung b , und parallel zu dieser, gegen a hin, bis in unserm Subjekt irgend eine bestimmte Reaktion einträte: dann könnten wir den Punkt, an dem die Reaktion beginnt, die Grenze unseres Streifens nennen. – So könnten wir natürlich auch ein Wägungsergebnis „das Gewicht eines Körpers“ nennen und es gäbe dann in diesem Sinn eine absolut genaue Wägung, d.i. eine, deren Resultat nicht die Form „ $G \pm g$ “ hat. Wir haben damit unsere Ausdrucksweise geändert, und müssen nun sagen, daß das Gewicht des Körpers schwankt und zwar nach einem uns unbekanntem Gesetz. (Der Unterschied²⁰ zwischen „absolut genauer“ Wägung und „wesentlich ungenauer“ Wägung ist ein grammatischer²¹ und bezieht sich auf zwei verschiedene Bedeutungen des Ausdrucks „Ergebnis der Wägung“.)

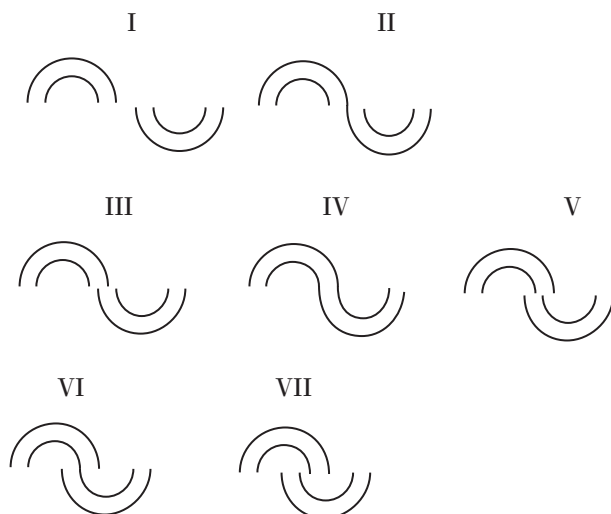
17 (F): MS 114, S. 8r.

18 (V): III) ~~sie lie~~

19 (V): möglich,

20 (V): Gesetz. (Die Unterscheidung

21 (V): ist eine grammatische



- ¹⁰(I) the intervals are separate
 (II) they are separate and touch each other temporarily
 (III)¹¹ undecided
 (IV) undecided
 (V) undecided
 (VI) they overlap
 (VII) they overlap

But we shouldn't be surprised that an interval can have such strange properties; for now we're using the word "interval" in an unusual sense. And we can't say that we've discovered new properties of certain intervals. Any more than we'd discover new properties of the chess king if we changed the rules of the game but kept the designations "chess" and "king". (On the other hand cf. Brouwer on the law of excluded middle.)

So in essence our experiment results in what we have called a "blurred" interval; on the other hand of course other experiments are conceivable¹² that result instead in a sharp interval. Let's imagine for instance that we move a ruler from the starting position *b* and parallel to it towards *a*, until some particular reaction occurs in our subject; then we could call the point at which the reaction first occurs the limit of our strip. – Of course, in the same way we could also call the result of a single weighing "the weight of a body", and in that sense there would be an absolutely accurate weight, i.e. one whose result would not have the form " $G \pm g$ ". We would thus have altered our form of expression, and we would now have to say that the weight of a body varies, and does so in accordance with a law of which we are unaware. (The difference¹³ between an "absolutely exact" weighing and an "inherently inexact" one is grammatical, and refers to two different meanings of the expression "result of a weighing".)

10 (F): MS 114, p. 8r.

11 (V): (III) ~~they are~~

12 (V): possible

13 (V): differentiation

²²Die Unbestimmtheit des Wortes „Haufen“. Ich könnte definieren: ein Körper von gewisser Form und Konsistenz etc. sei ein Haufe, wenn sein Volumen $K \text{ m}^3$ beträgt, oder mehr; was darunter liegt, will ich ein Häufchen nennen. Dann gibt es kein größtes Häufchen; das heißt: dann ist es sinnlos, von dem „größten Häufchen“ zu reden. Umgekehrt könnte ich bestimmen: Haufe solle alles das sein, was größer als $K \text{ m}^3$ ist, und dann hätte der Ausdruck „der kleinste Haufe“ keine Bedeutung. Ist aber diese Unterscheidung nicht müßig? Gewiß, – wenn wir unter dem Resultat der Messung des Volumens einen Ausdruck von der Form „ $V \pm v$ “ verstehen.²³ Sonst aber könnte die Unterscheidung nicht müßiger sein als²⁴ die, zwischen einem Schock Äpfel und 61 Äpfeln.

²⁵Zu dem Problem vom „Sandhaufen“: Man könnte sich hier, wie in ähnlichen Fällen, denken, daß es einen offiziellen Begriff, wie den einer Schrittlänge gäbe,²⁶ etwa: Haufe ist alles, was über einen halben m^3 groß ist. Dieser wäre aber dennoch nicht unser gewöhnlich gebrauchter Begriff. Für diesen liegt keine Abgrenzung vor (und bestimmen wir eine, so ändern wir den Begriff); sondern es liegen nur Fälle vor, welche wir zu²⁷ dem Umfang des Begriffs²⁸ rechnen und solche, die wir nicht mehr zu dem Umfang des Begriffs rechnen.

141 ²⁹„Mach’ mir hier einen Haufen Sand“. – „Gut, das nennt er gewiß noch einen Haufen“. Ich konnte dem Befehl Folge leisten, also war er in Ordnung. Wie aber ist es mit diesem Befehl: „Mach’ mir den kleinsten Haufen, den Du noch so nennst“? Ich würde sagen: das ist Unsinn; ich kann nur eine vorläufige obere und untere Grenze bestimmen.

22 (M): /

23 (V): Gewiß, – wenn wir unter dem Volumen ein Messungsergebnis im gewöhnlichen Sinne verstehen; denn dieses Resultat hat die Form „ $V \pm v$ “.

24 (V_1): Unterscheidung so unbrauchbar sein, wie (V_2): aber wäre diese Unterscheidung so unbrauchbar, wie // Unterscheidung nicht müßiger als

25 (M): /

26 (V): Fällen, einen offiziellen // offiziell festgesetzten // Begriff denken

27 (O): zum

28 (V): zu den Haufen

29 (M): /

¹⁴The indeterminacy of the word “heap”. I could give as a definition: A body of a certain form and consistency etc. is a heap if its volume is $K \text{ m}^3$ or more; anything less I shall call a heaplet. In that case there is no such thing as a largest heaplet; that is: then it makes no sense to speak of the “largest heaplet”. Conversely, I could stipulate: everything that is greater than $K \text{ m}^3$ is to be a heap, and then the expression “the smallest heap” would have no meaning. But isn’t this distinction idle? Certainly – if by “the result of measuring the volume” we understand an expression of the form “ $V \pm v$ ”.¹⁵ But otherwise this distinction could¹⁶ be no more idle than¹⁷ the one between threescore apples and 61 apples.

¹⁸Concerning the problem of the “heap of sand”: Here, as in similar cases, one could imagine that there were an official¹⁹ concept like that of the length of a pace: say, anything that is larger than half a m^3 is a heap. Still, this wouldn’t be the concept that we normally use. For this there is no delimitation (and if we specify one we change the concept); rather there are only cases that we include within the extension of that concept²⁰ and cases that we no longer include within the extension of that concept.

²¹“Put a heap of sand here for me”. – “Good, surely he’ll still call that a heap”. I was able to carry out the command, so it was in order. But what about this command: “Make me the smallest heap that you’d still call by that name”? I would say: “That’s nonsense; I can only specify a temporary upper and lower limit”.

14 (M): /

15 (V): Certainly – if by “volume” we understand the result of a measurement in the usual sense; for this result has the form “ $V \pm v$ ”.

16 (V): would

17 (V): be as useless as

18 (M): /

19 (V): an officially determined

20 (V): cases that we count as heaps

21 (M): /

**Das augenblickliche
Verstehn und die
Anwendung des Worts
in der Zeit.**

**Immediate
Understanding and
the Application of
a Word in Time.**

Ein Wort *verstehen* = es anwenden können. Eine Sprache *verstehen*: einen Kalkül *beherrschen*.

¹Man könnte sagen: Uns² interessiert nur der *Inhalt* des Satzes [d.h. nur das was der Satz selber sagt³]; und⁴ der Inhalt des Satzes ist in ihm. Seinen Inhalt hat der Satz als Glied des Kalküls.

⁵Ist also „einen Satz verstehen“ von der gleichen Art, wie „einen Kalkül beherrschen“? Also wie: multiplizieren können?⁶

⁷Die Bedeutung eines Worts verstehen, heißt, seinen Gebrauch kennen, verstehen.

⁸„Ich kann das Wort ‚gelb‘ anwenden“ – ist das auf einer anderen Stufe als „ich kann Schach spielen“, oder „ich kann den König im Schachspiel verwenden“?

⁹Die Frage, die unmittelbar mit unserer in Beziehung steht, ist die nach dem Sinn der Aussage „ich *kann* Schach spielen“?

„Ich weiß, wie ein Bauer ziehen darf.“

„Ich weiß, wie das Wort ‚Kugel‘ gebraucht werden darf.“

¹⁰Wenn ich sage „ich kann dieses Gewicht heben“, so kann man antworten: „das wird sich zeigen, wenn Du es versuchst“; und geht es dann nicht, so kann man sagen „siehst Du, Du konntest es nicht“; und ich kann darauf nicht antworten „doch, ich konnte es, als ich es sagte, nur als es zum Aufheben kam, konnte ich es nicht“. Ob man es kann, *wird die Erfahrung zeigen*. Anders ist es, wenn ich sage „ich verstehe diesen Befehl“; dies ist, oder scheint ein Erlebnis zu sein. „Ich muß wissen, ob ich ihn (jetzt) verstehe“ – aber nicht: Ich muß wissen, ob ich das Gewicht *jetzt* heben kann. – Wie ist es nun in dieser Hinsicht mit dem Satz „ich kann Schach spielen“? Ist das etwas, was sich zeigen wird, oder kann man sagen „als ich es behauptete, konnte ich Schach spielen, nur jetzt kann ich es nicht“.

Ist nicht das, was mich rechtfertigt, nur, daß ich mich erinnere, früher Schach gespielt zu haben? Und etwa, daß ich, aufgefordert zur Probe die Regeln im Geiste durchfliegen kann?

1 (M): ? / (R): dazu S. 2/3
 2 (V): Kann ich sagen, mich // uns
 3 (V): Satz sagt
 4 (O): Und
 5 (M): ? /

6 (R): S. 190 siehe S. 148/4 (V): können? Das
 glaube ich.
 7 (M): J ✓
 8 (M): / ✓
 9 (M): /
 10 (M): ?

*To Understand a Word =
To Be Able to Use It.
To Understand a Language:
To Have Command of a Calculus.*

¹One could say:² we're only interested in the *content* of a proposition [that is, only in what the proposition itself says³]. And the content of a proposition lies within it. A proposition has its content as part of a calculus.

⁴So is "understanding a proposition" like "having command of a calculus"? And so like: being able to multiply?⁵

⁶Understanding the meaning of a word means being familiar with, understanding, its use.

⁷"I can use the word 'yellow'" – is that on a different level from "I can play chess" or "I can use the king in a chess game"?

⁸The question immediately related to ours is: What is the sense of the statement "I *can* play chess"?

"I know how a pawn can move."

"I know how the word 'sphere' can be used."

⁹If I say "I can lift this weight" then a possible response is: "That will become apparent when you try"; and then if I fail it can be said: "See, you couldn't do it"; and I can't respond to this, "Oh, yes I could when I said I could; it was just when it came to the lifting that I couldn't do it". *Experience will show* whether one can do it. Things are different when I say "I understand this command"; this is, or seems to be, an experience. "I must know whether I understand it (now)" – but not: I must know whether I can lift the weight *now*. – And what about the proposition "I can play chess"? Is that something that will become apparent, or can one say: "When I made the claim I could play chess, it's only now that I can't"?

Isn't the only thing that vindicates me that I remember having played chess before? And that, say, I can run over the rules in my mind if I'm asked to prove it?

1 (M): ? / (R): to p. 2/3

2 (V): Can I say, I'm

3 (V): the proposition says

4 (M): ? /

5 (R): P. 190 see p. 148/4 (V): multiply? †
believe so.

6 (M):] ✓

7 (M): / ✓

8 (M): /

9 (M): ?

¹¹Ist es nicht auch so beim Gebrauch des Wortes „Kugel“? Ich gebrauche das Wort instinktiv. Aufgefordert aber, Rechenschaft darüber zu geben, ob ich es verstehe, rufe ich mir, gleichsam zur Probe, gewisse Vorstellungen hervor.

(Es kann nicht darauf ankommen, ob die Sprache instinktiv oder halbinstinktiv gebraucht wird. Wir sind hier im Sumpf der graduellen Unterschiede, nicht auf dem festen Grund der Logik.) (Ist es nicht das Schachspiel, wenn es automatisch gespielt wird?)

143v ¹²Wenn ich auf die Frage: „kannst Du dieses Gewicht heben“, antworte „ja“, ist damit ein Zustand¹³ nicht-hypothetisch beschrieben, ähnlich¹⁴ also, wie wenn man mich gefragt hätte „hast Du Kopfschmerzen¹⁵“?

¹⁶Man kann das Wort können so verstehen daß die Ausführung als Kriterium der Fähigkeit gilt aber auch so daß dies nicht der Fall ist.

Fragt man mich kannst Du diese Kugel heben & ich sage ja dann versuche ich, sie zu heben, aber es gelingt mir nicht, so gibt es einen Fall in welchem ich sagen werde „ich hatte mich geirrt, ich konnte sie nicht heben“ aber auch den „jetzt kann ich sie nicht heben, weil ich schon müde bin, als ich aber sagte ich könne sie heben, da konnte¹⁷ ich es“, ebenso¹⁸ „als ich sagte ich könne Schach spielen konnte ich’s, aber durch diesen Schreck habe ich es vergessen“, etc. Gefragt „wie weißt Du daß Du es damals konntest“ würde¹⁹ man etwa sagen: „ich habe es immer gekonnt“, „ich hatte gerade zuvor eine Partie gespielt“, „mein Gedächtnis ist doch nicht so schlecht“, „ich hatte²⁰ gerade die Regeln hergesagt“ und Ähnliches.

In keinem Fall ist die Fähigkeit ein bewußter Zustand wie Zahnschmerzen.

Was gilt alles als Kriterium dafür daß man ein Recht hat zu sagen man könne es.

144 ²¹„Wenn ich sage ‚sieh‘, dort ist eine Kugel‘, oder ‚dort ist eine Halbkugel^{22c}‘, so kann die Ansicht²³ zu beidem²⁴ passen, und wenn ich sage ‚ja, ich sehe sie^{25c}‘, so unterscheide ich doch zwischen den beiden Hypothesen. Wie ich im Schachspiel zwischen einem Bauer und dem

145 König unterscheide, auch wenn der gegenwärtige Zug einer ist, den beide machen könnten, und wenn selbst eine Königsfigur als Bauer fungierte.

Das Wort ‚Kugel‘ ist mir *bekannt* und steht in mir für etwas; d.h., es bringt mich in eine gewisse Stellung zu sich (wie ein Magnet eine Nadel in seine Richtung bringt).“

²⁶Man ist in der Philosophie immer in der Gefahr, eine Mythologie des Symbolismus zu geben, oder der Psychologie. Statt einfach zu sagen, was jeder weiß und zugeben muß.

²⁷Wenn ich gefragt würde „kannst Du das Alphabet hersagen“, so würde ich antworten: ja. – „Bist Du sicher“ – „Ja“. Wenn ich nun aber im Hersagen steckenbliebe und nicht weiter wüßte, so gibt es doch einen Fall, in welchem ich sagen würde „ja, als ich sagte, ich könne es hersagen, da konnte ich es“, und zwar dann, wenn ich es mir damals „im Geiste“ hergesagt hätte. Ich würde dies auch als Beweis angeben. Das heißt aber, daß das Hersagen im Geiste die Fähigkeit zum wirklichen Hersagen – so wie wir hier das Wort Fähigkeit verstehen – enthält.

11 (M): ∫ XXXX

12 (M): /// (R): An den Anfang des § 6 (p. 22)

13 (V): Zustand ~~beschrieben~~

14 (O): ähnlich

15 (V): Kopfschmerzen;

16 (M): /

17 (O): könnte

18 (O): Ebenso

19 (O): konntest würde

20 (V): „ich habe mir

21 (M): /// (R): Zu § 38 S. 185

22 (V): ist ein Kegel

23 (V): Ansicht (~~ein Kreis~~)

24 (V): Ansicht (~~ein Kreis~~) auf beides

25 (V): es

26 (M): ? / ✓

27 (M): ? / ✓

¹⁰Isn't this the way it is when I use the word "ball"? I use the word instinctively. But if I'm asked to demonstrate whether I understand it, then as a kind of check, I call up certain mental images.

(It can't matter whether language is used instinctively or semi-instinctively. Here we're in the swamp of gradual differences and not on the firm ground of logic.) (Isn't it still chess, even if it's played automatically?)

¹¹If I answer "Yes" to the question: "Can you lift this weight", have I described my state unhypothetically, i.e. as if I had been asked "Do you have a headache"?

¹²One can understand the words "be able to" in such a way that performance counts as the criterion for the ability, but also in such a way that it doesn't.

If I'm asked whether I can lift this ball and I say yes, and then I try to lift it but don't succeed, then in one case I'll say "I was wrong, I wasn't able to lift it"; but in another case I might say, "I can't lift it now because I'm tired, but when I said I could, I could", and similarly, "When I said I could play chess I was able to, but because of this scare I've forgotten how to", etc. When asked "How do you know that you were able to do this earlier?", one might say: "I've always been able to do it", "I'd just finished playing a game", "My memory isn't all that bad", "I'd just recited the rules",¹³ and such things.

In no case is the ability a conscious state, like a toothache.

What counts as a criterion for being justified in saying that one is able to do something?

¹⁴"If I say 'Look, there's a sphere over there', or 'There's a hemisphere¹⁵ over there', then what is seen¹⁶ can fit both cases, and if I say 'Yes, I see it', I am distinguishing between the two hypotheses. Just as in chess I distinguish between a pawn and a king, even if the current move is one that both could make, and even if the king were to function like a pawn.

The word 'sphere' is *known* to me and stands for something within me; i.e. it brings me into a certain position with respect to itself (as a magnet draws a needle in its direction)."

¹⁷In philosophy one is always in danger of creating a mythology of symbolism, or of psychology. Instead of simply saying what everybody knows and has to admit.

¹⁸If I were asked "Can you recite the alphabet?", I'd answer "Yes". – "Are you certain?" – "Yes". But if in reciting it I were to get stuck and couldn't continue, then there *is* a case in which I might say "When I said I could recite it I was able to", i.e. if at that time I had recited it "in my head". And I would cite this as proof. But that means that reciting in one's head includes the ability actually to recite – as we understand the word "ability" here.

10 (M): ∫XXXX

11 (M): /// (R): In the beginning of § 6 (p. 22)

12 (M): /

13 (V): "I've just recited the rules ~~to myself~~",

14 (M): //// (R): To § 38 p. 165

15 (V): cone

16 (V): seen (~~a circle~~)

17 (M): ? / ✓

18 (M): ? / ✓

²⁸Etwas tun *können* hat ja eben jenen schattenhaften Charakter, das heißt, es erscheint als²⁹ ein Schatten des tatsächlichen³⁰ Tuns, gerade wie der Sinn des Satzes als Schatten seiner Verifikation³¹ erscheint; oder das Verständnis des Befehles als Schatten seiner Ausführung. Der Befehl „wirft, gleichsam, seinen Schatten schon voraus“, oder, „im³² Befehl wirft die Tat ihren Schatten voraus“. – Dieser Schatten aber, *was immer* er sein mag, ist, was er ist, und nicht das Ereignis. Er ist in sich selbst abgeschlossen und weist nicht weiter als er selbst reicht.

³³Das ist doch der gleiche Fall wie: „Kannst Du Deinen Arm heben?“ In welchem Falle
146 würde ich dies verneinen müssen, oder bezweifeln? Solche Fälle sind leicht zu denken.

Als Bestätigung dessen, daß wir den Arm heben können, sehen wir etwa³⁴ ein Zucken mit den Muskeln an, oder eine kleine Bewegung des Arms.³⁵ Oder die geforderte Bewegung selbst, jetzt ausgeführt, als Kriterium dafür, daß ich sie gleich darauf ausführen *kann*.

28 (M): /// ✓ (R): Zu S. 99

29 (V): wie

30 (V): wirklichen

31 (V): Schatten einer Tatsache

32 (O): oder, im

33 (M): ? / ✓

34 (V): etwas

35 (V): Die Bestätigung dessen, daß . . . können, sehen wir etwa in einem Zucken mit den Muskeln oder einer kleinen Bewegung des Arms.

¹⁹*Being able* to do something has a shadowy quality, i.e. it seems like a shadow of actually²⁰ doing it, just as the sense of a proposition seems like the shadow of its verification²¹; or the understanding of a command the shadow of its being carried out. The command “casts its shadow ahead itself, as it were”, or “The act casts its shadow ahead of itself” in the command. – But *whatever* this shadow may be, it is what it is, and is not the event. It is contained within itself, and doesn’t point any further than it reaches.

²²But that’s the same as: “Can you lift your arm?”. When would I have to say “No” to this, or doubt it? Such cases are easy to imagine.

As confirmation that we can raise our arm we see, say, a quick jerking of our muscles, or a slight movement of our arm.²³ Or the requisite motion itself is now carried out, and we see that as a criterion that it *can be* carried out in the immediate future.

19 (M): /// ✓ (R): To p. 99

20 (V): really

21 (V): of a fact

22 (M): ? / ✓

23 (V): We see confirmation that we can raise our arm, say, in a quick jerking of our muscles, or in a slight movement of our arm.

Wie begleitet das Verstehen des Satzes das Aussprechen oder Hören des Satzes?

Wann kann das Gefäß . . . enthalten?

¹Das schwierigste Problem scheint der Gegensatz, das Verhältnis zu sein zwischen dem Operieren mit der Sprache im Lauf der Zeit² und dem momentanen Erfassen des Satzes.

³Aber *wann* erfassen oder verstehen wir den Satz?! *Nachdem* wir ihn ausgesprochen haben? – Und wenn: während wir ihn aussprechen, –⁴ ist das Verstehen ein artikulierter Vorgang, wie das Bilden des Satzes, oder ein unartikulierter? Und wenn ein artikulierter: muß er nicht projektiv mit dem andern verbunden sein? Denn sonst wäre seine Artikulation von der ersten unabhängig.

⁵„Er sagt das, und *meint* es“: Vergleiche das einerseits mit: „er sagt das, und schreibt *es* nieder“; andererseits mit: „er schreibt das und unterschreibt *es*“.

⁶Man könnte fragen: Wie lange braucht es,⁷ um einen Satz zu verstehen. Und wenn man ihn eine Stunde lang versteht, beginnt man da immer wieder von frischem?⁸

148 ⁹Ist das Verstehen nicht das Erfassen des Satzes, so kann es auch nach diesem (und warum nicht auch vorher) vor sich gehen.

¹⁰Ist das Verstehen eines Satzes dem Verstehen eines Schachzuges, als Schachzuges,¹¹ nicht analog? Wer das Schachspiel gar nicht kennt und sieht jemand einen Zug machen, der wird ihn nicht verstehen, d.h. nicht als Zug eines Spieles verstehen. Und es ist etwas anderes, dem Zug¹² mit Verständnis zu folgen, als ihn¹³ bloß zu sehen.

¹⁴Was ist es aber dann, was¹⁵ uns immer das Gefühl gibt, daß das Verstehen eines Satzes das Verstehen von etwas außerhalb ihm Liegendem ist und zwar nicht von der Welt außerhalb des Zeichens, wie sie eben ist, sondern von der Welt, wie das Zeichen sie – gleichsam – wünscht.

1 (M): / ✓

2 (V): Sprache in der Zeit

3 (M): / ✓

4 (V): Und wenn, während . . . aussprechen:

5 (M): / ✓

6 (M): / ✓

7 (V): man,

8 (O): wieder vom frischen?

9 (M): ∫ ✓

10 (M): / ✓ ///

11 (V): Schachzuges, als solchen,

12 (V): Spiel

13 (V): es

14 (M): / ✓ ///

15 (V): das

How Does Understanding a Sentence Accompany Uttering or Hearing it?

When can the vessel contain . . . ?

¹The most difficult problem seems to be the contrast, the relationship, between carrying out linguistic operations over time² and the instantaneous grasping of a sentence.

³But *when* do we grasp or understand a sentence?! *After* we have uttered it? – And if it’s while we’re uttering it: is this understanding an articulated event, like the formation of a sentence, or an unarticulated one? And if it’s articulated: doesn’t it have to be connected with the process of sentence-formation like a projection? For otherwise its articulation would be independent of that of the process of sentence-formation.

⁴Compare “He says that and *means* it” with: “He says that and writes *it* down”, on the one hand, and with: “He writes that and affirms *it*”, on the other.

⁵One could ask: How long does it⁶ take to understand a sentence? And if one understands it for one hour, does one then always start out afresh?

⁷If understanding is not the grasping of the sentence then it can also take place after it (and why not also before it?).

⁸Isn’t understanding a sentence analogous to understanding a chess move as a chess move?⁹ Someone who doesn’t know anything about chess and sees someone making a move won’t understand it, i.e. won’t understand it as a move of a game. And following a move¹⁰ with understanding is different from simply seeing it.

¹¹But what is it that always gives us the feeling that understanding a sentence means understanding something that lies outside it, and that that something is not the world outside the sign, as it happens to be, but the world as the sign – as it were – wishes it to be?

1 (M): / ✓
 2 (V): operations in time
 3 (M): / ✓
 4 (M): / ✓
 5 (M): / ✓
 6 (V): one

7 (M):] ✓
 8 (M): / ✓ ///
 9 (V): understanding a chess move as such?
 10 (V): following a game
 11 (M): / ✓ ///

¹⁶Man würde etwa (so) sagen: Ich sage ja nicht nur „zeichne einen Kreis“, sondern ich wünsche doch, daß der Andre etwas tut. (Gewiß!) Und, was der Andre tut, ist doch außerhalb dessen, was ich sage.¹⁷

¹⁸Das Verstehen eines Satzes der Wortsprache ist dem Verstehen eines musikalischen Themas (oder Musikstückes) viel verwandter, als man glaubt. Und zwar so, daß das Verstehen des sprachlichen Satzes näher als man denkt dem liegt, was man gewöhnlich das Verständnis des musikalischen Ausdrucks nennt. – Warum pfeife ich das gerade so? warum will ich den Wechsel der Stärke und des Zeitmaßes gerade auf dieses ganz bestimmte Ideal bringen?¹⁹ Ich möchte sagen: „weil ich weiß, was das alles heißt“ – aber was heißt es denn? – Ich wüßte es nicht zu sagen, außer durch eine Übersetzung in einen Vorgang vom gleichen Rhythmus.

149 ²⁰Das Können und Verstehen wird von der Sprache scheinbar als Zustand dargestellt, wie der Zahnschmerz, und das ist die falsche Analogie, unter der ich laboriere.

148v ²¹Wie, wenn man fragte: Wann *kannst* Du Schach spielen? Immer? Während Du spielst? &
149 während jedes Zuges? – Und wie seltsam²², daß Schachspielen-Können so kurze Zeit dauert²³ und eine Schachpartie so viel länger!

²⁴Wenn nun „das Wort ‚gelb‘ verstehen“ heißt, es anwenden können, so ist²⁵ die gleiche Frage: Wann *kannst* Du es anwenden. Redest Du von einer Disposition? Ist es eine Vermutung?

²⁶Augustinus: „*Wann* messe ich einen Zeitraum?“ Ähnlich meiner Frage: *Wann kann* ich Schach spielen.

16 (M): / ✓ / / /

17 (V): (Gewiß!) Und dieses Tun ist doch etwas anderes als das Sagen, und ist eben das Außerhalb, worauf ich weise // worauf der Satz weist //.

18 (M): / / ✓

19 (V): warum ~~bringe~~ ich den Wechsel . . . Ideal?

20 (M): / ✓

21 (M): / ✓

22 (V): Immer? oder während Du es sagst? // einen Zug machst? // aber während des ganzen Satzes? – Und wie seltsam

23 (V): braucht

24 (M): ? / ✓

25 (V): besteht

26 (M): / ✓

¹²One might put it somewhat (like this): I don't just *say* "Draw a circle"; no, I want the other person to do something. (Of course!) And what he does is, after all, outside what I say.¹³

¹⁴Understanding a sentence in word-language is much more closely related than one may think to understanding a musical theme or a piece of music. Specifically, understanding a sentence in language lies closer than one may think to what one ordinarily calls understanding a musical expression. – Why am I whistling this just *this way*? Why do I want to make my change in volume and tempo fit this very specific ideal? I'm inclined to say: "Because I know what it all means" – but what does it mean? – I couldn't say other than by translating it into a sequence that had the same rhythm.

¹⁵Language seemingly represents being able to, and understanding, as if they were states, like a toothache, and that is the false analogy under which I am labouring.

¹⁶What if one were to ask: When *are you able* to play chess? Always? While you are playing it? And during each move? – And how strange¹⁷ that being able to play chess lasts¹⁸ such a short time and a game of chess so much longer!

¹⁹Now if "understanding the word 'yellow'" means being able to use it, then there's the same question:²⁰ When *are you able* to use it? Are you talking about a disposition? Is it a hunch?

²¹Augustine: "When do I measure a length of time?" Similar to my question: *When am I able to play chess?*

12 (M): / ✓ ///

13 (V): And this doing is, after all, something different from the saying, and is precisely the "outside" that I'm pointing to. // that the proposition points to.

14 (M): // ✓

15 (M): / ✓

16 (M): / ✓

17 (V): Always? Or while you are saying it? // you are making a move? // and during the entire sentence? – And how strange

18 (V): requires

19 (M): ? / ✓

20 (V): then the same question exists:

21 (M): / ✓

Zeigt sich die Bedeutung eines
Wortes in der Zeit? Wie der
tatsächliche Freiheitsgrad eines
Mechanismus?¹ Enthüllt sich die
Bedeutung des Worts erst nach und
nach wie seine Anwendung
fortschreitet?²

³Es ist eine sehr merkwürdige Tatsache, daß ich mich bei dem Gebrauch der Sprache nicht erinnere, wie ich sie gelernt habe.⁴ Ich sage „hier sehe ich eine schwarze Kugel“. Ich weiß nicht, wie ich „schwarz“ und „Kugel“ gelernt habe. Meine Anwendung der Wörter ist unabhängig von diesem Erlernen. Es ist so, als hätte ich die Wörter selbst geprägt. Und hier werden wir wieder zu der Frage geführt: Wenn die Grammatik, die von den Wörtern handelt, für ihre Bedeutung wesentlich ist, muß ich die grammatischen Regeln, die von einem Wort handeln, alle im Kopf haben, wenn es für mich etwas bedeuten soll? Oder ist es hier, wie im Mechanismus: Das Rad, das stillsteht, oder auch sich dreht, das Rad in *einer* Lage, weiß, gleichsam, nicht, welche Bewegung ihm noch erlaubt ist, der Kolben weiß nicht, welches Gesetz seiner Bewegung vorgeschrieben ist; und doch wirkt das Rad und der Kolben nur durch jenes Gebundensein.⁵

Soll ich also sagen: Die grammatischen Regeln wirken in der Zeit? (Wie jene Führung.)⁶

149v

⁷Unterscheidung zwischen Regel & Erfahrungssatz. Wenn ein Satz der Grammatik ein Naturgesetz der Anwendung des Wortes wäre, so gäbe es grammatische Hypothesen; & wie ein Wort gebraucht werden kann zeigt sich dadurch, wie es gebraucht wird.

⁸Wie seltsam: es⁹ scheint als ob zwar eine physische (mechanische) Führung versagen, unvorhergesehenes zulassen könnte,¹⁰ aber eine Regel nicht! Sie wäre sozusagen die einzig verlässliche

1 (O): Mechanismus.

2 (R): gehört zu „Bedeutung“ § 9

3 (M): ? / (R): [Zu: „Lernen der Sprache“ „Wie wirkt das einmalige . . .“]

4 (E): Siehe: MS 110, S. 89: „Drury sagte mir heute, er habe überlegt, daß man sich nicht des Zustandes erinnern könne wo man noch nicht sprechen konnte. // daß es unmöglich sei sich des

Zust. zu erinnern vor der Erlernung der Sprache.“

5 (V): durch jene Gebundenheit.

6 (M): Vielleicht lehrreich

7 (M): ///

8 (M): /

9 (V): Wie seltsam, ~~es~~ es

10 (O): zulassen, könnte,

Is the Meaning of a Word Shown in
Time? Like the Actual Degree of
Freedom in a Mechanism?
Is the Meaning of a Word Only
Revealed in the Course of Time as
its Use Develops?¹

²It's a very remarkable fact that when I use language I don't remember how I learned it.³ I say "Here I see a black ball". I don't know how I learned "black" and "ball". My use of these words is independent of such learning. It's as if I had coined the words myself. And here again we're led to the question: If grammar, which deals with words, is essential to their meaning, do I have to have all the grammatical rules for a word in my head if it is to have any meaning for me? Or is it here as it is in a mechanism: A wheel that's either standing still or turning, a wheel in *one* position, doesn't know, as it were, what additional movements it's allowed, a piston doesn't know what law governs its movement; and yet the wheel and the piston are effective only by being constrained in this way.⁴

So should I say: Grammatical rules work temporally? (Like those controls.)⁵

⁶Distinction between a rule and an empirical proposition. If a grammatical proposition were a natural law for the use of a word there would be grammatical hypotheses; but how a word can be used is shown by how it is used.

⁷How strange: it⁸ seems that a physical (mechanical) control could fail and allow unforeseen things to happen, but not a rule! That would make a rule the only reliable control, so to speak. But what's

1 (R): belongs to "meaning" § 9

2 (M): ? / (R): [To: "learning a language"
"What effect does a one-time . . . have"] ?

3 (E): Cf. MS 110, p. 89: "Drury said to me
today that he had concluded that one couldn't
remember the state in which one couldn't yet

speak. // that it would be impossible to remem-
ber the state prior to learning language."

4 (V): only by that constraint.

5 (M): Perhaps instructive

6 (M): ///

7 (M): /

8 (V): How strange, # it

Führung. Aber worin besteht es, daß eine Führung eine Bewegung nicht zuläßt, & worin, daß eine Regel sie nicht zuläßt? – Wie weiß man das eine, & wie das andere?

150, 150v

¹¹Also: Das Wort „Kugel“ wirkt nur durch die Art¹² seiner Anwendung. Wenn aber „die Bedeutung eines Wortes verstehen“ heißt seine grammatische Anwendung kennen (die Möglichkeit seiner gr. Anw.), dann kann man fragen: „Wie¹³ kann ich denn gleich wissen was ich mit ‚Kugel‘ meine¹⁴, ich kann doch nicht die ganze Art der Anwendung des Wortes auf einmal im Kopfe haben?“

151

¹⁵Und ist es nicht ähnlich mit dem Schachspiel: in irgend einem Sinne kann man sagen, ich kenne die Regeln des Schachspiels („habe sie im Kopf“), wenn¹⁶ ich spiele. Aber ist dieses „sie im Kopf haben“ nicht wirklich nur eine Hypothese. Habe ich sie nicht nur insofern im Kopf, als ich sie in jedem besondern Falle anwende? – Gewiß, dies Wissen¹⁷ ist nur das hypothetische Reservoir, woraus das wirklich Gesehene Wasser fließt.

¹⁸Das Verständnis der Sprache – quasi des Spiels – scheint wie ein Hintergrund, auf dem der einzelne Satz erst Bedeutung gewinnt.¹⁹

²⁰Die allgemeine Regel erst enthüllt den Freiheitsgrad, die Beweglichkeit des Mechanismus. Das Bild des Mechanismus in einer seiner Stellungen enthält hiervon nichts.

²¹Soll ich nun sagen, der Freiheitsgrad des Mechanismus kann sich nur mit der Zeit enthüllen? Aber wie kann ich dann je wissen, daß er gewisse Bewegungen *nicht* machen kann (und daß er gewisse Bewegungen machen kann, die er gerade noch nicht gemacht hat).

²²Das Verständnis als eine *Disposition* der Seele, oder des Gehirns, geht uns nichts an.

150v

Das Bild des Mechanismus kann wohl ein Zeichen des Freiheitsgrades sein. D.h. als Ausdruck dafür gebraucht werden, welche Bewegungen etwas²³ ausführen *soll* (meiner Meinung nach ausführen wird, ausgeführt hat, etc.). Wenn ich aber sage das Bild *kann* ein Zeichen des Freiheitsgrades sein, – was heißt das? Was macht ein Bild zum Zeichen des Freiheitsgrades? Doch nicht daß man ihm etwas anderes, quasi einen existierenden Freiheitsgrad zuordnet. Außer indem man *zur Erklärung des Zeichens* auf einen Mechanismus zeigt & diesen gewisse Bewegungen ausführen läßt. Aber dann liegt darin keine Prophezeiung über das Verhalten *dieses* Mechanismus! Seine²⁴ vorgeführten Bewegungen waren vielmehr nur ein Zeichen, womit wir ein anderes erklärten.

11 (M): || (

12 (V): nur in der Art

13 (O): fragen: Wie

14 (V): seiner Anwendung. Und es wäre die seltsame Frage denkbar: „wie kann ich denn dann gleich wissen, was ich mit ‚Kugel‘ meine

15 (M): / ✓ ///

16 (V): während

17 (O): ~~w~~issen

18 (M): / ✓

19 (M):)

20 (M): ∫ ///

21 (M): ∫ / XXX

22 (M): ∫ XXX

23 (V): Bewegungen ~~es~~//er24 (V): Mechanismus! ~~es~~// s // seine

150, 151

involved in a control not allowing a movement, and what in a rule not doing so? – How do you know when it's the one, and when the other?

⁹So: The word “ball” works only because of¹⁰ the way it is used. But if “understanding the meaning of a word” means knowing its grammatical use (the possibility of its grammatical use) then it can be asked: “How can I know straightaway what I mean by ‘ball?’”¹¹ After all, I can't have the complete range of the use of this word in my head all at once.”

¹²And isn't this similar to chess: in some sense one can say that I know the rules of chess (“have them in my head”) when¹³ I'm playing. But isn't this “having them in my head” really just a hypothesis? Don't I have them in my head only in so far as I apply them in each specific case? – Certainly; this knowledge is only the hypothetical reservoir from which flows the water that is actually seen.

¹⁴An understanding of language – of a game, as it were – seems like a background against which the individual sentence then gains meaning.¹⁵

¹⁶Only the general rule reveals the degree of freedom, the mobility, of a mechanism. A picture of the mechanism in one of its positions contains nothing of this.

¹⁷So am I to say that a mechanism's degree of freedom can only become apparent as time goes by? But in that case how can I ever know that it *cannot* perform certain movements (and that it can perform certain movements it just hasn't performed yet)?

¹⁸Understanding as a *disposition* of the mind or the brain is none of our concern.

The picture of a mechanism can indeed be a sign of a degree of freedom. That is, it can be used to show what movements something¹⁹ *is supposed to* perform (in my opinion will perform, has performed, etc.). But when I say the picture *can* be a sign of a degree of freedom, what does that mean? What turns a picture into a sign for a degree of freedom? Certainly not that one attributes something else to it, an already existing degree of freedom, as it were. Except where, *as an explanation of a sign*, one points to a mechanism and lets it perform certain movements. But that contains no prediction about the behaviour of *this* mechanism! Rather, the movements we had it perform were only a sign we used to explain a different sign.

9 (M): || (

10 (V): only in

11 (V): it is used. And one could imagine the strange question: “Then how can I know straightaway what I mean by ‘ball?’;

12 (M): / ✓ ///

13 (V): while

14 (M): / ✓

15 (M):)

16 (M): ∫ ///

17 (M): ∫ / ×××

18 (M): ∫ ×××

19 (V): movements ‡

Begleitet eine Kenntnis der grammatischen Regeln den Ausdruck des Satzes, wenn wir ihn – seine Worte – verstehen?

„Gedanke“ nennen wir einen Vorgang¹ der den Satz begleitet aber auch den Satz² selbst³ im System der Sprache.

⁴Kann ich nicht sagen: ich meine die Verneinung, welche verdoppelt eine Bejahung gibt?

⁵Wäre das nicht, als würde man sagen: Ich meine die Gerade, deren zwei sich in einem Punkt schneiden.

⁶Wenn⁷ Du von Rot gesprochen hast, hast Du dann das gemeint, wovon man sagen kann, es sei hell, aber nicht, es sei grün, auch wenn Du an diese Regel nicht gedacht, noch⁸ von ihr Gebrauch gemacht hast? – Hast Du das „~“ verwendet, wofür $\sim\sim p = \sim p$ ist? auch wenn Du diese Regel nicht verwendet hast? Ist es etwa eine Hypothese, daß es *das* \sim war? Kann es zweifelhaft sein, ob es dasselbe war, und durch die Erfahrung bestätigt werden.

⁹Was heißt die Frage: Ist das dasselbe „~“, für welches die Regel $\sim\sim p = \sim p$ gilt?

¹⁰„Meinst Du das ‚~‘ so, daß ich aus $\sim p \sim\sim p$ schließen kann?“

153 ¹¹Das Schachspiel ist gewiß durch seine Regeln (sein Regelverzeichnis) charakterisiert. Und wir sagen, daß Einer, der eine Partie Schach spielt und jetzt einen Zug macht, etwas anderes tut, als der, der nicht Schach spielen kann (d.h. das Spiel nicht kennt) und nun eine Figur in die Hand nimmt und sie zufällig der Regel gemäß bewegt. Andererseits ist es klar, daß der Unterschied nicht darin bestehen muß,¹² daß der Erste in irgend einer Form die Regeln des Schachspiels vor sich hersagt oder überdenkt. – Wenn ich nun sage: „daß er Schach spielen kann, (wirklich Schach spielt, die Absicht hat, Schach zu spielen) besteht darin, daß er die Regeln kennt“, ist diese Kenntnis der Regeln in jedem Zuge in irgendeiner Form enthalten?

1 (V): nennen wir etwas

2 (O): auch der Satz

3 (V): „Gedanke“ ~~ist~~ ein Vorgang der den Satz begleitet aber auch der Satz selbst

4 (M): ? / /// (R): \forall S. 144/4

5 (M): ? / ///

6 (M): / ✓ |

7 (V): ~~Das heißt~~ Wenn

8 (V): oder

9 (M): /

10 (M): /

11 (M): | / XXXX

12 (V): darin besteht,

Does a Knowledge of Grammatical Rules Accompany the Expression of a Sentence when We Understand it – Its Words?

We call “thought” a process¹ that accompanies a sentence, but also the sentence itself in the system of language.

²Can’t I say: I mean the negation which, when doubled, gives me an affirmation?

³Wouldn’t that be like saying: I mean the straight line, two of which intersect at a point?

⁴When⁵ you spoke of red did you mean that of which one can say that it’s bright, but not that it’s green, even if you were neither thinking of this rule nor⁶ had you made use of it? – Did you use the “~” for which $\sim\sim p = \sim p$, even if you didn’t use this rule? Is it perhaps a hypothesis that it was *that* ~? Can it be doubted whether it was the same ~, and can this then be confirmed by experience?

⁷What’s the meaning of the question: Is this the same “~” for which the rule $\sim\sim p = \sim p$ is valid?

⁸“Do you mean the ‘~’ in such a way that I can conclude $\sim\sim p$ from $\sim p$?”

⁹Chess is certainly characterized by its rules (its list of rules). And we say that someone who makes a move in playing a game of chess is doing something different from someone else who can’t play (i.e. doesn’t know the game) and now picks up a piece and by chance moves it in accordance with the rules. On the other hand it’s clear that the difference need not¹⁰ consist in the first person reciting or thinking over the rules of chess in some way. – Now if I say “That he can play chess (really is playing chess, intends to play chess) consists in his knowing the rules”, is this knowledge of the rules contained in some way in his every move?

1 (V): We call something “thought” // “Thought” ~~is~~ a process

2 (M): ? / /// (R): \forall p. 144/4

3 (M): ? / ///

4 (M): / ✓ |

5 (V): ~~That means:~~ when

6 (V): were not thinking of this rule nor

7 (M): /

8 (M): /

9 (M): ∫ / ××××

10 (V): difference does not

Was heißt das: „er tut etwas anderes“? Hierin liegt schon die Verwendung eines irreführenden¹³ Bildes. Worin besteht der Unterschied? Man denkt da wieder an Gehirnvorgänge.

152v Das Schachspiel ist gewiß durch seine Regeln (sein Regelverzeichnis) charakterisiert. Wenn ich Schach nur durch¹⁴ seine Regeln definiere, so gehören diese Regeln zur Gr. des Wortes „Schach“.¹⁵

153 Worin besteht es die Absicht zu haben eine Partie Sch. zu spielen.¹⁶

¹⁷Kann man eine Intention haben, ohne sie auszudrücken? Kann man die Absicht haben, Schach zu spielen (in dem Sinne, in welchem man apodiktisch sagt „ich hatte die Absicht Schach zu spielen; *ich muß es doch wissen*“), ohne einen Ausdruck dieser Absicht? – Könnte man da nicht fragen: Woher weißt Du, daß das, was Du hattest, *diese* Absicht war? D.h. wie unterscheidet sich diese Absicht von der, Dame¹⁸ zu spielen.

Ist die Absicht Schach zu spielen etwa wie die Vorliebe für das Spiel, oder für eine¹⁹ Person. Wo man auch fragen könnte: Hast Du diese Vorliebe die ganze Zeit oder etc., und die Antwort ist, daß „eine Vorliebe haben“ gewisse Handlungen, Gedanken und Gefühle einschließt und andere ausschließt.²⁰

Das Sch. ist doch durch seine Regeln definiert.

154 ²¹Muß²² ich nicht sagen: „Ich weiß, daß ich die Absicht hatte, *denn* ich habe mir gedacht, jetzt komme ich endlich zum Schachspielen“ oder etc. etc.

²³Es würde sich mit der Absicht in diesem Sinne auch vollkommen vertragen, wenn ich beim ersten Zug darauf käme, daß ich alle Schachregeln vergessen habe, und zwar so, daß ich nicht etwa sagen könnte „ja, als ich den Vorsatz faßte,²⁴ da habe²⁵ ich sie noch gewußt“.

²⁶Es wäre wichtig, den Fehler allgemein auszudrücken, den ich in allen diesen Betrachtungen zu machen geneigt bin.²⁷ Die falsche Analogie, aus der er entspringt.

²⁸Ich glaube, jener Fehler liegt in der Idee, daß die Bedeutung eines Wortes eine Vorstellung ist, die das Wort begleitet.

Und diese Conception steht wieder mit der des Bewußt-Seins in Verbindung.²⁹ Dessen, was ich immer „das Primäre“ nannte.

³⁰Es stört uns quasi, daß der Gedanke eines Satzes in keinem Moment ganz vorhanden ist. Hier sehen wir, daß wir den Gedanken mit einem Ding vergleichen, welches wir erzeugen, und das wir nie als Ganzes besitzen; sondern, kaum entsteht ein Teil, so verschwindet ein anderer. Das hat gewissermaßen etwas unbefriedigendes, weil wir – wieder durch ein Gleichnis³¹ verführt – uns etwas Anderes erwarten.

-
- | | | | | |
|-----|--------------------------------------|-------------------|--------------------------------|--|
| 13 | (V): falschen | 22 | (O): Muß | |
| 14 | (V): ich des Schach durch | 23 | (M): ? / /// (R): [Zu: S. 354] | |
| 153 | 15 | (V): ✓ | 24 | (V): hatte, |
| | 15 | (V): ✓ | 25 | (V): hatte |
| | | | 26 | (M): ? ✓ |
| | 16 | (R): [Zu: S. 354] | 27 | (V): zu machen neige. |
| | 17 | (M): / (| 28 | (M): XXXXX |
| | 18 | (O): von der Dame | 29 | (V): Und diese Conception hat wieder mit . . . zu tun. |
| | 19 | (V): seine | 30 | (M): / (R): Zu S. 223 |
| | 20 | (M):) | 31 | (V): durch eine Erklärung |
| | 21 | (M): / | | |

What does it mean: “He’s doing something different”? This already uses a misleading¹¹ image. What does the difference consist in? Here again one thinks of processes in the brain.

Chess is certainly characterized by its rules (its list of rules). If I define chess only by its rules, then these rules belong to the grammar of the word “chess”.¹²

What does having the intention to play a game of chess consist in?¹³

¹⁴Can one have an intention without expressing it? Can one have the intention to play chess (in the sense in which one says apodeictically “I had the intention to play chess; *I ought to know, after all*”) without expressing this intention? – Couldn’t one then ask: How do you know that what you had was *this* intention? That is, how does this intention differ from the one to play draughts?

Is the intention to play chess like a fondness for that game, or for a¹⁵ person? If so, we could ask again: Do you have this fondness the whole time, or, etc.? And the answer is that “having a fondness” includes certain actions, thoughts and feelings, and excludes others.¹⁶

Chess *is* defined by its rules.

¹⁷Mustn’t I say: “I know I had the intention *because* I thought to myself ‘Now I’m finally going to get to play chess’” or etc., etc.

¹⁸It would also be entirely consistent with intention in this sense if, as I made my first move, I were to discover that I had forgotten all the rules of chess, in fact had forgotten them so completely that I couldn’t say, for instance, “Well, when I formed¹⁹ the intention I still knew them”.

²⁰It’s important to express the mistake that I am prone to²¹ make in all of these observations in general terms. To express the false analogy that is its source.

²²I believe that mistake lies in the idea that the meaning of a word is a mental image that accompanies the word.

And this conception is connected²³ in turn with that of consciousness. With the conception of what I always called “the primary”.

²⁴It bothers us, as it were, that the thought expressed by a sentence isn’t present in its entirety at any given moment. Here we see that we are comparing the thought with some thing we fabricate and that we never possess in its entirety; rather, as soon as one part comes into being, another one disappears. There is something disappointing about that, in a way, because – seduced once again by a simile²⁵ – we expect something else.

11 (V): false	18 (M): ? / /// (R): [To: p. 354]
12 (V): ✓ If chess is defined by its rules, then these rules belong to the grammar of the word “chess”.	19 (V): had
13 (R): [To: p. 354]	20 (M): ? ✓
14 (M): / (21 (V): I tend to
15 (V): for its	22 (M): ××××
16 (M):)	23 (V): conception has to do
17 (M): /	24 (M): / (R): To p. 223
	25 (V): by an explanation

³²Der Spieler, der die Intention hatte, Schach zu spielen, hatte sie schon dadurch, daß er zu sich etwa die Worte sagte „jetzt wollen wir Schach spielen“. Und etwa durch gewisse Gefühle die die Worte begleiteten.

155 Ich will sagen, daß das Wort „Schach“ eben auch (nur) ein Stein in einem Spiel³³ ist, das wir fortlaufend spielen.³⁴ Wird der Kalkül beschrieben, so müssen wir die Regeln tabulieren,³⁵ wird er aber angewandt, so wird jetzt gemäß der einen, dann gemäß der andern Regel vorgegangen, dabei kann uns ihr Ausdruck vorschweben, oder auch nicht.

³⁶Muß denn dem, der das Wort „Schach“ gebraucht, eine Definition des Wortes vorschweben? Gewiß nicht. – Gefragt, was er unter „Schach“ versteht, wird er erst eine geben. Diese Definition ist (selber) eine Handlung im Kalkül, den wir betreiben.³⁷

³⁸Wenn ich³⁹ aber nun fragte: Wie Du das Wort ausgesprochen hast, was hast Du damit gemeint? – Wenn er mir darauf antwortet: „ich habe das Spiel gemeint, das wir so oft gespielt haben etc. etc.“, so weiß ich, daß ihm diese Erklärung in keiner Weise beim Gebrauch des Wortes vorgeschwebt hatte, und daß seine Antwort meine Frage nicht in *dem* Sinn beantwortet, daß sie mir sagt, was⁴⁰ „in ihm vorgegangen ist“⁴¹, als er dieses Wort sagte.

154v ⁴²Statt „ich habe das Spiel gemeint, welches . . .“ hätte ich auch sagen können: ich setze *jetzt* statt des Wortes Schach das ich vorhin⁴³ gebraucht habe den Ausdruck: „das Spiel, was wir so oft . . .“

155 ⁴⁴Denn die Frage ist eben, ob unter der „Bedeutung, in der man ein Wort gebraucht“ ein Vorgang verstanden werden soll, den wir beim Sprechen oder Hören des Wortes erleben.

154v, 155 ⁴⁵Die Quelle der Verwirrung ist vielleicht der Begriff vom *Gedanken, der*⁴⁶ *den Satz begleitet*. (Oder⁴⁷ seinem Ausdruck vorangeht.) Dem Wortausdruck kann natürlich ein anderer Ausdruck vorangehen, aber für uns kommt der Artunterschied⁴⁸ dieser beiden Ausdrücke – oder
156 Gedanken – nicht in Betracht. Und es kann der Gedanke unmittelbar in seiner Wortform gedacht werden.

⁴⁹(„Er hat diese Worte gesagt, sich aber dabei gar nichts gedacht.“ – „Doch, ich habe mir etwas gedacht“⁵⁰. – „Und zwar was denn?“ – „Nun,⁵¹ was ich gesagt habe“.)

⁵²Man könnte sagen: auf die Aussage „dieser Satz hat Sinn“ kann man nicht wesentlich fragen „welchen?“ So wie man ja auch⁵³ auf den Satz „diese Worte sind ein Satz“ nicht fragen kann „welcher?“

⁵⁴„Dieses Wort hat doch eine ganz bestimmte Bedeutung“. Wie ist sie denn (ganz) bestimmt?

32 (M): ∫ ∫ // // (R): [Zu: S. 354]

33 (V): ~~Kalkül~~

34 (V): das wir spielen.

35 (V): die Regeln tabuliert vor uns haben,

36 (M): / ✓ // //

37 (V): ist selber ein bestimmter Schritt ~~in seinem~~ ~~Kalkül~~. // im Kalkulieren.

38 (M): / ✓

39 (V): ich ~~ihn~~

40 (V): was, ~~quasi~~,

41 (V): „in ihm vorgeing

42 (M): /

43 (V): früher

44 (M): ∫ ✓

45 (M): / ✓ // //

46 (V): Die Quelle des Fehlers scheint die Idee vom *Gedanken zu sein, der // ist der Begriff vom Gedanken, der*

47 (V): (Oder ~~der~~

48 (V): Unterschied

49 (M): / ✓

50 (V): habe etwas ~~dabei~~ gedacht

51 (V): „Nun, ~~das~~,

52 (M): / ✓

53 (V): wie man auch

54 (M): ×××

²⁶The player who had the intention of playing chess had it merely by saying to himself, for example, “Now let’s play chess”. And perhaps by having certain feelings that accompanied those words.

I’m trying to say that the word “chess” too is (nothing more than) a piece in a game²⁷ that we continually play.²⁸ To describe the calculus we have to tabulate the rules,²⁹ but to apply it we proceed now in accordance with one, now in accordance with another rule, the expression of that rule being in our minds in the process, or not.

³⁰Does someone who uses the word “chess” have to have a definition of the word in mind? Certainly not. – Only when he’s asked what he understands by “chess” will he give one. This definition is (itself) an action in the calculus that we’re carrying out.³¹

³²But suppose I were now to ask:³³ When you uttered the word what did you mean by it? – If he answers: “I meant the game that we played so often, etc., etc.” then I know that in no way did he have this explanation in mind when he used the word, and that his response doesn’t answer my question in *this* sense – that it tells me what³⁴ “was³⁵ going on inside him” when he said this word.

³⁶Instead of “I meant the game that . . .” I could also have said: Now I am replacing the word “chess”, which I just used,³⁷ with the expression “the game that we so often . . .”.

³⁸For the question is precisely whether the “sense in which one uses a word” is supposed to mean an event we experience when we speak or hear the word.

³⁹Perhaps the source of the confusion is the concept of the *thought that*⁴⁰ *accompanies the sentence*. (Or precedes its expression.) Of course another expression can precede the verbal expression, but the difference in kind⁴¹ between these two expressions – or thoughts – is immaterial to us. And the thought can be thought immediately in its verbal form.

⁴²(“He said these words, but gave them no thought whatsoever.” – “Oh yes, I was⁴³ thinking something”. – “And exactly what was that?” – “Well, what I said”).

⁴⁴We could say: In response to the statement “This sentence has a sense” you have missed something essential if you ask “Which one?”. Just as in response to the sentence “These words are a sentence” you can’t ask “Which one?”.

⁴⁵“But this word, after all, has a quite specific meaning.” So how is it (quite) specific?

26 (M): ∫ ∫ // // (R): [To: p. 354]

27 (V): ~~calculus~~

28 (V): we play.

29 (V): we have to have the rules tabulated in front of us,

30 (M): / ✓ // //

31 (V): definition is itself a particular step ~~in its~~ ~~calculus~~. // in calculating.

32 (M): / ✓

33 (V): ask ~~him~~:

34 (V): what, ~~for example~~,

35 (V): is

36 (M): /

37 (V): which I used earlier,

38 (M): ∫ ✓

39 (M): / ✓ // //

40 (V): The source of the mistake seems to be the idea of the *thought that* // is the concept of the *thought that*

41 (V): the difference

42 (M): / ✓

43 (V): yes, ~~in saying them~~ I was

44 (M): / ✓

45 (M): XXX

⁵⁵„Ich habe etwas bestimmtes damit gemeint, als ich sagte . . .“ – „Hast⁵⁶ Du bei jedem Wort etwas anderes gemeint, oder während des ganzen Satzes dasselbe?“

⁵⁷(Übrigens seltsam: wenn⁵⁸ man bei jedem – sagen wir, deutschen – Wort etwas meint, daß eine Zusammenstellung dieser⁵⁹ Wörter Unsinn sein kann!)

⁶⁰„Ich meine aber doch mit diesen Worten etwas“. Gewiß: im Gegensatz⁶¹ zu dem Falle, wo ich nichts meine, wo ich etwa Silben ihres komischen Klangs wegen aneinander reihe.

Ich will eigentlich sagen, daß „ich meine etwas mit den Worten“ nur heißt: ich unterscheide doch diesen Fall von dem des sinnlosen Plapperns etc. Und das ist zugegeben. Aber es ist damit noch keine besondere Theorie des Meinens gegeben.

157 ⁶²Und so geht es in allen solchen Fällen. Wenn etwa jemand sagt: „aber ich meine doch wirklich, daß der Andere Zahnschmerzen hat; nicht, daß er sich bloß so benimmt“. Immer muß man antworten: „Gewiß“ und zugeben, daß auch wir diese Unterscheidung machen müssen.⁶³

⁶⁴„Jetzt sehe ich’s erst, er zeigt immer auf die Leute, die dort vorübergehen.“ Er hat ein System verstanden: wie Einer, dem ich die Ziffern 1, 4, 9, 16 zeige und der sagt „ich versteh’ jetzt das System, ich kann jetzt selbst weiterschreiben“. Aber was ist diesem Menschen geschehen, als er das System plötzlich verstand?

⁶⁵Es handelt sich beim Verstehen, Meinens, nicht um einen Akt des momentanen, sozusagen nicht diskursiven,⁶⁶ Erfassens der Grammatik. Als könnte man sie gleichsam auf einmal herunterschlucken.

⁶⁷Das also, was der macht,⁶⁸ der auf einmal die Bewegung des Andern deutet⁶⁹ (ich sage nicht „richtig deutet“), ist ein Schritt in einem Kalkül. Er tut ungefähr, was er sagt, wenn er seiner Deutung⁷⁰ Ausdruck gibt.⁷¹ Und wenn ich sage „was er macht, ist der Schritt eines Kalküls“, so heißt das, daß ich diesen Kalkül schon kenne; in dem Sinne, in dem ich die deutsche Sprache kenne, oder das Einmaleins. Welche ich ja auch nicht so in mir habe, als wären⁷² die ganze deutsche Grammatik und die Einmaleins-Sätze zusammengeschoben auf etwas, was ich nun als Ganzes besitze.⁷³

158 ⁷⁴Gewiß, der Vorgang des „jetzt versteh’ ich . . .!“ ist ein ganz spezifischer, aber es ist eben auch ein ganz spezifischer Vorgang, wenn wir auf einen bekannten Kalkül stoßen, wenn wir „weiter wissen“.

Aber dieses Weiter-Wissen ist eben auch *diskursiv* (nicht intuitiv).

⁷⁵„Intuitives Denken“, das wäre so, wie „eine Schachpartie auf die Form eines dauernden, gleichbleibenden Zustandes gebracht“.⁷⁶

55 (M): / (R): Zu S. 224

56 (V): sagte . . .“ – „Wann hast Du es gemeint und wie lange hat es gebraucht. Und hast

57 (M): / (R): Zu S. 224

58 (V): Übrigens komisch, daß, wenn

59 (V): solcher

60 (M): / ✓

61 (V): Gegensatz z. B. -etwa

62 (M): ∫ ///

63 (V): daß diese Unterscheidung besteht.

64 (M): XXXX

65 (M): / ✓

66 (V): momentanen, sozusagen nicht diskursiven,

67 (M): ? / ✓

68 (V): tut,

69 (V): auf einmal das Zeichen, das im [sic] der Andere gegeben // gegeben hat, // versteht

70 (V): er seinem Verständnis

71 (V): gibt. – Und das ist ja immer unser Prinzip. –

72 (V): wäre

73 (V): auf Etwas, was man auf einmal, als Ganzes, erfassen kann. // was ich nun auf einmal, als Ganzes, besitze.

74 (M): XXXXX

75 (M): / (R): Zu S. 223

76 (V): gebracht“. (ebenso undenkbar).

⁴⁶“I meant something specific when I said” – Did⁴⁷ you mean something different as you got to each word, or the same thing throughout the entire sentence?

⁴⁸(Strange, by the way:⁴⁹ if one means something by each – let’s say English – word, that a combination of these words⁵⁰ can be nonsense!)

⁵¹“But I do mean something by these words.” Certainly; as opposed⁵² to the case where I don’t mean anything, where, say, I string syllables together because of their amusing sound.

Really all I am trying to say is that “I mean something by the words” means: “I distinguish this case from one of senseless chatter, etc.” Granted. But this doesn’t constitute a distinctive theory of meaning.

⁵³And that’s the way it is in all of these cases. As when someone says, for instance: “But I really do mean that that person has a toothache, not that he is merely acting as if he did”. One always has to answer: “Of course”, and admit that we too must make this distinction.⁵⁴

⁵⁵“Now I see it, he keeps pointing to the people passing by over there.” This person has understood a system: like someone to whom I show the numbers 1, 4, 9, 16 and who says “Now I understand the system, now I can continue on my own”. But what happened to this person when he suddenly understood the system?

⁵⁶In understanding, or meaning, something, it isn’t a matter of an act of grasping the grammar instantaneously, and so to speak, non-discursively.⁵⁷ As if one could swallow it down whole.

⁵⁸So what someone takes⁵⁹ who suddenly interprets someone else’s movement⁶⁰ (I’m not saying that he “interprets it correctly”) is a step in a calculus. He *does* more or less what he *says* when he expresses his interpretation.⁶¹ And when I say that “what he is doing is a step in a calculus” that means that I already know this calculus; in the sense in which I know English or the multiplication tables. Which of course I also don’t have in me, as if all of English grammar and the propositions of the multiplication tables were telescoped into something that I now possess as a whole.⁶²

⁶³To be sure, the process of “Now I understand . . . !” is quite specific, but hitting upon a familiar calculus, “knowing how to go on”, *is also* a quite specific process.

But the point is that this knowing-how-to-go-on is *discursive* (not intuitive).

⁶⁴“Intuitive thinking.” That would be like “a game of chess transformed into a perpetual, unchanging state”.⁶⁵

46 (M): / (R): To p. 224

47 (V): said” – “~~When did you mean it and how long did it take? And did~~

48 (M): / (R): To p. 224

49 (V): Funny, by the way, ~~that~~

50 (V): of such words

51 (M): / ✓

52 (V): opposed ~~for example~~

53 (M): / / / /

54 (V): that this distinction exists.

55 (M): XXX

56 (M): / ✓

57 (V): instantaneously, ~~and so to speak~~, non-discursively.

58 (M): ? / ✓

59 (V): ~~does~~

60 (V): suddenly understands the sign that someone else gives // has given // him

61 (V): expresses his understanding. – ~~And to be sure that is always our princip-~~ –.

62 (V): something that one can grasp all at once, as a whole. // something that now ~~all of a sudden~~ I possess, as a whole.

63 (M): XXXX

64 (M): / (R): To p. 223

65 (V): state”. (~~Just as inconceivable.~~)

159 Die grammatischen Regeln – und die
Bedeutung eines Wortes. Ist die
Bedeutung, wenn wir sie verstehen,
„auf einmal“ erfaßt; und in den
grammatischen Regeln gleichsam
ausgebreitet?

¹Und doch ist noch etwas nicht klar,² was sich z.B. in der dreifachen Verwendung des Wortes „ist“ zeigt. Denn, was heißt es, wenn ich sage, daß im Satz „die Rose ist rot“ das „ist“ eine andere Bedeutung hat, als in „zweimal zwei ist vier“? Wenn man sagt, es heiße, daß verschiedene Regeln von diesen beiden Wörtern gelten, so muß man zunächst sagen, daß wir hier nur *ein* Wort haben. Zu sagen aber: von diesem gelten in einem Fall *die* Regeln, im anderen jene, ist Unsinn.

Und das hängt wieder mit der Frage zusammen, wie wir uns denn aller Regeln bewußt sind, wenn wir ein Wort in einer bestimmten Bedeutung gebrauchen, und doch die Regeln die Bedeutung ausmachen?

³Wenn ich nun aber das Wort „ist“ betrachte: Wie kann ich hier zwei verschiedene Anwendungsarten unterscheiden, wenn ich nur auf die grammatischen Regeln achte?⁴ Denn diese erlauben ja eben die Verwendung des Wortes im Zusammenhang „die Rose ist rot“ und „zweimal zwei ist vier“. An diesen Regeln sehe ich nicht, daß wir hier zwei verschiedene Wörter haben.⁵ – Ich ersehe es aber z.B. wenn ich versuche, in beiden Sätzen statt „ist“ „ist gleich“ einzusetzen⁶ (oder auch den Ausdruck „hat die Eigenschaft“). Aber nur wieder, weil ich für den Ausdruck „ist gleich“ die Regel kenne, daß er in „die Rose . . . rot“ nicht stehen darf.⁷

⁸Wenn ich mich weigere ein Wort, z.B. das Wort „ist gleich“, in zwei Zusammenhängen zu gebrauchen, so ist der Grund das, was wir mit den Worten beschreiben das Wort werde in diesen Fällen in verschiedenem Sinn gebraucht.⁹

1 (M): / ✓

2 (V): etwas unklar,

3 (M): / ✓

4 (V): sehe?

5 (V): daß es sich um zwei verschiedene Wörter handelt.

6 (V): „ist gleich“ zu setzen

7 (V): nicht eingesetzt werden darf.

8 (M): ///

9 (V): beschreiben „das Wort habe in den beiden Fällen verschiedene Bedeutung“.

The Rules of Grammar – and the Meaning of a Word. Is Meaning, When We Understand it, Grasped “all at once”? And Unfolded, as it Were, in the Rules of Grammar?

¹And yet something else, which shows itself for example in the three uses of the word “is”, is not clear.² For what does it mean when I say that “is” in the sentence “The rose is red” has a different meaning than in “Twice two is four”? If we say that this means that different rules are valid for these two words, then the first thing to be said is that we have only *one* word here. But to say that in one case *these* rules are valid for it, and in another, those, is nonsense.

And this in turn is connected with the question of how we can be aware of all the rules when we use a word with a certain meaning, considering that the rules, after all, constitute the meaning?

³Now if I look at the word “is”: How can I distinguish between two different kinds of its use if I pay attention only to⁴ the grammatical rules? For it’s precisely these rules that allow the use of the word in “The rose is red” and “Twice two is four”. Looking at these rules, I don’t see that here we have⁵ two different words. – But I do see it, for example, if I try to substitute⁶ “equals” for “is” in both sentences (or “has the property”). But again only because I know the rule for the expression “equals”, know that it can’t appear in⁷ “The rose . . . red”.

⁸If I refuse to use a word, e.g. the word “equals”, in two contexts, the reason for this is what is described in saying that the word is used in a *different* sense in these two cases.⁹

1 (M): / ✓

2 (V): is unclear.

3 (M): / ✓

4 (V): if I only look at

5 (V): that here it is a matter of

6 (V): posit

7 (V): it can’t be inserted into

8 (M): ///

9 (V): saying “the word has different meanings in both cases”.

¹⁰Kann ich nun aber das, was die grammatischen Regeln von einem Worte sagen, auch anders beschreiben, nämlich durch die Beschreibung des Vorgangs, der beim Verstehen des Wortes stattfindet?

¹¹Wenn also die Grammatik – z.B. – die Geometrie der Verneinung ist, kann ich sie durch eine Beschreibung dessen ersetzen, was bei der Verwendung sozusagen hinter dem Wort „nicht“ steht?

¹²Aber so eine Beschreibung wäre doch – wie gesagt – ein Ersatz für das Wort¹³ „nicht“, etwa wie $\frac{P}{W|F}$ und könnte die Grammatik nicht ersetzen.¹⁴

159v, 160 ¹⁵Es können die gr. Regeln als die Auseinanderlegung dessen erscheinen, was ich im Gebrauch des Wortes auf einmal erlebe.¹⁶ Sozusagen (nur) Folgen, Äußerungen,
161 der Eigenschaften, die ich beim Verstehen auf einmal erlebe?¹⁷ Das muß natürlich ein Unsinn sein.

¹⁸Man möchte¹⁹ sagen: die²⁰ Verneinung hat die Eigenschaft, verdoppelt²¹ eine Bejahung zu ergeben.²² Während die Regel die Verneinung nicht näher beschreibt, sondern konstituiert.

²³Daß wir dieses Wort dieser Regel gemäß gebrauchen, das dafür einsetzen etc., damit dokumentieren wir, wie wir es meinen.

²⁴„Wie ich einen Körper durch seine verschiedenen Ansichten geben kann und er mit diesen äquivalent ist, so offenbart sich die Natur der Negation in den verschiedenen, grammatisch erlaubten Anwendungen des Negationszeichens.“

²⁵„Die doppelte Negation gibt eine Bejahung“, das klingt so wie: Kohle und Sauerstoff gibt Kohlensäure. Aber in Wirklichkeit *gibt* die doppelte Negation nichts, sondern *ist* etwas.

²⁶„Wer die Negation versteht, der weiß, daß die doppelte Negation . . .“

²⁷Es täuscht uns da etwas eine physikalische Tatsache vor.

So, als sähen wir ein Ergebnis *des logischen* Prozesses. Während das Ergebnis nur das des *physikalischen* Prozesses ist.

²⁸Das Wort „nicht“ in der grammatischen Regel hat keine Bedeutung, sonst könnte *das* nicht von ihm ausgesagt werden.

162 ²⁹Die Negation hat keine andere Eigenschaft, als etwa die, in gewissen Sätzen, die Wahrheit zu ergeben.

10 (M): / l_b

11 (M): / l_c

12 (M): XXX (F): MS 110, S. 101.

13 (V): Ersatz des Wortes

14 (M): (?)

15 (M): ? / l_a

16 (V): In meiner Darstellung schienen doch die grammatischen Regeln die Auseinanderlegung dessen, was ich . . . erlebe.
// Sind die grammatischen Regeln die Auseinanderlegung dessen, was . . . erlebe?

17 (V): erlebe.

18 (M): ? / l_d

19 (V): Man würde ja geradezu

20 (V): **eine**

21 (O): Eigenschaft, sie verdoppelt

22 (V₁): die Eigenschaft, daß sie verdoppelt eine Bejahung **ergibt**. (V₂): zu ergeben. (~~Etwa wie: Eisen hat die Eigenschaft, mit Schwefelsäure Eisensulfat zu geben.~~)

23 (M): ///

24 (M): ///

25 (M): / l_b

26 (M): / l_a

27 (M): / l_c

28 (M): ∫ /// l_f

29 (M): ? / l_e

¹⁰Now can I give a different description of what the rules of grammar say about a word by describing the process that takes place when we understand it?

¹¹So if the grammar is, for example, the geometry of negation, can I replace it with a description of what stands behind the word “not”, so to speak, when it is applied?

¹²But – as we have said – such a description would be a replacement for¹³ the word “not”, as $\frac{P}{T} \mid \frac{F}{F}$ would be, for instance; and it couldn’t replace the grammar.¹⁴

¹⁵Grammatical rules can seem like an explication of¹⁶ what I experience all at once when I use a word. (Merely) consequences, expressions, so to speak, of the properties I experience¹⁷ all at once when I understand? Of course that has to be nonsense.

¹⁸One is inclined to say:¹⁹ negation has the property of resulting in an affirmation when it is doubled.²⁰ Whereas the rule for it doesn’t describe negation any better. Rather, it constitutes it.

²¹In using this word in accordance with this rule, in substituting this for it, etc., we document how we mean it.

²²“Just as I can portray an object through its various projections, and it is equivalent to these, the nature of negation manifests itself in the various grammatically permissible uses of the negation sign.”

²³“A double negation yields an affirmation” sounds like: Carbon and oxygen yield carbon dioxide. But in reality a double negation doesn’t *yield* anything; it *is* something.

²⁴“Anyone who understands negation knows that a double negation”

²⁵Something here is giving us the illusion of a physical fact.

As if we were seeing the result of a *logical* process. Whereas results only come from *physical* processes.

²⁶The word “not” in the grammatical rule has no meaning; otherwise *that* statement could not be made about it.

²⁷Negation has no other property than, for example, that of producing the truth in certain propositions.

10 (M): / l_b

11 (M): / l_c

12 (M): XXX (F): MS 110, p. 101.

13 (V): of

14 (M): (?)

15 (M): ? / l_b

16 (V): In my presentation grammatical rules seemed to be the explication of // Are grammatical rules the explication of

17 (V): experience

18 (M): ? / l_d

19 (V): ~~Indeed, one would flatly say:~~

20 (V): doubled. (~~More or less like: iron has the property of resulting in iron sulphate when combined with sulphuric acid.~~)

21 (M): ///

22 (M): ///

23 (M): / l_b

24 (M): / l_a

25 (M): / l_c

26 (M): ∫ /// l_f

27 (M): ? / l_e

Und ebenso hat ein Kreis die Eigenschaft, da oder dort zu stehen, diese Farbe zu haben, von einer Geraden *tatsächlich* geschnitten zu werden; aber nicht, was ihm die Geometrie zuzuschreiben scheint. (Nämlich diese Eigenschaften haben zu können.)

³⁰Was heißt es: „Dieses Papier ist nicht schwarz und ‚nicht‘ ist hier so³¹ gebraucht, daß eine dreifache Verneinung eine Verneinung ergibt“? Wie hat sich denn das im Gebrauch geäußert?

Oder: „Dieses Papier ist nicht schwarz und zwei von diesen Verneinungen geben eine Bejahung“. Kann ich das sagen?

Oder: „Dieses Buch ist rot und die Rose ist rot und die beiden Wörter ‚rot‘ haben die gleiche Bedeutung“. (Dieser Satz ist von gleicher Art wie die beiden oberen.) Was ist denn das für ein Satz? ein grammatischer? Sagt er etwas über das Buch und die Rose?

Ist der Zusatz zum Verständnis des ersten Satzes nicht nötig, so ist er Unsinn, und wenn nötig, dann war das erste noch kein Satz; und dasselbe gilt in den oberen Fällen.

³²„Daß 3 Verneinungen wieder eine Verneinung ergeben, muß doch schon in der einen Verneinung, die ich jetzt gebrauche, liegen.“ Aber deutete ich hier nicht schon wieder? (D.h. bin ich nicht im Begriffe, einen Mythos³³ zu erfinden?)

³⁴Heißt es etwas, zu sagen, daß drei *solche* Verneinungen eine Verneinung ergeben. (Das erinnert immer an „drei solche Pferde können diesen Wagen fortbewegen“.) Aber, wie gesagt, in jenem logischen Satz ist gar nicht von der Verneinung die Rede (von der Verneinung handeln nur Sätze wie: es regnet nicht) sondern nur vom Wort „nicht“, und es ist eine Regel über die Ersetzung eines Zeichens durch ein anderes.

163 ³⁵Aber können wir die Berechtigung dieser Regel nicht einsehen, wenn wir die Verneinung verstehen? Ist sie nicht eine Folge aus dem Wesen der Verneinung? Sie ist nicht eine Folge, aber ein Ausdruck dieses Wesens.

³⁶Was wir sehen, wenn wir einsehen, daß eine doppelte Verneinung etc. . . . muß von der Art dessen sein, was wir im Zeichen $\frac{P}{W|F|W}$ ³⁷wahrnehmen.³⁸

$$\frac{P}{W|F|W}$$

³⁹Die Geometrie spricht⁴⁰ so wenig von Würfeln, wie die Logik von der Verneinung.

⁴¹(Man möchte hier vielleicht einwenden, daß die Geometrie vom Begriff des Würfels und die Logik vom Begriff der Negation handelt. Aber diese Begriffe gibt es nicht.)

⁴²Man kann einen Würfel, aber nicht die Würfelform beschreiben.⁴³ Aber kann ich denn nicht beschreiben, wie man z.B. eine Kiste macht? Und ist darin⁴⁴ nicht eine Beschreibung der Würfelform enthalten?⁴⁵ Das Wesentliche am Würfel ist damit nicht beschrieben, das steckt vielmehr in der Möglichkeit dieser Beschreibung, d.h. darin, daß sie eine Beschreibung ist; nicht darin, daß sie zutrifft.

30 (M): / √ (R): √

31 (V): hier in dem Sinne

32 (M): / √

33 (V): Begriffe, eine Mythologie

34 (M): √

35 (M): /

36 (M): / / / /

37 (F): MS 110, S. 104.

38 (M): (?)

39 (M): /

40 (V): spricht ~~aber~~

41 (M): / / /

42 (M): / ✓

43 (V): einen Würfel ~~—ich meine das Wesentliche des Würfels—~~ nicht beschreiben.

44 (V): damit

45 (V): Beschreibung ~~des~~ // ~~eines~~ // ~~Würfels~~ gegeben?

And likewise a circle has the property of being situated here or there, of having this colour, of *actually* being bisected by a straight line; but it doesn't have what geometry seems to ascribe to it. (Namely, the ability to have these properties.)

²⁸What does this mean: "This paper is not black, and here 'not' is used in such a way²⁹ that a triple negation yields a single one"? How did that get expressed in its use?

Or: "This paper is not black, and two of these negations result in an affirmation". Can I say this?

Or: "This book is red and a rose is red and the two words 'red' have the same meaning". (This proposition is the same kind as the two above.) What kind of a proposition is that, anyway? A grammatical one? Does it say anything about the book and the rose?

If the addendum isn't necessary for understanding the first proposition then it's nonsense, and if it *is* necessary then the first proposition wasn't yet a proposition; and the same holds for the other cases above.

³⁰"That three negations result in a single negation must already be contained in the single negation that I'm now using." But isn't this interpretation, once again? (That is, am I not about to invent a myth³¹?)

³²Does it mean anything to say that three *such* negations result in a single negation? (This is always reminiscent of "Three such horses can move this wagon".) But, as mentioned above, negation isn't even being talked about in that proposition of logic (only sentences like "It's not raining" are about negation); only the word "not" is being talked about, and it is a rule for the replacement of one sign by another.

³³But can't we see the justification for this rule ³³when we understand negation? Isn't the rule a consequence of the nature of negation? It isn't a consequence, but an expression, of that nature.

³⁴What we see when we realize that a double negation, etc. . . . must be of the same kind as what we perceive in the table $\frac{P}{T|F|T} \frac{F}{F|T|F}$.³⁵

³⁶Geometry³⁷ no more speaks of cubes than logic does of negation.

³⁸(One might be inclined to object here that geometry deals with the concept of a cube and logic with the concept of negation. But there are no such concepts.)

³⁹One can describe a cube, but not the form of a cube.⁴⁰ But can't I describe how to make a box, for instance? And doesn't this contain a description of the form of a cube?⁴¹ What is essential to a cube isn't described by it. On the contrary, the essence is contained in the possibility of this description, i.e. in the fact that it is a description; not in the fact that the description is accurate.

28 (M): / ∨ (R): ∇

29 (V): used in the sense

30 (M): / ∨

31 (V): inventing a mythology

32 (M): ∨

33 (M): /

34 (M): / ///

35 (M): (?) (F): MS 110, p. 104.

36 (M): /


37 (V): ~~But~~ geometry

38 (M): ///

39 (M): / ✓

40 (V): One cannot describe a cube (~~I mean what is essential to a cube~~).

41 (V): And isn't a description ~~of // of a // cube~~ given by this?

⁴⁶Nun kann ich doch aber sagen: „Ich sehe die Figur  3-dimensional“. Aber dieser Satz entspricht der Beschreibung einer Kiste. Er beschreibt einen bestimmten Würfel, nicht die Würfelform. Freilich kann ich das Wort „Würfel“ definieren. D.h. Zeichen geben, durch die es ersetzt werden kann.⁴⁷

⁴⁸Man kann eine geometrische Figur nicht beschreiben. Auch die Gleichung beschreibt sie nicht, sondern vertritt sie durch die Regeln, die von ihr gelten.

164 ⁴⁹Und haben wir hier nicht das Wort „Figur“ so angewandt,⁵⁰ wie in unseren Betrachtungen so oft das Wort „Gedanke“ oder „Symbol“? Die Art der Anwendung dieses Wortes, von welcher ich sagte, es bedeute dann kein Phänomen, sondern sei quasi ein unvollständiges Symbol⁵¹ und entspreche eher einer Funktion.

⁵²Man kann auch nicht sagen, die Würfelform habe die Eigenschaft, lauter gleiche Seiten zu besitzen. Wohl aber hat ein Holzklötz diese Eigenschaft. (Noch hat „die Eins die Eigenschaft, zu sich selbst addiert, zwei zu ergeben“.)

⁵³Ich sagte doch: Es schien, als wären die grammatischen Regeln die „Folgen in der Zeit“ dessen, was wir in einem Augenblick wahrnehmen, wenn wir eine Verneinung verstehen.

Und als gebe es also zwei Darstellungen des Wesens der Verneinung: Den Akt (etwa den seelischen Akt) der Verneinung selbst, und seine Spiegelung in dem System der Grammatik.

⁵⁴Man könnte sagen:⁵⁵ die Gestalt eines Würfels wird doch sowohl durch die Grammatik des Wortes „Würfel“, als auch durch einen Würfel, dargestellt.

⁵⁶In „ $\sim p$ & ($\sim \sim p = p$)“ kann der zweite Teil nur eine Spielregel sein.



Wenn Du weißt was ich mit einer halben Drehung meine so wirst Du verstehen daß zwei halbe Drehungen einander aufheben.

⁵⁷Es hat den Anschein, als könnte man aus der Bedeutung der Negation *schließen*, daß $\sim \sim p$, p heißt.

⁵⁸Als würden aus der Natur der Negation die Regeln über das Negationszeichen *folgen*.

165 ⁵⁹So daß, in gewissem Sinne, die Negation zuerst vorhanden ist⁶⁰ und dann die Regeln der Grammatik.

⁶¹Es ist also, als hätte das Wesen der Negation einen zweifachen Ausdruck in der Sprache: Dasjenige, was ich sehe, wenn ich die Negation verstehe, und die Folgen dieses Wesens in der Grammatik.

⁶²Zu sagen, daß eine Vierteldrehung ein Quadrat mit sich selbst zur Deckung bringt, heißt doch offenbar nichts andres als: Das Quadrat ist um zwei zueinander senkrechte Achsen

46 (M): ///

47 (V): darf.

48 (M): /// (R): Zu S. 91

49 (M): } /// (R): Zu S. 91

50 (V): angewendet,

51 (V): Zeichen

52 (M): // ✓ ///

53 (M): } / ✓ ////

54 (M): / } / ///

55 (V): Man ist versucht zu sagen:

56 (M): } ///

57 (M): // ✓


58 (M): / ✓ ///

59 (M): }

60 (V): wäre

61 (M): / ✓

62 (M): } ///

⁴²Still, I *can* say: “I see the figure  3-dimensionally”. But this sentence corresponds to the description of a box. It describes a particular cube, not the form of a cube. To be sure, I can define the words “form of a cube”. That is, produce signs with which the words can⁴³ be replaced.

⁴⁴One can’t describe a geometric figure. And its equation doesn’t describe it. Rather, it stands in for the figure via the rules that are valid for it.

⁴⁵And haven’t we used the word “figure” here the same way we’ve so often used the words “thought” and “symbol” in our examinations? The way of using this word where I said that it didn’t mean a phenomenon, but that it was like an incomplete symbol,⁴⁶ and that it corresponded more closely to a function.

⁴⁷Likewise, you can’t say that the form of a cube has the property of having all sides equal. But a block of wood does. (Neither does “the number one have the property of resulting in two when added to itself”.)

⁴⁸But I did say: It seemed as if the grammatical rules were the “consequences in time” of what we perceive in an instant when we understand a negation.

As if there were therefore two ways of representing the nature of negation: The act (say, the psychological act) of negation itself, and its reflection in the system of grammar.

⁴⁹One could say:⁵⁰ The form of a cube is represented both by the grammar of the word “cube” and by a cube.

⁵¹In “ $\sim p$ & ($\sim\sim p = p$)” all the second part can be is a rule of the game.



If you know what I mean by half a turn then you’ll understand that two half turns cancel each other.

⁵²It seems as if one could *infer* from the meaning of negation that $\sim\sim p$ means p .

⁵³As if the rules for the negation sign *followed* from the nature of negation.

⁵⁴So that in a certain sense there is⁵⁵ first of all negation, and only then the rules of grammar.

⁵⁶So it is as if the nature of negation had a dual expression in language: What I see when I understand a negation, and the consequences of this nature in grammar.

⁵⁷To say that a quarter turn will bring a square into coincidence with itself obviously means nothing more than: A square is symmetrical around two axes that are perpendicular with

42 (M): ///

43 (V): may

44 (M): /// (R): To p. 91

45 (M): ∫ /// (R): To p. 91

46 (V): sign,

47 (M): // ✓ ///

48 (M): ∫ / ✓ ////

49 (M): ∫ ∫ / ///

50 (V): One is tempted to say:

51 (M): ∫ ///

52 (M): // ✓

53 (M): / ✓ ///

54 (M): ∫

55 (V): there would be

56 (M): / ✓

57 (M): ∫ ///

symmetrisch, und das wieder, daß es Sinn hat, von zwei senkrechten Achsen zu reden, ob sie vorhanden sind oder nicht. Dies ist ein Satz der Grammatik.

⁶³Die Schwierigkeit ist wieder, daß es so scheinen kann,⁶⁴ als wäre in einem Satz, der, z.B., das Wort „Quadrat“⁶⁵ enthält, schon der Schatten anderer Sätze, die mit diesem Wort gebildet sind, enthalten.⁶⁶ – Nämlich eben die *Möglichkeit* andere Sätze⁶⁷ zu bilden, die ja, wie ich sagte, im Sinn des Wortes „Quadrat“ liegt.

Und doch kann man eben nur sagen, der andere Satz ist nicht mit diesem ausgesprochen, auch nicht in einer schattenhaften Weise.⁶⁸

⁶⁹Statt der Betrachtung der Negation, könnte ich auch die eines Pfeiles setzen und z.B. sagen: wenn ich ihn zweimal um 180° drehe, zeigt er wieder, wohin er jetzt zeigt; welcher Satz dem $\sim \sim p = p$ entspricht. Wie ist es nun hier mit der Darstellung des Wesens dieses Pfeils durch die Sprache? Jener Satz muß doch unmittelbar von diesem Wesen abgelesen⁷⁰ sein und es also darstellen.

166 Oder nehmen wir den Fall eines Quadrats und eines Rechtecks und die Sätze, daß das Quadrat durch eine Vierteldrehung mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann; das Rechteck aber erst durch eine halbe Drehung.

⁷¹Es fragt sich: Was ist das für ein Satz „das Wort ‚ist‘ in ‚die Rose ist rot‘ ist dasselbe wie in ‚das Buch ist rot‘, aber nicht dasselbe, wie in ‚zweimal zwei ist vier‘“? Man kann nicht antworten, es heiße, verschiedene Regeln gelten von den beiden Wörtern, denn damit geht man im Zirkel. Wohl aber heißt es, das Wort ist in seinen verschiedenen Verbindungen durch zwei Zeichen ersetzbar, die nicht für einander einzusetzen sind. Ersetze ich dagegen das Wort in den beiden ersten Sätzen durch zwei verschiedene Wörter, so darf ich sie für einander einsetzen.⁷²

⁷³Nun könnte ich wieder fragen: ist diese Regel⁷⁴ nur eine *Folge des Ersten*: daß im einen Fall die beiden Wörter „ist“ die gleiche Bedeutung haben, im andern Fall nicht? Oder ist es so, daß diese Regel eben der sprachliche Ausdruck dafür ist, daß die Wörter das Gleiche bedeuten?

⁷⁵Ich möchte die Metapher gebrauchen,⁷⁶ daß das Wort „ist“ einen andern Bedeutungskörper hinter sich hat⁷⁷ wenn es einmal für „=“ einmal für „ε“ steht.⁷⁸ Daß es beide Male die gleiche Vorderfläche⁷⁹ ist, die einem andern Körper angehört, wie wenn ich ein Dreieck im Vordergrund sehe, das das eine Mal die Endfläche eines Prismas, das andre Mal eines Tetraeders ist.

⁸⁰Oder denken wir uns diesen Fall: Wir hätten vollkommen⁸¹ durchsichtige Glaswürfel, deren eine Seitenfläche⁸² rot gefärbt wäre. Wenn wir sie aneinander reihen, so werden im Raum

63 (M): ∫ / ///

64 (V): daß es scheint,

65 (V): der ~~etwa~~ das Wort „Kugel“

66 (V): schon der Schatten eines andern Satzes mit diesem Worte enthalten.

67 (V): *Möglichkeit* jenen anderen Satz

68 (V): auch nicht schattenhaft. (~~Und wird vielleicht nie ausgesprochen werden.~~)

(R): Siehe: S. 144/2

69 (M): ///

70 (V): abgeleitet

71 (M): ? / /// (

72 (M):)

73 (M): ∫ / ///

74 (V): fragen: sind diese Regeln

75 (M): /

76 (V): Ich will es damit vergleichen,

77 (V): andern ~~Wortkörper~~ hinter sich hat.

78 (O): steht“. (V): einmal = einmal ε bedeutet

79 (V): Fläche

80 (R): ∇ S. 145/1

81 (V): ganz

82 (V): Seite

respect to each other, and that in turn means that it makes sense to talk about two perpendicular axes, whether they are present or not. This is a grammatical proposition.

⁵⁸Once again, the difficulty is that it can look⁵⁹ as if a sentence containing the word “square”, for example,⁶⁰ already contained the shadows of other sentences that are formed with this word.⁶¹ – That is to say, the *possibility* of forming sentences⁶², which, as I said, is contained in the sense of the word “square”.

And yet all one can say is that the other sentence is not uttered by uttering this one, not even in a shadowy way.⁶³

⁶⁴Instead of considering negation I might also consider an arrow and say, for example: “If I turn it 180° twice then it points once again where it’s pointing now; which proposition corresponds to $\sim\sim p = p$.” Now how does representing the nature of this arrow through language work here? For presumably the latter proposition must have been read off⁶⁵ this nature directly, and therefore must represent it.

Or let’s take the case of a square and a rectangle, and the propositions that a square can be brought into coincidence with itself by a quarter turn, but that it takes half a turn to do this with a rectangle.

⁶⁶The question arises: What kind of a sentence is “The word ‘is’ in ‘The rose is red’ is the same as in ‘The book is red’ but not the same as in ‘Twice two is four’”? The answer can’t be that this means that different rules are valid for the two words, for that would be arguing in a circle. What it means is that the word is replaceable in its different contexts by two signs that cannot be substituted for each other. On the other hand, if I substitute two different words for a word that is the same in the first two sentences, then I am allowed to substitute them for each other.⁶⁷

⁶⁸But again I could ask: Is this rule⁶⁹ just a *consequence* of the *first* proposition: that in the one case the two words “is” have the same meaning, and not in the other? Or is this rule simply the linguistic expression of the fact that the words mean the same thing?

⁷⁰I’d like to use the metaphor⁷¹ that the word “is” has a different meaning-body⁷² behind it when at one time it stands for “=”, at another for “ε”.⁷³ That in both cases it is the same outer surface⁷⁴ but one that belongs to different bodies, as when I see a triangle in the foreground that is at one time the end surface of a prism, at another that of a tetrahedron.

⁷⁵Or let’s imagine this: we have absolutely⁷⁶ transparent cubes of glass, one surface⁷⁷ of which is coloured red. If we line them up against each other, then because of their cubical shapes

58 (M): ∫ / ///

59 (V): it looks

60 (V): word “sphere”, ~~for example,~~

61 (V): contained the shadow of another sentence that contains this word.

62 (V): forming that other sentence

63 (V): not even in a shadowy way. (~~And perhaps will never be uttered.~~) (R): See: p. 144/2

64 (M): ///

65 (V): must be derived from

66 (M): ? / /// (

67 (M):)

68 (M): ∫ / ///

69 (V): ask: Are those rules

70 (M): /

71 (V): I’d like to compare this to the fact

72 (V): ~~word~~-body

73 (V): it when it first means “=”, then “ε”.

74 (V): the same surface

75 (R): ∀ p. 145/1

76 (V): completely

77 (V): side

167 nur ganz bestimmte Anordnungen⁸³ roter Quadrate entstehen können, bedingt durch die Würfelform der Körper. Ich könnte nun die Regel, nach der hier rote Quadrate angeordnet sein können, auch ohne Erwähnung der Würfel geben,⁸⁴ aber in ihr wäre doch bereits das Wesen der Würfelform präjudiziert. Freilich nicht, daß wir gläserne Würfel haben,⁸⁵ wohl aber die Geometrie des Würfels.

⁸⁶Wenn wir nun aber einen Würfel⁸⁷ *sehen*, sind *damit* wirklich schon alle Gesetze der möglichen Zusammenstellung gegeben?! Also die⁸⁸ Geometrie?

Kann ich die Geometrie des Würfels von einem Würfel ablesen?

⁸⁹Der Würfel ist dann eine Notation der Regel.

Und hätten wir eine solche Regel gefunden, so könnten wir sie wirklich nicht besser notieren, als durch die Zeichnung eines Würfels (und daß es hier eine Zeichnung tut, ist wieder ungemein bedeutsam⁹⁰).

⁹¹Und nun ist die Frage: Wie kann aber der Würfel,⁹² oder die Zeichnung (denn die beiden kommen hier auf dasselbe⁹³ hinaus) als Notation der geometrischen Regeln dienen?

⁹⁴Doch⁹⁵ nur, sofern er einem System angehört:⁹⁶ nämlich der Würfel mit der einen roten Endfläche wird etwas anderes notieren, als eine Pyramide mit quadratischer roter Basis, etc. D.h., er⁹⁷ wird dasjenige Merkmal der Regeln notieren, worin sich z.B. der Würfel von der Pyramide unterscheidet.

⁹⁸Jedes Zeichen der Negation ist gleichwertig jedem andern, denn $\frac{P}{W|F}$ ⁹⁹ist ebenso ein Komplex von Strichen, wie das Wort „nicht“, und zur Negation wird es nur durch die Art, wie es „*wirkt*“ d.h. wie es im Spiel gebraucht wird.¹⁰⁰

168 ¹⁰¹Ich möchte sagen: Nur dynamisch wirkt das Zeichen, nicht statisch. Der Gedanke ist dynamisch.

¹⁰²Daß die Tautologie und Kontradiktion nichts sagen, geht nicht etwa aus dem W-F-Schema hervor, sondern muß festgesetzt werden. Und die Schemata machen nur die Festsetzung der Form einfach.¹⁰³

¹⁰⁴Du sagst, das Hinweisen auf einen roten Gegenstand ist das primäre Zeichen für „rot“. Aber das Hinweisen auf einen roten Gegenstand ist nicht mehr, als die bestimmte Handbewegung gegen einen roten Gegenstand, und ist außer in einem System¹⁰⁵ gar kein Zeichen. Wenn Du sagst, Du meinst: das Hinweisen auf den roten Gegenstand *als Zeichen*

83 (V): so wird im Raum nur (eine) ganz bestimmte Anordnung

84 (V): angeben,

85 (V): daß es gläserne Würfel sind,

86 (M): //

87 (V): einen ~~solchen~~ Würfel

88 (V): die ~~ganze~~

89 (M): //

90 (V): ~~wichtig~~

91 (M): /

92 (V): Frage: in wiefern // wie // kann der Würfel,

93 (V): auf eines (O): auf eine

94 (M): ? /

95 (V): Doch ~~nach~~

96 (V): nur, sofern er als Satz einem System von Sätzen angehört.

97 (O): es

98 (M): /

99 (F): MS 110, S. 116.

100 (V): es „*wirkt*“. ~~Hier aber ist nicht die Wirkung im Sinne der Psychologie (das Wort „Wirkung“ also nicht kausal gemeint, sondern die Form seiner Wirkung.~~

101 (M): /

102 (M): / ✓

103 (V₁): der Form leicht. (V₂): machen nur die Form der allgemeinen Festsetzung einfach.

104 (M): ? / XXX – ehe sie gezogen wurden.

(R): [Zu S. 93]

105 (V): und ist ~~vorläufig~~

only certain arrangements⁷⁸ of red squares can come about. Now I could give⁷⁹ the rule for the possible arrangement of the red squares without even mentioning the cubes, but the nature of the form of a cube would already be prejudged in it. But this rule would prejudice not that we have⁸⁰ glass cubes, but the geometry of a cube.

⁸¹When we *see* a⁸² cube, does *this* really give us all the laws for its possible combinations?! That is, its geometry⁸³?

Can I read the geometry of a cube off a cube?

⁸⁴In that case a cube is a notation for its rule.

And if we had discovered such a rule, we really couldn't record it better than by drawing a cube (and it is extraordinarily significant⁸⁵ that it is a drawing that does this here).

⁸⁶And now the question arises: How⁸⁷ can a cube, or a drawing of one (for here the two amount to the same thing⁸⁸) serve as a notation for its geometrical rules?

⁸⁹Surely⁹⁰ only in so far as it belongs to a system⁹¹: for the cube with the one red surface will record something different from a pyramid with a square red base, etc. That is, the cube will record that particular feature of the rules by which it differs, for example, from a pyramid.

⁹²Every negation sign is equivalent to every other one, for $\frac{P}{T} | \frac{F}{T}$ ⁹³is as much a complex of lines as is the word "not", and it becomes a negation only by the kind of "effect" it has, i.e. by how it is used in a game.⁹⁴

⁹⁵I would like to say: A sign only works dynamically, not statically. Thought is dynamic.

⁹⁶That tautology and contradiction say nothing in no way emerges from the T–F schema, but has to be stipulated. And all the schemata do is to make the stipulation of the form simple.⁹⁷

⁹⁸You say that pointing to a red object is the primary sign for "red". But pointing to a red object is nothing more than a particular motion of the hand towards a red object, and is no sign at all except within a system.⁹⁹ If you say you mean: pointing to a red object *understood as a sign* – then I say: The understanding that is our concern is not a process that

78 (V): only a certain arrangement

79 (V): state

80 (V): that they are

81 (M): //

82 (V): *see such* a

83 (V): its *entire* geometry

84 (M): //

85 (V): *important*

86 (M): /

87 (V): arises: To what extent

88 (V): to one thing

89 (M): ? /

90 (V): Surely *also*

91 (V): only in so far as a proposition it belongs to a system of propositions

92 (M): /

93 (F): MS 110, p. 116.

94 (V): it has. ~~But what is meant here isn't "effect" in the psychological sense, i.e. the word "effect" isn't meant in its causal sense but rather the form of its effect.~~

95 (M): /

96 (M): / ✓

97 (V₁): easy (V₂): make the form of a general stipulation simple.

98 (M): ? / XXX – were drawn. (R): [To p. 93]

99 (V): and is ~~for the time being~~ no sign at all.

verstanden – so sage ich: das Verständnis, auf das es uns ankommt, ist kein Vorgang, der das Hindeuten begleitet (etwa ein Vorgang im Gehirn) und wenn Du doch so einen Vorgang meinst, so ist dieser an sich wieder kein Zeichen. Die Idee ist hier immer wieder, daß die Meinung, die Interpretation, ein Vorgang sei, der das Hinweisen begleitet und ihm sozusagen die Seele gibt (ohne welche es tot wäre).

- 167v Es scheint hier als ob das Zeichen die ganze Gr. zusammenfaßte, daß sie in ihm enthalten wäre, wie eine Perlenschnur in einer Schachtel und wir sie nur herausziehen müßten.¹⁰⁶ (Aber dieses Bild ist es eben, welches¹⁰⁷ uns irreführt.) Als wäre¹⁰⁸ das Verständnis ein momentanes Erfassen von etwas, wovon später nur die Konsequenzen gezogen werden; und zwar so, daß diese Konsequenzen bereits in einem ideellen Sinn existieren, ehe sie gezogen wurden.¹⁰⁹ Als ob¹¹⁰ der Würfel¹¹¹ schon die ganze Geometrie des Würfels enthielte und ich sie nun nur noch auszubreiten hätte.¹¹² Aber welcher Würfel? Der Gesichtswürfel, oder ein Eisenwürfel? Oder gibt es einen idealen geometrischen Würfel?¹¹³ – Offenbar schwebt uns der Vorgang vor, wenn wir aus einer Zeichnung, Vorstellung (oder einem Modell) Sätze der Geometrie ableiten.¹¹⁴ Aber welche Rolle spielt dabei das Modell? Doch wohl die des Zeichens.¹¹⁵ Des Zeichens, welches eine bestimmte Verwendungsart hat und nur durch diese¹¹⁶ bezeichnet. Es ist allerdings interessant und merkwürdig, wie dieses Zeichen verwendet wird, wie wir, etwa, die Zeichnung des Würfels wieder und wieder bringen mit immer anderen Zutaten. Einmal sind die Diagonalen gezogen, einmal Würfel aneinander gereiht, etc. etc. Und es ist dieses Zeichen (*mit der Identität eines*¹¹⁷ Zeichens), welches wir für jenen Würfel nehmen, in dem die geometrischen Gesetze bereits liegen. (Sie liegen in ihm so wenig, wie im Schachkönig die Dispositionen, in gewisser Weise benützt zu werden.)¹¹⁸

-
- | | | |
|------|--|---|
| 168 | 106 (V ₁): Das scheint besonders dort so, wo ein Zeichen die ganze Grammatik zusammenzufassen scheint, daß wir sie aus ihm ableiten könnten, und es scheint, daß , daß sie in ihm enthalten wäre, wie . . . und wir sie nur herausziehen müßten. (V ₂): Der Würfel scheint seine ganze Gr. zusammenzufassen, // Es scheint, als ob der Würfel seine ganze Grammatik zusammenfaßte, // daß wir sie aus ihm ableiten könnten, daß sie in ihm enthalten wäre, wie die Perlenschnur . . . müßten. (V ₃): Es scheint hier als ob das Zeichen die ganze Gr. zusammenfaßte, daß wir sie aus ihm ableiten könnten, & sie in ihm wie eine Perlenschnur in einer Schachtel wäre, die wir nur herausziehen müßten. | 109 (M): /
110 (V): ob also
111 (V): Würfel z.B.
112 (V): habe.
113 (V): einen ideellen Würfel?
114 (V): der Vorgang vor, aus einer Zeichnung, . . . Geometrie ableiten .
115 (V): Zeichens!
116 (V): dieses
117 (V): <i>des</i>
118 (M): überprüfen (R): [dazu S. 145/1] √ S. 22/1, 2 (V): werden.) /// Die geometrischen Gesetze <i>konstituieren</i> den Begriff des Würfels (sie geben eine Konstitution, eine Verfassung). Was ich seinerzeit über den „Wortkörper“ geschrieben habe, ist der klare Ausdruck des besprochenen Irrtums.) |
| 167v | | 169 |
| | 107 (V): was
108 (V): wäre also | |

accompanies the pointing (say, a process in the brain), and if you do mean such a process after all, then it too is not inherently a sign. Again and again the idea here is that meaning, interpretation, is a process that accompanies the pointing and provides it with a soul, as it were (without which it would be dead).

Here it seems as if the sign were a summary of all of grammar – that the latter is contained in it like a string of pearls in a box and that all we have to do is pull it out.¹⁰⁰ (But it is precisely this picture that leads us astray.) As if understanding were an¹⁰¹ instantaneous grasping of something, and all one had to do was then to draw out its consequences; so that these consequences already existed in an ideal sense before they were drawn.¹⁰² As if the cube already¹⁰³ contained the entire geometry of a cube, and now I had¹⁰⁴ only to unfold it. But which cube? The visual cube or a metal cube? Or is there such a thing as an ideal geometrical cube¹⁰⁵? – Evidently we have this process in mind when we derive geometrical propositions from a drawing, a mental image (or a model). But what role does the model play in this derivation? Surely that of a sign.¹⁰⁶ Of a sign that has a particular kind of use and that signifies only because of it. It is interesting, though, and remarkable, how this sign is used, how, for example, we break out the drawing of a cube again and again, each time with different accessories. One time the diagonal lines are drawn, another time cubes are set in a row next to each other, etc., etc. And it is this sign (*with the identity of a sign*¹⁰⁷) that we take to be that cube in which the geometric laws are already contained. (They are no more contained in it than the dispositions to be used in a certain way are contained in the chess king.)¹⁰⁸

100 (V₁): That seems to be the case, particularly where a sign seems to summarize all of grammar, so that we can deduce grammar from the sign, ~~and it seems that~~, that grammar were contained in the sign like a string of pearls . . . it out. (V₂): The cube seems to summarize its entire grammar, // It seems as if the cube summarized its entire grammar, // so that we could deduce the grammar from it, that grammar were contained in it like a string of pearls . . . it out. (V₃): It seems here as if the sign summarized the entire grammar, so that we could deduce the grammar from it, and it were contained in it like a string of pearls in a box that we have only to pull out.

101 (V): were ~~thus~~ an
 102 (M): /
 103 (V): the cube, ~~for example, thus~~ already
 104 (V): have
 105 (V): an ~~ideal~~ cube
 106 (V): sign~~!~~
 107 (V): *of signs*
 108 (M): Check (R): [to p. 145/1] ∇ p. 22/1, 2 (V): king.) /// The geometric laws *constitute* the concept of a cube (they provide a constitution, a fundamental law). What I once wrote about a “word-body” is a clear expression of the error I’ve been discussing.)

Wesen der Sprache.

The Nature of Language.

171 **Lernen, Erklärung, der Sprache.
Kann man die Sprache durch die
Erklärung gleichsam aufbauen,
zum Funktionieren bringen?¹**

²Wenn ich erkläre „ $\sim p$ ist wahr, wenn p nicht wahr ist“, so setzt das voraus, daß ich verstehe, was es heißt, „ p “ sei nicht wahr. Dann habe ich aber nichts getan als zu definieren: $\sim p$ Def. „ p “ ist falsch.

³Es kommt nämlich wesentlich darauf an, daß es nicht möglich ist, das Zeichen „ p “ auf der rechten Seite der Definition auszulassen, bezw. durch ein anderes zu ersetzen (es sei denn wieder mit Hilfe einer⁴ Definition). Solange das nicht möglich ist, kann und muß man auch die rechte Seite als Funktion auffassen von p , nämlich: „()“ ist falsch.

⁵Das hängt auch damit zusammen, daß ja der Tintenstrich nicht *falsch* ist. Wie er schwarz oder krumm ist.

170v ⁶Ist es denn richtig zu schreiben „ p ist falsch“? Muß es nicht heißen „ p ist falsch“?

⁷Sagt denn „ p ist wahr“ etwas über das Zeichen „ p “ aus? Man sagt: „ja, es sagt daß p mit der Wirklichkeit übereinstimmt“. Denken wir uns – statt eines⁸ Satzes der Wortsprache ein nach einer exakten Projektionsmethode gezeichnetes Bild der betreffenden Wirklichkeit. Hier muß es sich gewiß am deutlichsten zeigen, was „ p ist wahr“ von dem Bild „ p “ aussagt. Man kann also den Satz „ p ist wahr“ mit dem vergleichen: „Dieser Gegenstand hat⁹ die Länge dieses Meterstabes¹⁰“ & „ p dem Satz: „dieser Gegenstand ist 1m lang“. Aber der Vergleich ist falsch denn „dieser Meterstab“ ist eine Beschreibung weil¹¹ „Meterstab“ eine Begriffsbestimmung ist. Dagegen tritt in „ p ist wahr“ der Maßstab unmittelbar in den Satz ein. „ p “ repräsentiert¹² hier einfach die Länge & nicht den *Stab*.¹³ Denn¹⁴ die projizierte Figur ist ja auch gar nicht wahr außer nach einer bestimmten Projektionsmethode die den Meterstab¹⁵ zu einem rein – geometrischen Anhängsel der gemessenen Strecke macht.

171

¹⁶Wenn ich also auch dem Schriftzug „ p “ den Namen A gebe und daher schreibe: „ $\sim p$ Def. A ist falsch“, so hat das nur einen Sinn, d.h. die rechte Seite kann nur verstanden

1 (R): [Zu § 18 S. 76]

2 (M): ? ✓

3 (M): |

4 (V): wieder durch eine

5 (M): / |

6 (M): / ✓

7 (M): Überprüfe

8 (V): eines ~~gewohnt~~

9 (V): hat ~~zweimal~~

10 (V): ~~Maßstabes~~

11 (V): ~~während~~

12 (O): repräsentiert

13 (V): Meterstab.

14 (V): Denn \emptyset

15 (V): Maßstab

16 (M): | ✓

Learning, Explanation, of Language. Can We Use Explanation to Construct Language, so to Speak, to Get it to Work?¹

²If I declare that “‘ \sim p’ is true if ‘p’ is not true” then this presupposes that I understand what “‘p’ is not true” means. But then all I’ve done is to give this definition: \sim p Def. „p“ is false.

³For it’s important that it isn’t possible to omit the sign “p” on the right side of the definition or to replace it with another sign (except once again with the help of⁴ a definition). So long as that isn’t possible, one can and must understand the right side as a function of p as well, that is to say: “()” is false.

⁵This is also connected with the fact that a line drawn in ink isn’t *false*. In the way that it’s black or crooked.

⁶Is it correct to write “‘p’ is false”? Mustn’t this read “p is false”?

⁷Does “‘p’ is true” say something about the sign “p”? We say: “Yes, it says that ‘p’ agrees with reality.” Let’s imagine a picture of a particular reality that’s drawn using a precise method of projection, instead of a sentence⁸ belonging to word-language. Surely this will show most clearly what “‘p’ is true” says about the picture “p”. So one can compare the proposition “‘p’ is true” with “This object is as long⁹ as this yardstick¹⁰” and “p” with the proposition: “This object is one yard long.” But the comparison is wrong, for “this yardstick” is a description, because¹¹ “yardstick” is a definition of a concept. In “‘p’ is true”, on the other hand, the measuring stick enters the proposition immediately. Here “p” represents simply the length and not the *stick*.¹² For the projected figure isn’t true at all, except in accordance with a particular method of projection that turns the yardstick¹³ into a purely geometric appendage to the distance that was measured.

¹⁴So even if I give the name A to the written character “p”, and therefore write “ \sim p Def. A is false”, then that only makes sense, i.e. the right side can only be understood, if for

1 (R): [To § 18 p. 76]

2 (M): ? ✓

3 (M): |

4 (V): again via

5 (M): / |

6 (M): / ✓

7 (M): Check

8 (V): of an ~~ordina~~ sentence

9 (V): is ~~twice as long~~

10 (V): this ~~measuring~~ stick

11 (V): ~~whereas~~

12 (V): yardstick.

13 (V): measuring stick

14 (M): J ✓

werden, wenn A für uns als *Satzzeichen* steht. Dann aber ist nichts gewonnen; zum mindesten keine *Erklärung* des Mechanismus der Negation.

171v 172 ¹⁷Und dasselbe muß der Fall sein, wenn man erklärt, „(x).fx“ sei wahr, wenn f() für alle Substitutionen wahr ist. Jeder dieser beiden Sätze folgt aus dem anderen, drum sind sie identisch. Man muß auch dazu schon den logischen Mechanismus der Verallgemeinerung verstehen. Es ist (auch) nicht so, daß man erst ahnungslos ist, und die Verallgemeinerung nun durch die Erklärung erst zum Funktionieren gebracht wird. Wie wenn man in eine Maschine ein Rad einsetzt und sie dann¹⁸ erst funktioniert (oder, die Maschine erst in zwei getrennten Teilen da ist und sie nun erst durch das Zusammensetzen als diese Maschine funktionieren).

¹⁹Die Erklärung einer Sprache (der Zeichen einer Sprache) führt uns nur von einer Sprache in eine andere.²⁰

²¹Wie schaut die Erklärung eines Zeichens aus? Das müßte doch eine für die Sprache außerordentlich wichtige Form sein, sei dieser Behelf nun ein Satz oder nicht.

²²Denken wir uns eine Sprache, in der ich „A ist größer als B“ nicht nur so ausdrücke: „↑ ist größer als ↗“²³ sondern in der ich auch statt des Wortes „größer“ eine Geste mache, die die Bedeutung des Wortes zeigt. – Wie könnte ich nun so eine Sprache erklären? (Wie könnte ich die Zeichen so einer Sprache erklären?) Und würde ich nun noch das frühere Bedürfnis nach einer Erklärung fühlen?

Eine Erklärung für die Bedeutung eines Zeichens tritt an Stelle des erklärten Zeichens.

173 ²⁴Auch das Kind *lernt* durch Erklärungen²⁵ nur eine Sprache vermittelt einer anderen. Die Wortsprache durch die Gebärdensprache.

²⁶Die Gebärdensprache ist eine *Sprache* und wir haben sie nicht – im gewöhnlichen Sinne – gelernt. Das heißt: sie wurde uns nicht geflissentlich gelehrt. – Und jedenfalls nicht durch Zeichenerklärungen.

²⁷Man kann sich das Lernen einer Sprache in anderm Sinne aber analog dem Fingerhutsuchen vorstellen, wo die gewünschte Bewegung durch „heiß, heiß“, „kalt, kalt“ herbeigeführt wird. Man könnte sich denken, daß der Lehrende statt dieser Worte auf irgendeine Weise (etwa durch Mienen) angenehme und unangenehme Empfindungen hervorruft, und der Lernende nun dazu gebracht wird, *die* Bewegung auf den Befehl hin auszuführen, die regelmäßig von der angenehmen Empfindung begleitet wird (oder zu ihr führt).²⁸

²⁹Verbindung von Wort und Sache durch das Lehren der Sprache³⁰ hergestellt. Was ist das für eine Verbindung, welcher Art? Was für Arten von Verbindungen gibt es?

Eine elektrische, mechanische, psychische Verbindung kann funktionieren oder nicht funktionieren: Anwendung auf die Verbindung, die die Worterklärung herstellt.

17 (M): ∫ ✓

18 (V): nun

19 (M): ∫ ✓ ///

20 (R): ~~W. S. 2/3~~ & S. 3/4

21 (M): /// ✓

22 (M): ? / ✓

23 (F): MS 109, S. 145.

24 (M): ? /

25 (V): *lernt* in diesem Sinne

26 (M): ? / ✓

27 (M): ∫ (R): [Zu S. 201]

28 (M): *Abrichten*

29 (M): ∫ ✓ (

30 (V): durch die Erklärung

us A is a *sign for a proposition*. But then nothing is gained; at least no *explanation* of the mechanism of negation.

¹⁵And the same thing must be the case if one declares that “(x).fx” is true if f() is true for all substitutions. Each of these two propositions follows from the other, so they’re identical. But even this requires an understanding of the logical mechanism of generalization. (Neither) is it true that at first one has no clue, and that the generalization doesn’t work until the explanation gets it going. As when one inserts a wheel into a machine and only then¹⁶ does it work (or as when the machine comes initially in two separate parts and they don’t function as this machine until they are assembled).

¹⁷The explanation of a language (of the signs of a language) merely leads us from one language to another.¹⁸

¹⁹What does the explanation of a sign look like? Surely that ought to be an extraordinarily important form for a language, whether this makeshift is a sentence or not.

²⁰Let’s imagine a language in which I express “A is larger than B” not only with “↑ is larger than ↗”,²¹ but in which, instead of the word “larger”, I make a gesture that shows the meaning of the word. – How could I explain such a language? (How could I explain the signs of such a language?) And would I then still feel my previous need for an explanation?

An explanation of the meaning of a sign takes the place of the sign that is explained.

²²It is only through explanations that a child²³ *learns* one language by means of another. The language of words through the language of gesture.

²⁴The language of gesture is a *language*, but we haven’t learned it in the usual sense. That is: we weren’t taught it deliberately. – And in any case not by having its signs explained.

²⁵But in another sense one can think of learning a language as analogous to the game of searching for a thimble, where the desired movement is brought about by “hot, hot”, “cold, cold”. One could imagine a teacher, instead of using these words, evoking pleasant and unpleasant feelings in some way (say with facial expressions), and that when the student is ordered to do so he is induced to make *that* movement that is regularly accompanied by a pleasant feeling (or leads to one).²⁶

²⁷The connection of word and object that is established by teaching a language.²⁸ What sort of connection is this, of what kind is it? What kinds of connections are there?

An electrical, mechanical, or psychological connection can work or not work: application to the connection that explaining a word establishes.

15 (M): ∫ ✓

16 (V): now

17 (M): ∫ ✓ ///

18 (R): ~~∫ p. 2/3~~ & p. 3/4

19 (M): /// ✓

20 (M): ∫ / ✓

21 (F): MS 109, p. 145.

22 (M): ∫ /

23 (V): It is only in this sense that a child

24 (M): ∫ / ✓

25 (M): ∫ (R): [To p. 201]

26 (M): *Training an animal*

27 (M): ∫ ✓ (

28 (V): by an explanation.

³¹Die Zuordnung von Gegenstand und Name ist keine andere, als die durch die Worte „das ist . . .“ oder eine Tabelle erzeugte etc. Sie ist ein Teil des Symbolismus. Es ist daher unrichtig zu sagen, die Beziehung zwischen³² Name und Gegenstand sei eine psychologische.

174 ³³Das Wort „Teekanne“ hat doch Bedeutung; gewiß, im Gegensatz zum Worte „Abracadabra“, nämlich in der deutschen Sprache. Aber wir könnten ihm natürlich auch eine Bedeutung geben; das wäre ein Akt ganz analog dem, wenn ich ein Täfelchen mit der Aufschrift „Teekanne“ an eine Teekanne hänge. Aber was habe ich hier anderes³⁴ als eine Teekanne mit einer Tafel, auf der Striche zu sehen sind? Also wieder nichts logisch Interessantes. Die Festsetzung der Bedeutung eines Wortes kann nie (wesentlich) anderer Art sein.³⁵

31 (M):] ✓

32 (V): von

33 (M):] ✓

34 (O): anders

35 (M):)

²⁹The assignment of name to object is nothing other than that produced by the words “That is . . .” or by a table, etc. It is a part of the symbolism. Therefore it’s incorrect to say that the relationship between³⁰ a name and an object is psychological.

³¹The words “tea kettle” do have meaning – certainly in contrast to the word “Abracadabra” – i.e. in the English language. But of course we could also give it a meaning; doing so would be completely analogous to my hanging a sign reading “tea kettle” on a tea kettle. But then what do I have other than a tea kettle with a sign that has lines on it? So once again, nothing that is logically interesting. Establishing the meaning of a word can never be (essentially) different from this.³²

29 (M):] ✓

30 (V): of

31 (M):] ✓

32 (M):)

Wie wirkt die einmalige Erklärung der Sprache, das Verständnis?

¹Vielleicht ist die eigentliche Schwierigkeit die: daß ich das Wort „rot“ erkläre, indem ich auf etwas Rotes zeige und sage „das ist rot“, während doch dieses Rote später meinem Blick entwindet. Und nun scheinbar *etwas Anderes* an seine Stelle tritt (die Erinnerung oder wie man es heißen mag).

²„Also *so* wird dieses Wort gebraucht!“ Aber wie bewahre ich denn dieses *So* in der Erinnerung?

174v, 175

³Die⁴ Weise, wie wir die Sprache lernen,⁵ ist in ihrem Gebrauch⁶ nicht *enthalten*.⁷ (Wie die Ursache eben nicht in ihrer Wirkung.)

⁸Ich kann die Regel selbst *festsetzen* und mich eine⁹ Sprache lehren. Ich gehe spazieren und sage mir: Wo immer ich einen Baum treffe, soll mir das das Zeichen sein, bei der nächsten Kreuzung links zu gehen, und nun richte ich mich nach den Bäumen in dieser Weise (fasse ihre Stellung als einen Befehl auf).

176

¹⁰Wie kann ich mir vornehmen, einer Regel zu folgen?
Nicht nur soweit, als ich die Regel ausdrücken kann?

¹¹Welche Wirkung hatte nun die hinweisende Erklärung? Hatte sie sozusagen nur eine automatische Wirkung? Das heißt aber, wird sie nun immer wieder benötigt, oder hatte sie eine¹² Wirkung, wie etwa eine Impfung, die uns ein für allemal, oder doch bis auf weiteres, geändert hat.

¹³Ich sage „wähle alle blauen Kugeln aus“, er aber weiß nicht, was „blau“ heißt. Nun zeige ich und sage „das ist blau“. Nun versteht er mich und kann meinem Befehl folgen.

¹⁴Ich setze ihn in Stand, dem Befehl zu folgen. Was geschieht nun aber, wenn er in Zukunft diesen Befehl hört? Ist es nötig, daß er sich jener *Erklärung*, d.h. des einmaligen Ereignisses jener Erklärung erinnert? Ist es nötig, daß das Vorstellungsbild des blauen Gegenstands oder

175

1 (M): ? / ✓

2 (M): / ✓

3 (M): ? / ✓

4 (V): Die (Art &)

5 (V₁): lernten, (V₂): Das Lernen der Sprache
// Die Weise des Lernens der Sprache

6 (V): in ihrer Benützung

7 (V): nicht ~~en~~ enthalten.

8 (M): ¡ ///

9 (V): die

10 (M): ¡ ///

11 (M): ? / ✓

12 (V): eine ~~ursächliche~~

13 (M): ? / XXX

14 (M): ? / XXX

What Effect Does a Single Explanation of Language Have, What Effect Understanding?

¹Perhaps the real difficulty is as follows: that I explain the word “red” by pointing to something red and saying “That is red”, whereas the red thing later disappears from my sight. And now seemingly *something else* takes its place (memory or whatever you might call it).

²“So *that* is how that word is used!” But how do I keep the *that* in my memory?

³The way⁴ we learn language⁵ is not *contained* in its use. (Just as a cause isn’t contained in its effect.)

⁶I can *establish* a rule myself and teach myself a⁷ language. I take a walk and tell myself: “Wherever I come upon a tree I’ll take that as a sign to turn left at the next crossroads”, and then I let the trees so guide me (I take their location as a command).

⁸How can I resolve to follow a rule?

Can’t I follow it only so far as I can express it?

⁹So what effect does an ostensive explanation have? Is it automatic, so to speak? That is to say, is it needed over and over, or is its effect¹⁰ like, say, an inoculation that changes us once and for all, or at least for the time being?

¹¹I say “Pick out all the blue balls”; but he doesn’t know what “blue” means. Then I point and say “That is blue”. Now he understands me and can follow my order.

¹²I enable him to follow the order. What’s going to happen, though, when he hears this command in the future? Does he need to remember that *explanation*, i.e. the one-time occurrence of that explanation? Does the mental image of the blue object or of a blue object have

1 (M): ? / ✓

2 (M): / ✓

3 (M): ? / ✓

4 (V): The ~~(manner and)~~ way

5 (V): The way we learned language // The learning
of language // The way language is learned

6 (M): ∫ ///

7 (V): the

8 (M): ∫ ///

9 (M): ? / ✓

10 (V): is it a ~~causal~~ effect

11 (M): ? / XXX

12 (M): ? / XXX

eines blauen Gegenstands vor seine Seele tritt? Alles das scheint *nicht* nötig zu sein, obwohl es möglicherweise geschieht. Und doch scheint das Wort „blau“ jetzt einen anderen Aspekt¹⁵ für ihn zu haben, als da es ihm noch nicht erklärt war. Es gewinnt gleichsam Tiefe.

¹⁶In wiefern hilft die hinweisende Erklärung „das ist ‚rot‘“ zum Verständnis des Wortes.

(Sie „hilft“ gar nicht, sondern *ist* eben eine der symbolischen Regeln für den Gebrauch des Wortes „rot“.)

177 ¹⁷Eine Erklärung kann nicht in die Ferne wirken. Ich meine: sie wirkt nur, wo sie angewandt wird. Wenn sie außerdem noch eine „Wirkung“ hat, dann nicht¹⁸ als Erklärung.

¹⁹Ist es so, daß eine Erklärung, eine Tabelle z.B., zuerst so gebraucht werden kann,²⁰ daß man sie „nachschlägt“; daß man sie dann gleichsam im Kopf nachschlägt, d.h., sie sich vor das innere Auge ruft (oder dergleichen); und daß man endlich ohne diese Tabelle arbeitet, also so, als wäre sie nie da gewesen. In diesem letzten Fall spielt man also offenbar ein anderes Spiel. Die Tabelle²¹ ist aus unserm Spiel ausgeschieden und wenn ich auf sie zurückgreife,²² so tue ich, was der Erblindete tut, der etwa auf den Tastsinn zurückgreift. Eine Erklärung fertigt eine Tabelle an und sie wird zur Geschichte, wenn²³ ich die Tabelle nicht mehr benütze.

176v ²⁴Ich muß unterscheiden zwischen den Fällen: wenn ich mich einmal nach einer Tabelle
177 richte, und ein andermal in Übereinstimmung mit der Tabelle (der Regel, welche die Tabelle ausdrückt) handle, ohne die Tabelle zu benützen. – Die Regel, deren Erlernung uns veranlaßt, jetzt so und so zu handeln, ist als Ursache unserer Handlungsweise Geschichte²⁵ ohne Interesse für uns.²⁶ Sofern sie aber eine allgemeine Beschreibung unserer Handlungsweise ist, ist sie eine Hypothese. Die²⁷ Hypothese, daß diese zwei Leute, die am²⁸ Schachbrett sitzen, so und so handeln werden²⁹(wobei auch ein Verstoß gegen die Spielregeln unter die Hypothese fällt, denn diese sagt dann etwas darüber aus, wie sich die Beiden benehmen werden, wenn sie auf den³⁰ Verstoß aufmerksam werden). Die Spieler können aber die Regel auch benützen, indem sie in jedem besonderen Fall nachschlagen, was zu tun ist; hier tritt die
178 Regel in die Spielhandlungen selbst ein und verhält sich zu ihnen³¹ nicht, wie eine Hypothese zu ihrer Bestätigung. „Hier gibt es aber eine Schwierigkeit. Denn der Spieler, welcher ohne Benützung des Regelverzeichnisses spielt, ja, der nie eins gesehen hätte, könnte dennoch, wenn es verlangt würde, ein Regelverzeichnis anlegen und zwar meine ich nicht, – behaviouristisch – indem er durch wiederholte Beobachtung feststellte, wie er in diesem und in jenem Fall handelt,³² sondern, indem er, vor einem Zug stehend, sagt: ‚in diesem Fall *zieht man so*‘. – Aber, wenn dies³³ so ist, so zeigt es doch nur, daß er unter gewissen

15 (O): Aspect

16 (M): ? /

17 (M): ? ✓

18 (V): nicht ~~die~~

19 (M): ? / ✓

20 (V): gebraucht ~~wird~~,

21 (V): Spiel. ~~Denn es ist nun nicht so, daß jene Tabelle ja doch im Hintergrund steht und man immer auf sie zurückgreifen kann; sie~~

22 (V): auf sie „zurückgreife“,

23 (V): Eine Erklärung ist das Anlegen // die Konstruktion // Anfertigung // das Anfertigen einer Tabelle und ~~sie~~ die Erklärung wird Geschichte, wenn

24 (M): / ✓

25 (V): Handlungsweise ~~als ihre Gesch Vorgeschichte~~ Geschichte

26 (V₁): Geschichte. (V₂): Geschichte ~~und~~ (~~für uns~~) ohne Interesse.

27 (V): Hypothese. ~~Es ist die~~

28 (V): die // ~~über dem~~ //

29 (M): /// – aufmerksam werden).

30 (V): diesen

31 (V): ihr

32 (V): Fall gehandelt hat,

33 (V): ~~das~~

to appear in his mind? *None* of that seems necessary, although it could happen. Yet the word “blue” seems now to have a different aspect for him from what it had before it was explained to him. It gains depth, as it were.

¹³How does the ostensive explanation “*That is ‘red’*” help us to understand the word?

(It doesn’t “*help*” at all. It simply *is* one of the symbolic rules for the use of the word “red”.)

¹⁴An explanation can’t work at a distance. I mean: it only works where it is applied. If aside from that it has an “effect”, then that’s not because it was an explanation.

¹⁵Is this the way it is: an explanation, e.g. a table, can¹⁶ be used at first by “looking something up” in it; then one looks something up in it in one’s head, as it were, i.e. summons it before the mind’s eye (or some such thing); and then finally one proceeds without this table, i.e. as if it had never been there. So in this last case one is obviously playing a different game. The table¹⁷ has been eliminated from our game, and if I fall back¹⁸ on it then I’m doing what a person does who has gone blind and who falls back on, say, his sense of touch. An explanation constructs a table, and when I no longer consult the table the explanation¹⁹ becomes a thing of the past.

²⁰I need to distinguish between these cases: sometimes I am guided by a table and other times I act in conformity with the table (with the rule expressed by the table) without consulting it. – The rule – the learning of which caused us just now to act in such and such a way – is, as the root cause of our behaviour, a matter of history,²¹ and it is of no interest to us. In so far as the rule is a general description of the way we act, however, it is a hypothesis – the²² hypothesis that these two people sitting at the chess board will act in such and such a way²³(in which case even a violation of the rules of the game falls within the range of the hypothesis, for it then states something about how they’ll behave when they notice the²⁴ violation). But the players can also use the rule by looking up what is to be done in each particular case; here the rule enters into the moves of the game itself, and it doesn’t relate to them²⁵ as a hypothesis does to its confirmation. “But there is a problem here. For a player who plays without using the list of rules, who indeed might never have seen such a list, could nevertheless, when called upon, construct one. And he would do this, in my opinion, not – behaviouristically – by ascertaining through repeated observations how he acts²⁶ in this or that case, but rather by saying, when he is about to make a move: ‘Here *one moves this way*’.” – But if this²⁷ is so it merely shows that he will utter a rule under certain circumstances, and not that he has used it (explicitly) when making the move. It is a hypothesis that he will²⁸

13 (M): ? /

14 (M): ? ✓

15 (M): ? / ✓

16 (V): ~~will~~

17 (V): game. ~~For it is not the case that the table is in the background, and that one can always fall back on it;~~ it

18 (V): “fall back”

19 (V): An explanation is the creation // the construction // the manufacturing // the manufacture of a table, and when I no longer consult the table, ~~it~~ the explanation

20 (M): / ✓

21 (V): as the root cause of our behaviour, ~~as its history~~ ~~prehistory~~ history (V₂): history, ~~and without interest~~ (for us).

22 (V): hypothesis. ~~It is the~~

23 (M): /// – violation).

24 (V): this

25 (V): it

26 (V): acted

27 (V): if ~~that~~

28 (V): would

Umständen eine Regel aussprechen wird, nicht, daß er von ihr beim Zug (expliciten) Gebrauch gemacht hat. Daß er ein Regelverzeichnis anlegen wird,³⁴ wenn man es verlangt,³⁵ ist eine Hypothese und wenn man eine Disposition, ein Vermögen, ein Regelverzeichnis anzulegen annimmt, so ist es eine psychische Disposition auf gleicher Stufe mit einer physiologischen. Wenn gesagt wird, diese Disposition charakterisiert den Vorgang des Spiels, so charakterisiert sie ihn als einen psychischen oder physiologischen, was er tatsächlich ist. (Im Studium³⁶ des Symbolismus gibt es keinen Vordergrund und Hintergrund, nicht ein greifbares³⁷ Zeichen und ein es begleitendes ungreifbares³⁸ Vermögen, oder Verständnis.)

177v ³⁹Wie wirkt nun die hinweisende Erklärung? Sie lehrt den Gebrauch eines Zeichens; und das Merkwürdige ist nur, daß sie ihn auch für die Fälle zu lehren scheint, in denen
178 ein Zurückgehen auf das hinweisende Zeichen nicht möglich ist. Aber geschieht das nicht,
179 indem wir, quasi, die in der hinweisenden Definition gelernte Regel⁴⁰ in bestimmter Weise transformieren? Ich mache von einer Zeichenerklärung Gebrauch⁴¹ für Transformationen, deren Paradigma sie ist.⁴² Wenn⁴³ z.B. der Mann, der mir vorgestellt wurde, abwesend ist und ich nun trotzdem seinen Namen gebrauche,⁴⁴ *in wiefern mache ich da von der hinweisenden Erklärung Gebrauch?*⁴⁵ Es gibt ein Spiel, worin ich immer statt des Namens das hinweisende Zeichen geben kann, und eins, in welchem das nicht⁴⁶ möglich ist. (Und wir müssen nur daran festhalten, daß die Erklärung, als fortwirkende *Ursache* unseres Gebrauchs von Zeichen, uns nicht interessiert, sondern nur, sofern wir von ihr in unserm Kalkül Gebrauch machen können.) Es macht eine Schwierigkeit in der Erklärung des Gebrauchs der hinweisenden Definition, daß wir⁴⁷ verschiedene Kriterien der Identität anwenden (also das Wort „identisch“⁴⁸ in verschiedener Weise gebrauchen), je nachdem, ob ein Ding sich vor unsern Augen bewegt, oder unserm Blick entschwindet und vielleicht wieder erscheint. Das ist wichtig, denn für den zweiten Fall gibt uns die hinweisende Definition⁴⁹ ein *Muster*⁵⁰ und tut,⁵¹ was auch der Hinweis auf ein Bild tut. Denn die gegebene hinw. Erkl. nützt nichts, wenn⁵² wir vergessen haben, wie der Mensch, auf den gezeigt wurde, aussah.

⁵³Es ist möglich, daß Einer die Bedeutung des Wortes „blau“ vergißt. Was hat er da vergessen? —⁵⁴ Wie äußert sich das?

⁵⁵Da gibt es verschiedene Fälle.⁵⁶ Er zeigt etwa auf verschieden gefärbte Täfelchen und sagt: „ich weiß nicht mehr, welche von diesen man ‚blau‘ nennt“. Oder aber, er weiß überhaupt nicht mehr, was das Wort⁵⁷ bedeutet, und nur, daß es ein Wort der deutschen Sprache ist.⁵⁸

34 (V): würde,

35 (V): verlangte,

36 (V): Studium

37 (V): sichtbares

38 (V): unsichtbares

39 (M): ? / /// (R): Zu § 13 S. 46

40 (V): Definition gelernter Regeln

41 (V): Ich *gebrauche* eine Zeichenerklärung

42 (V): sie mir gibt.

43 (O): (Wenn

44 (V): gebrauchte, ~~dessen Gebrauch mir durch die Vorstellung hinweisende Erklärung erklärt wurde.~~ Wenn ich ihn nun brauche,

179 45 (V): *Gebrauch?* Offenbar nicht in der Weise, in welcher ich in der Anwesenheit des Menschen von ihr Gebrauch machen konnte.

46 (V): nicht mehr

47 (V): Eine Schwierigkeit in der Erklärung des Gebrauchs der hinweisenden Definition macht es daß wir

48 (V): „Identität“

49 (V): Definition ~~eigentlich nur~~

50 (V): ~~Muster~~

51 (V): tut ~~nur~~,

52 (V): Bild tut. Das drückt sich darin aus, daß die gegebene hinweisende Erklärung nichts nützt, wenn

53 (M): ? / ✓

54 (O): :

55 (M): ///

56 (V): Fälle:

57 (V): was es

58 (V): daß es ein deutsches Wort ist.

make up a list of rules if he's asked to, and if one assumes that there's a disposition here, a capacity to set up a list of rules, then it is a psychological disposition, on the same level as a physiological one. If it is said that this disposition characterizes the process of the game, then it characterizes it as a psychological or physiological process, which in fact it is. (In the study of symbolism there is no foreground and background, no tangible sign plus an intangible²⁹ capacity or understanding that accompanies it.)

³⁰So how does an ostensive explanation work? It teaches the use of a sign; and the odd thing is that it seems to teach us to use it even in those cases where we can't return to the ostensive sign. But doesn't this happen by our transforming, as it were, the rule³¹ we learned in the ostensive definition in a particular way? I use an explanation of a sign for transformations for which it is the paradigm.³² If for example a man to whom I was introduced is now absent, but nevertheless I use his name,³³ *in what way am I using the ostensive explanation?*³⁴ There is a game in which I can always substitute an ostensive sign for a name, and another where that isn't possible. (And we have to remain firm in maintaining that an explanation doesn't interest us as a continuous *cause* of our use of signs, but only in so far as we can use it in our calculus.) A problem in explaining the use of an ostensive definition arises from the fact that we apply different criteria of identity (i.e. use the word "identical"³⁵ in different ways) depending on whether an object moves in front of our eyes, or vanishes and maybe reappears.³⁶ This is important, for the ostensive definition furnishes³⁷ us a *sample*³⁸ for the latter case, and it does³⁹ what reference to a picture would do. For an ostensive explanation that we're given is useless if⁴⁰ we have forgotten what the person who was pointed to looked like.

⁴¹Someone can forget the meaning of the word "blue". What has he forgotten? – How does this become apparent?

⁴²Here we have different cases.⁴³ He might point to colour chips of different colours and say: "I no longer know which of these are called 'blue'." Or he no longer knows what the word⁴⁴ means at all, only that it's a word in the English language.⁴⁵

29 (V): no visible sign plus an invisible

30 (M): ? / /// (R): To § 13 p. 46

31 (V): rules

32 (V): I use an explanation of a sign for transformations, whose paradigm the explanation gives me.

33 (V): I use his name, ~~the use of which was explained to me by the presentation — the ostensive explanation. Now if I use it,~~

34 (V): *explanation?* ~~Obviously not in the way I was able to use it when the man was present.~~

35 (V): "identity"

36 (V): A problem in explaining the use of the ostensive definition causes us to apply different criteria of identity . . . reappears.

37 (V): ~~really only~~ furnishes

38 (V): a ~~sample~~

39 (V): does ~~only~~

40 (V): do. This is made clear by the fact that a given ostensive definition is of no use if

41 (M): ? / ✓

42 (M): ///

43 (V): cases:

44 (V): what it

45 (V): it's an English word

180 ⁵⁹Wenn wir ihn nun fragen: „weißt Du, was das Wort ‚blau‘ bedeutet“, und er sagt „ja“, da konnte er verschiedene Kriterien anwenden, um sich „zu überzeugen“, daß er die Bedeutung wisse. (Denken wir wieder an die entsprechenden Kriterien dafür, daß er das Alphabet hersagen kann.) Vielleicht rief er sich ein blaues Vorstellungsbild vor die Seele, vielleicht sah er nach einem blauen Gegenstand im Zimmer, vielleicht fiel ihm das englische Wort „blue“ ein, oder er dachte an einen „blauen Fleck“, den er sich geholt hatte, etc., etc.

Wenn nun gefragt würde: wie kann er sich denn zur Probe seines Verständnisses ein blaues Vorstellungsbild vor die Seele rufen, denn, wie kann ihm das Wort „blau“ zeigen, welche Farbe aus dem Farbenkasten seiner Vorstellung er zu wählen hat, – so ist zu sagen, daß es sich da⁶⁰ eben zeigt,⁶¹ daß das Bild vom Wählen, etwa, eines blauen Gegenstands mittels eines blauen Mustertäfelchens hier ungeeignet⁶² ist. Und der Vorgang eher mit dem zu vergleichen ist, wenn beim Drücken eines Knopfes, auf dem das Wort „blau“ geschrieben steht, automatisch ein blaues Täfelchen vorspringt, oder, wenn der Mechanismus versagt, nicht vorspringt.

181 Man könnte nun sagen: Der, welcher die Bedeutung des Wortes „blau“ vergessen hat und aufgefordert wurde, einen blauen Gegenstand aus anderen auszuwählen, fühlt beim Ansehen dieser Gegenstände, daß die Verbindung zwischen dem Wort „blau“ und jenen Farben nicht mehr besteht (unterbrochen ist). Und die Verbindung wird wieder hergestellt, wenn wir ihm die Erklärung des Wortes wiederholen. Aber wir konnten die Verbindung auf mannigfache Weise wieder herstellen: Wir konnten⁶³ einen blauen Gegenstand zeigen und die hinweisende Definition geben, oder ihm sagen „erinnere Dich an Deinen ‚blauen Fleck‘“, oder wir konnten ihm das Wort „blue“ zuflüstern, etc. etc. Und wenn ich sagte, wir konnten die Verbindung auf diese verschiedenen Arten herstellen, so liegt nun der Gedanke nahe, daß ich *ein* bestimmtes Phänomen, welches ich die Verbindung zwischen Wort und Farbe, oder das Verständnis des Wortes nenne, auf alle diese verschiedenen Arten hervorgerufen habe; wie ich etwa sage, daß ich die Enden zweier Drähte durch Drahtstücke verschiedener Länge und Materialien leitend miteinander verbinden kann. ⁶⁴Aber von so einem Phänomen, etwa dem Entstehen eines blauen Vorstellungsbildes, muß keine Rede sein und das Verständnis wird sich dann dadurch zeigen, daß er etwa die blaue Kugel aus den andern tatsächlich auswählt, oder sagt, er könne es nun tun, wolle es aber nicht; etc., etc. etc. Wir können dann immer ein Spiel festsetzen, welches *eine* Möglichkeit so eines Vorgangs darstellt, ⁶⁵und müssen nicht vergessen, daß in Wirklichkeit hundert verschiedene und ihre Kreuzungen mit den Worten „die Bedeutung vergessen“, „sich an die Bedeutung erinnern“, „die Bedeutung kennen“ beschrieben werden.⁶⁶

59 (M): ///

60 (V): so

61 (V): daß es sich ebenso so zeigt,

62 (V): unpassend

63 (V): konnten ~~ihm~~

64 (M): ///

65 (M): /

66 (R): Siehe auch Notizbuch

⁴⁶Now if we ask him: “Do you know what the word ‘blue’ means?” and he says “Yes”, then he could apply various criteria in order to “satisfy” himself that he knows the meaning. (Let’s think again of the respective criteria for his being able to recite the alphabet.) Maybe he called to mind a mental image of blue, maybe he looked at a blue object in his room, maybe the German word “blau” came to mind, or he thought of a “blue bruise” that he had suffered, etc., etc.

Now suppose it were asked, how can he call to mind a mental image of blue as a test of his understanding? – For how can the word “blue” show him which colour he’s to choose from the paint set in his imagination? – The proper answer to this is: it is precisely this problem that shows how unsuitable⁴⁷ the picture is of choosing, say, a blue object with the help of a blue sample colour chip. And that the process is better compared to what occurs when, upon pressing a button with the word “blue” on it, a blue colour chip automatically pops up, or doesn’t pop up if the mechanism fails.

Now one could say: Someone who has forgotten the meaning of the word “blue” and is asked to choose a blue object from among others, feels, when looking at these objects, that the connection between the word “blue” and those colours no longer exists (has been severed). And the connection is reestablished when we repeat the explanation of the word to him. But we’re able to reestablish the connection in a multitude of ways: We could show him a blue object and give him the ostensive definition, or say to him “Remember your ‘blue bruise’”, or we could whisper the word “blau” in his ear, etc., etc. And when I say that we could establish the connection in these different ways then it’s tempting to think that I have elicited *one* particular phenomenon – which I am calling the connection between word and colour or the comprehension of the word – in all of these different ways; just as I might say that I can make an electrical connection between the ends of two wires using pieces of wire of different lengths and materials. ⁴⁸But there need be no talk about such a phenomenon as the formation of a mental image of blue, and his understanding will be shown by his actually choosing the blue ball from among the others, or by his saying that although he could do this he didn’t want to; etc., etc., etc. We can always establish a game that represents *one* possibility for such a process, ⁴⁹and we shouldn’t forget that in reality hundreds of different possibilities of this kind can be described, along with their intersections with the words “to forget the meaning”, “to recall the meaning”, “to know the meaning”.⁵⁰

46 (M): ///

47 (V): inappropriate

48 (M): ///

49 (M): /

50 (R): Also see notebook

182 **Kann man etwas Rotes nach dem
Wort „rot“ suchen? Braucht man ein
Bild, ein Erinnerungsbild, dazu?
Verschiedene Suchspiele.**

¹Man könnte eine wesentliche Frage auch so stellen: Wenn ich jemandem sage „male diesen Kreis rot“, wie entnimmt er aus dem Wort „rot“, welche Farbe er zu nehmen hat?

²Heißt es etwas, zu sagen, daß das Wort „rot“, um ein brauchbares Zeichen zu sein, ein Supplement – etwa im Gedächtnis – braucht?

D.h., inwiefern ist es allein nicht Zeichen?

³Wenn ich eine Erfahrung mit den Worten beschreibe „vor mir steht ein blauer Kessel“, ist die Rechtfertigung dieser Worte, außer der Erfahrung die in den Worten beschrieben wird, noch eine andere, etwa die Erinnerung, daß ich das Wort „blau“ immer für diese Farbe verwendet habe, etc.?

183 ⁴Wenn ich jemandem sage „wenn ich läute, komm’ zu mir“, so wird er zuerst, wenn er läuten hört, sich diesen Befehl (das Läuten) in Worte übersetzen und erst den übersetzten befolgen. Nach einiger Zeit aber wird er das Läuten ohne Intervention anderer Zeichen in die Handlung übersetzen.

Und so, wenn ich sage „zeige auf einen roten Fleck“, befolgt er diesen Befehl, ohne daß ihm dabei zuerst das Phantasiebild eines roten Flecks als Zeichen für „rot“ erscheint.

182v Der Witz muß sein, daß die Erinnerung (wie das Wissen) dem verglichen wird, was irgendwo aufgeschrieben steht.

183 ⁵Wenn er läutet, so komme ich zu ihm, ohne mir erst ein Bild meiner Bewegungen vorzustellen, wonach ich (dann) handle.

182v Dies bezieht sich auf den Fall vom Läuten, damit jemand kommt & die Weise wie er die Bedeutung dieses Zeichens lernt.

Ich glaube die Frage war: Muß er, wenn er sich das Läuten nicht in eine Erklärung⁶ übersetzt, sich nicht nach der Erinnerung an die letzte Befolgung des Befehls richten?

1 (M): / ✓ (R): ~~V. S. 23/5~~

2 (M): / ✓

3 (M): / ✓

4 (M): ? / / / / /

5 (M): /

6 (O): nicht eine Erklärung (V): nicht in Worte

Can One Use the Word “Red” to Search for Something Red? Does One Need an Image, a Memory-Image, for This? Various Searching-Games.

¹An important question could be put this way: If I tell someone “Paint this circle red” how does he infer from the word “red” which colour he’s supposed to pick?

²Does it mean anything to say that the word “red” needs a supplement – perhaps in one’s memory – in order to be a usable sign?

That is, in what respect isn’t it a sign by itself?

³If I use the words “There’s a blue vat in front of me” to describe an experience, is the justification for these words something in addition to the experience they describe, for instance the memory that I’ve always used the word “blue” for this colour, etc.?

⁴If I tell someone “When I ring, come”, then when he hears the ring, at first he’ll translate this command (the ring) into words, and he won’t obey it until it’s been translated. After a while, though, he’ll translate the ringing into action without the intervention of other signs.

And thus when I say “Point to a red patch”, he’ll obey this order without first having an imaginary picture of a red patch appear to him as a sign for “red”.

The joke is always played when memory (like knowledge) gets compared to what is written down somewhere.

⁵If he rings, I come to him without first imagining a picture of my movements, which I (then) translate into action.

This refers to the case of ringing to get someone to come, and the way he learns the meaning of this sign.

I believe the question was: If he doesn’t translate the ringing into an explanation⁶, doesn’t he have to be guided by his memory of the last time he obeyed the order?

1 (M): / ✓ (R): ~~✓ p. 23/5~~

2 (M): / ✓

3 (M): / ✓

4 (M): ? / ///

5 (M): /

6 (V): ringing ~~into words~~

183 ⁷Muß er sich daran erinnern, wie er den Befehl gestern befolgt hat? Ich kann auch den ausdrükl. Befehl geben:⁸ „Tu jetzt, was Du, Deiner Erinnerung nach, heute vor einem Jahr⁹ getan hast“. Und wenn er sich daran erinnert, kann er seiner Erinnerung folgen. Erinnert er sich aber nicht, so hat der Befehl keinen Sinn für ihn. [D.h. die Erinnerung wirkt automatisch.]

182v Und wie weiß er dann, was die Worte dieses Befehls (Tu was Du Deiner Erinnerung nach . . .) von ihm wollen – wenn wir annehmen es sei immer ein Erinnerungsbild das den Worten ihre Bedeutung gibt.

183 [Lösung ↓]

¹⁰Dieser Bef. ist also ähnlich wie der:¹¹ „Tu, was auf dem Zettel in dieser Lade aufgeschrieben steht“. Wenn in der Lade kein Zettel ist, so ist das kein Befehl. (Oder denken wir uns, daß auf dem Zettel eine sinnlose¹² Wortverbindung steht etwa:¹³ „Kaufe n Pflaumen & $n^2 + 2n + 2 = 0$ “.)

¹⁴Wenn ich jemandem sage „male das Grün Deiner Zimmertür nach dem Gedächtnis“, so bestimmt das, was er zu tun hat, nicht eindeutiger, als der Befehl „male das Grün, was Du auf dieser Tafel siehst“. Denn er wird auch im zweiten Fall für gewöhnlich nicht nach der Projectionsmethode fragen.

¹⁵Wenn es bei der Bedeutung des Wortes „rot“ auf das Bild ankommt, das mein Gedächtnis beim Klang dieses Wortes automatisch reproduziert, so muß ich mich auf diese Reproduktion gerade so verlassen, als wäre ich entschlossen, die Bedeutung durch Nachschlagen in einem Buche zu bestimmen, wobei ich mich diesem Buche, dem Täfelchen, das ich darin fände, quasi auf Gnade und Ungnade ergeben würde.

184 ¹⁶Ich bin dem Gedächtnis ausgeliefert.

¹⁷Freilich kann man sagen: das rote Täfelchen ist in Wirklichkeit auch nicht maßgebend, weil das Gedächtnis immer als Kontrolle des Täfelchens verwendet wird.

¹⁸Die Frage aber ist: Ist im Falle einer relativen Veränderung der Farbe des Täfelchens zu meinem Gedächtnis (ein gewagter Ausdruck) in irgend einem Sinne unbedingt der Deutung der Vorzug zu geben, das Täfelchen habe sich geändert und ich müsse mich also nach dem Gedächtnis richten? Offenbar nein. Übrigens besagt die „Deutung“, das Täfelchen und nicht das Gedächtnisbild habe sich verändert, nichts als eine Worterklärung der Wörter „verändern“ und „gleichbleiben“.

¹⁹Könnte ich behaupten, daß mein Gedächtnis immer etwas nachdunkle?

Jedenfalls könnte ich sagen: „wähle die Farbe, die Du im Gedächtnis hast“ und auch „wähle eine etwas dunklere Farbe, als die Du im Gedächtnis hast“. Von einem Nachdunkeln kann man natürlich nur im Vergleich zu etwas andrem²⁰ sprechen und es genügt nicht, zu sagen „nun, mit der Farbe, wie sie wirklich war“, weil hier die besondere Art der Verifikation, d.h., die (besondere) Grammatik der Worte „wie sie war“ noch nicht festgelegt ist, diese Worte (also) noch mehrdeutig sind.

7 (M): / ✓

8 (V): Ich kann gewiß sagen:

9 (V): nach, gestern um diese Zeit

10 (M): / ✓ ///

11 (V): Wäre dieser Befehl also wie der:

12 (V): unsinnige

13 (O): steht. ~~oder~~ etwa:

14 (M): ? / ✓ ///

15 (M): ÷ / ✓

16 (M): ? /

17 (M): /// ✓

18 (M): / ✓

19 (M): / ✓

20 (V): zu Etwas

⁷Does he have to remember how he obeyed the order yesterday? I can also give the explicit order⁸: “Do now what you remember doing a year ago today⁹”. And if he remembers, he can follow his memory. But if he doesn’t, the command makes no sense to him. (That is, memory works automatically.)

And how does he know what the words of this order (“Do what you remember . . .”) ask of him – if we assume that it is always a memory-image that gives words their meaning?

[Solution ↓]

¹⁰So that order is similar to this:¹¹ “Do what is written on the piece of paper in this drawer”. If there is no piece of paper in the drawer then that’s not a command. (Or let’s imagine that there is a senseless¹² combination of words on the piece of paper, say: “Buy n plums and $n^2 + 2n + 2 = 0$ ”.)

¹³If I tell someone “Paint the green of the door to your room from memory” then this doesn’t specify what he is supposed to do any more unequivocally than the command “Paint the green that you see on this colour chart”. For in the latter case too he will usually not ask about the method of projection.

¹⁴If determining the meaning of the word “red” requires the image that my memory automatically reproduces at the sound of that word, then I have to rely on this reproduction in just the same way as if I had decided to determine the meaning by looking it up in a book – in which case I’d surrender myself to the book, to the colour chip I’d find in it, for better or worse.

¹⁵I am at the mercy of my memory.

¹⁶To be sure, one can say: Really the red colour chip isn’t decisive either, because memory is always used as a check on it.

¹⁷But the question is: Supposing the colour of the chip changes relative to my memory (a risky expression), do I in some sense have to prefer the interpretation that it is the colour chip that has changed, and that therefore I have to be guided by my memory? Obviously not. Incidentally, the “interpretation” that it is the chip and not my memory-image that has changed is nothing more than a definition of the words “change” and “remain the same”.

¹⁸Could I claim that my memory always darkens things a bit?

In any case I could say: “Choose the colour that’s in your memory”, but also “Choose a somewhat darker colour than the one that’s in your memory”. Of course one can only talk about a darkening in comparison to something else¹⁹, and it is not enough to say “Well, in comparison to the colour as it really was”, because that particular type of verification, i.e. the (particular) grammar of the words “as it was”, hasn’t yet been established here, and (therefore) these words are still ambiguous.

7 (M): / ✓

8 (V): I can certainly say

9 (V): doing this time yesterday

10 (M): / ✓ ///

11 (V): So would that order be like this:

12 (V): nonsensical

13 (M): ? / ✓ ///

14 (M): ? / ✓

15 (M): ? /

16 (M): /// ✓

17 (M): / ✓

18 (M): / ✓

19 (V): to something

²¹Mit einem Draht nach einem Kurzschluß suchen: er ist gefunden, wenn es läutet. Aber suche ich dabei auch nach etwas, was der Idee des Klingelns gleich ist?

185 ²²Der Befehl sei: „Stelle Dir einen roten Kreis vor“. Und ich tue es. Wie konnte ich den Worten auf diese Weise folgen?

Das ist doch ein Beweis²³ dafür, daß wir den Worten auch ohne Vorstellungen gehorchen können.

²⁴Wie kann ich es *rechtfertigen*, daß ich mir auf diese Worte hin diese Vorstellung mache?

Was heißt denn hier „diese Vorstellung“? Kann ich denn auf sie zeigen? Dies hängt *unmittelbar* mit²⁵ dem Problem zusammen „ob & woher ich“²⁶ denn wissen kann ob & was der Andre fühlt, sieht etc.“.

²⁷Hat mir jemand die Vorstellung der blauen Farbe gezeigt und gesagt, daß sie das ist?

²⁸Es ist also richtig: „Ich erinnere mich *daran*“, an das, was ich hier vor mir sehe. Das Bild ist dann in einem gewissen *Sinne* sowohl gegenwärtig und vergangen.

²⁹Der Vorgang des Vergleiches eines Bildes mit der Wirklichkeit ist also der Erinnerung nicht wesentlich.

³⁰Es ist instruktiv zu denken, daß, wenn wir mit einem gelben Täfelchen die Blume suchen, uns jedenfalls nicht die Relation der Farbgleichheit in einem weiteren Bild gegenwärtig ist. Sondern wir sind mit dem einen ganz zufrieden.

³¹(So wie wir nicht für einen Augenblick daran dächten, ein Kind die Gebärdensprache zu lehren.)

³²Ich kann die Bedeutung der Zeichen \odot , \square , \ominus ³³ durch die Tabelle

\odot	Kirche
\square	Haus
\ominus	Stadt

erklären; aber diese Tabelle wieder erklären, indem ich sie so schreibe \odot + Kirche
 \square + Haus
 \ominus + Stadt

und sie einer anderen entgegenstelle:

\odot	Kirche
\square	Haus
\ominus	Stadt

186 Aber konnte denn auch die erste Erklärung wegbleiben? Gewiß, wenn die Zeichen \odot , \square , \ominus , uns (etwa) ursprünglich ebenso beigebracht worden wären, wie die Wörter „Kirche“, „Haus“, „Stadt“. Aber diese mußten uns doch erklärt werden! – Soweit sie uns überhaupt „erklärt“ wurden, geschah es durch eine Gebärdensprache, die uns nicht erklärt

21 (M): / ✓

22 (M): / ✓ ////

23 (V): Zeichen

24 (M): / ✓

25 (V): hängt mit

26 (V): „ob ich

27 (M): // (R): [Zu § 77 S. 357]

28 (M): J ✓ ///

29 (M): / ✓

30 (M): /// ✓

31 (M): /// ✓

32 (M): ///

33 (F): MS 110, S. 278–279.

²⁰Searching for a short circuit with a wire: it’s found when it rings. But in doing this, am I also searching for something that’s just like the idea of ringing?

²¹Let the order be: “Imagine a red circle”. And I do it. How was I able to follow those words in this way?

Surely that is proof²² that we can follow words even without mental images.

²³How can I *justify* the fact that in response to these words I conjure up this mental image for myself?

What does “this mental image” mean here anyway? Can I point to it? This is *directly* connected²⁴ with the problem “whether and how I²⁵ can know whether and what someone else feels, sees, etc.”.

²⁶Did someone show me the mental image of the colour blue and tell me it was that?

²⁷So it is correct to say: “I remember *this*” – what I see here in front of me. Therefore in a certain *sense* the image is both present and past.

²⁸Therefore the process of comparing an image with reality is not essential to memory.

²⁹It is instructive to realize that when we look for a flower using a yellow colour chip, the relationship of sameness of colour is *not* present in an additional image. Rather, we are quite content with the one.

³⁰(Just as we wouldn’t for a moment think of teaching a child a language of gestures.)

³¹I can explain the meaning of the signs ☉, □, ⊙,³² using the table

☉		Church
□		House
⊙		City

but I can explain this table in turn by writing it like this

☉	+	Church
□	+	House
⊙	+	City

and contrasting it with another one:

☉	↘	Church
□	↘	House
⊙	↘	City

But could the first explanation be omitted as well? Certainly, if (say) we had originally been taught the signs ☉, □, ⊙, in the same way as the words “church”, “house”, “city”. But these had to be explained to us! – In so far as they were “explained” to us at all, this

20 (M): / ✓
 21 (M): / ✓ ///
 22 (V): is a sign
 23 (M): / ✓
 24 (V): is connected
 25 (V): “whether I
 26 (M): // (R): [To § 77 p. 357]

27 (M):] ✓ ///
 28 (M): / ✓
 29 (M): /// ✓
 30 (M): /// ✓
 31 (M): ///
 32 (F): MS 110, pp. 278–279.

wurde. – ³⁴Aber wäre denn diese Gebärdensprache einer Erklärung fähig gewesen? – Gewiß; z.B. durch eine Wortsprache.

³⁵Denken wir an das laute Lesen nach der Schrift (oder das Schreiben nach dem Gehör). Wir könnten uns natürlich eine Art Tabelle denken, nach der wir uns dabei richten könnten. Aber wir richten uns nach keiner. Kein Akt des Gedächtnisses, nichts, vermittelt zwischen dem geschriebenen Zeichen und dem Laut.

³⁶(Das Wort „rot“ ist ein Stein in einem Kalkül und das rote Täfelchen ist auch einer.)

³⁷Es ist ein anderes Spiel, mit einem Täfelchen herumgehen, es an die Gegenstände anzulegen und so die Farbgleichheit zu prüfen; und andererseits: ohne ein solches Muster nach Wörtern in einer Wortsprache handeln.

Man denkt nun: „Ja, das erste Spiel verstehe ich; das ist ja ganz einfach: Der erste Schritt ist der, von einem geschriebenen Wort auf das gleiche geschriebene Wort des Musters; der zweite ist der Übergang von dem Wort auf dem Mustertäfelchen zu der Farbe auf dem gleichen Täfelchen; und der dritte, das Vergleichen von Farben. Jeden Schritt dieses Kalküls gehen wir also auf einer Brücke. (Wir sind geführt, der Schritt ist vorgezeichnet.)“

³⁸Aber wir sind doch hier nur insofern³⁹ geführt, als wir uns so führen lassen. Auf diese Weise *kann*⁴⁰ ich alles, und *muß* ich nichts eine Führung nennen. – Und am Schluß tu ich, was ich tue und das ist Alles.

187 Man möchte Gründe & Gründe & Gründe angeben. In dem Gefühl: solange ein Grund da ist, ist alles richtig.⁴¹ Wir möchten⁴² nicht aufhören zu erklären; & nicht einfach beschreiben. Wie kann denn das interessant sein, *was eben geschieht*,⁴³ uns interessiert doch nur⁴⁴ immer die Rechtfertigung das Warum! Das ist doch nicht Mathematik zu sagen was die Menschen *tun*.

⁴⁵Aber ein Unterschied bleibt doch: Wenn ich gefragt werde „warum nennst Du gerade diese Farbe ‚rot‘“, so würde ich tatsächlich antworten: weil sie auf dem gleichen Täfelchen mit dem Wort „rot“ steht. Würde ich aber in dem zweiten Spiel gefragt „warum nennst Du diese Farbe ‚rot‘“, so gäbe es darauf keine Antwort und die Frage hätte keinen Sinn. – Aber im ersten Spiel hat *die*⁴⁶ Frage keinen Sinn: „warum nennst Du *die* Farbe ‚rot‘, die auf dem gleichen Täfelchen mit dem Wort ‚rot‘ steht“. So handle ich eben (und man kann dafür wohl eine Ursache angeben, aber keinen Grund). Das Gedächtnis ist jedenfalls nicht immer die letzte Instanz.

⁴⁷Bedenke vor allem: Wie weiß man, daß das Täfelchen rot bleibt? Braucht man dazu wieder ein Bild? Und wie ist es mit dem? etc. Woran erkennt er das Vorbild als Vorbild?

„Eine Häuserreihe⁴⁸ ist eigentlich unendlich, denn man könnte immer noch weitere Häuser bauen.“

⁴⁹(Ein Grund läßt sich nur *innerhalb* eines Spiels angeben.)

⁵⁰Die Kette der Gründe kommt zu einem Ende und zwar dem Ende in diesem Spiel.⁵¹

34 (M): /

35 (M): / ✓

36 (M): XXX

37 (M): / ✓

38 (M): ∫ / XXX

39 (V): insofern ∞

40 (V): Weise ~~ka~~ kann

41 (V₁): alles in Ordnung. (V₂): Gefühl: wo ein Grund ist, ist alles in Ordnung.

42 (V): Man möchte

43 (V): *was geschieht*,

44 (V): *geschieht, wir wollen doch nur*

45 (M): ///

46 (V): die

47 (M): /

48 (O): Häuserreihe

49 (M): ? / ✓

50 (M): ∫ ✓ ///

51 (V): und zwar (an) der Grenze des Spiels.

took place via a language of gestures, which wasn’t explained to us. – ³³But could this gesture-language have been explained? – Certainly; with a word-language, for instance.

³⁴Let’s think about reading aloud something that’s written (or about writing something as we hear it). Of course we could imagine a kind of table to guide ourselves with. But we’re not guided by any. No act of memory, nothing, mediates between the written sign and the sound.

³⁵(The word “red” is a building stone in a calculus, as is the red colour chip.)

³⁶It’s one kind of game: to walk around with a colour chip and check on the sameness of the colour of objects by putting it next to them; and it’s another kind: to act in accordance with the words of a word-language without such a sample.

Now we think: “Fine, I understand the first game; that’s quite simple: The first step is the one from a written word to the same written word on the sample; the second is the transition from the word on the sample colour chip to the colour on that *same* chip; and the third is comparing the colours. So it is that we take each step of this calculus across a bridge. (We are guided, our step has been marked out ahead of time.)”

³⁷But here we’re really only being guided in so far as we allow ourselves to be so guided. In this respect I *can* call everything and don’t *have* to call anything “guidance”. – And in the end I do what I do and that is all.

We would like to give reason after reason after reason. Because we feel: so long as there is a reason, everything is all right.³⁸ We don’t³⁹ want to stop explaining – and simply describe. How can *what is happening right now*⁴⁰ be interesting? All that we’re ever interested in⁴¹ is the justification, the why! It isn’t mathematics, after all, to say what people *do*.

⁴²But there’s still a difference: If I am asked “Why do you call this particular colour ‘red?’” then in fact I’d answer: Because it’s on the same colour chip that has the word “red” on it. But if in the second game I were asked “Why do you call this colour ‘red?’”, there would be no answer, and the question would make no sense. – But in the first game *this* question⁴³ makes no sense: “Why do you call *that* colour ‘red’ that’s on the same colour chip with the word ‘red’ on it?” That’s simply the way I act (and one can cite a cause for this, but not a reason). In any case, memory is not always the final authority.

⁴⁴Above all, consider this: How does one know that the colour chip remains red? Does this once again require a picture? And what is *it* like? Etc. How does he recognize the model as a model?

“Strictly speaking, a row of houses is infinite because one could always build additional houses.”

⁴⁵(A reason can be given only *within* a game.)

⁴⁶The chain of reasons comes to an end – to its end within this game.⁴⁷

33 (M): /

34 (M): / ✓

35 (M): XXX

36 (M): / ✓

37 (M): ∫ / XXX

38 (V₁): feel: so long as there is a reason, everything is in order. (V₂): feel: where there is a reason, everything is in order.

39 (V): One doesn’t

40 (V): *what is happening*

41 (V): interesting? ~~All that we ever want~~

42 (M): ///

43 (V): this question

44 (M): /

45 (M): ? / ✓

46 (M): ∫ ✓ ///

47 (V): comes to an end – and it does so (at) the game’s limits.

186v Und, wenn man sich daran erinnert,⁵² „daß die Tabelle uns nicht zwingt“, sie so & so zu benützen, noch, sie immer auf die gleiche Weise zu benützen, so wird es Jedem klar,⁵³ daß unser Gebrauch des Wortes⁵⁴ „Regel“ & des Wortes „Spiel“ ein schwankender ist. (Nach den Rändern zu verschwimmt.)

187 ⁵⁵Man kann sagen: Die Regeln des Spiels sind die, die gelehrt werden, wenn das Spiel gelehrt wird. – Nun wird z.B. dem Menschen, der lesen lernt, tatsächlich gelehrt: das ist ein a, das ein e, etc.; also, könnte man sagen, gehören diese Regeln, gehört diese Tabelle mit zum Spiel. – Aber erstens: lehrt man denn auch den Gebrauch dieser Tabelle? und *könnte* man ihn, anderseits, nicht lehren? Und zweitens kann doch das Spiel *wirklich* auf zwei verschiedene Arten gespielt werden.

Man kann nun fragen: ist es denn aber auch noch ein Spiel, wenn Einer die Buchstaben abbc sieht und *irgend etwas* macht? Und wo hört das Spiel auf, und wo fängt es an?

188 Die Antwort ist natürlich: Spiel ist es, wenn es nach einer Regel vor sich geht. Aber was ist noch eine Regel und was keine mehr?

Eine Regel kann ich nicht anders geben, als durch ihren Ausdruck; denn auch Beispiele, wenn sie Beispiele sein sollen, sind ein Ausdruck für die Regel, wie jeder andre.

Wenn ich also sage: Spiel nenne ich es nur, wenn es einer Regel gemäß geschieht und die Regel ist eine Tabelle, so kann ich nicht die Art des Gebrauches⁵⁶ dieser Tabelle garantieren, denn ich kann sie nur durch eine weitere Tabelle festlegen, oder durch Beispiele. Diese Beispiele tragen nicht weiter, als sie selbst reichen⁵⁷ und die zweite Tabelle ist im gleichen Fall wie die erste.

Ich könnte auch sagen: was ist das Schachspiel andres (oder was ist vom Schachspiel andres vorhanden), als Regelverzeichnisse (gesprochen, geschrieben, etc.) und die Beschreibung einer Anzahl von Schachpartien?

Es steht mir (danach) natürlich frei, „Spielregel“ nur ein Ding von bestimmt festgelegter Form zu nennen.

52 (V): sich in die Erinnerung ruft,

53 (V): wird es ganz klar,

54 (V): Wortes „~~Siel~~“

55 (M): ? / ✓ / / / /

56 (V): die Verwendungsart

57 (V): gehen

And if we remember⁴⁸ “that the table doesn’t force us” to use it this or that way, nor to use it in the same way every time, then it becomes clear to everybody⁴⁹ that our use of the word “rule” and the word “game” vacillates. (Blurs as it approaches the edges.)

⁵⁰One can say: The rules of the game are those that are taught when the game is taught. – Now a person learning to read, for instance, is actually taught: This is an a, that an e, etc.; so, one could say, these rules, this table, also belong to the game. – But first of all: Does anyone ever really teach the use of this table? But isn’t it *possible* to teach it? And second: the game *really* can be played in two different ways.

Now one can ask: But is it really still a game if someone sees the letters abbc and does *just any old thing*? And where does the game end and where does it begin?

Of course the answer is: It’s a game if it follows a rule. But what is still a rule, and what no longer one?

I cannot produce a rule in any other way than through its expression; for even examples, if they are to be examples, are an expression of the rule just like any other expression.

So if I say: “I call it a game only if it is played according to a rule”, and if the rule is a table, then I can’t guarantee the way the table is used. I can only establish this by way of a further table or by way of examples. These examples don’t carry me any further than they themselves extend,⁵¹ and the second table is in the same situation as the first.

I could also say: What is chess (or what do we have in chess) other than lists of rules (spoken, written, etc.) and the description of a number of chess games?

(Having said that) I am free, of course, to call only something that has a specifically established form a “rule of the game”.

48 (V): we call to mind

49 (V): it becomes completely clear

50 (M): ? / ✓ / / / /

51 (V): go,

189 „Die Verbindung¹ zwischen Sprache und Wirklichkeit“ ist durch die Worterklärungen gemacht,² welche wieder zur Sprachlehre gehören. So daß die Sprache in sich geschlossen, autonom, bleibt.

³Übereinstimmung von Gedanke und Wirklichkeit. Wie alles Metaphysische ist die (prästabilierete) Harmonie zwischen Gedanken und Wirklichkeit in der Grammatik der Sprache aufzufinden.

188v ⁴Was macht uns glauben daß so etwas wie eine Übereinstimmung des Gedankens⁵ mit der Wirklichkeit besteht? – Statt⁶ Übereinstimmung könnte man hier ruhig⁷ setzen:⁸ „Bildhaftigkeit“. Ist aber die Bildhaftigkeit eine Übereinstimmung? In der „Log. phil. Abh.“ habe⁹ ich so etwas gesagt, wie: sie sei¹⁰ eine Übereinstimmung der Form. Das ist aber eine Irreführung.¹¹

¹²Alles kann ein Bild von allem sein: wenn wir den Begriff des Bildes entsprechend ausdehnen. Und sonst müssen wir¹³ sagen, was wir noch ein Bild von etwas nennen wollen & damit auch was¹⁴ wir noch die Übereinstimmung der Bildhaftigkeit, die Übereinstimmung der Formen nennen wollen.

Denn was ich sagte kommt ja eigentlich darauf hinaus: jede Projektion, nach welcher Methode immer, müsse etwas mit dem Projizierten *gemeinsam haben*.¹⁵ Aber das sagt nur, daß ich¹⁶ den Begriff

-
- | | |
|--|---|
| 1 (V): Beziehung | 12 (M): überlege |
| 2 (V): hergestellt, | 13 (V): wir eben |
| 3 (M): ? / ✓ (R): [Zu § 21 S. 76 83] | 14 (V): sagen, was wir ein Bild von etwas nennen & auch was |
| 4 (M): / (R): [Zu § 21 S. 83] | 15 (V ₁): nach welcher Methode immer, habe etwas mit dem Projizierten <i>gemeinsam</i> . (V ₂): darauf hinaus: zu sagen daß jede Projektion, nach welcher Methode immer, etwas mit dem Projizierten <i>gemeinsam haben muß</i> . |
| 5 (V): übereinstimmung von den Gedanken | 16 (V): ich hier |
| 6 (V): besteht? – Die ÜB Statt | |
| 7 (V): man ruhig | |
| 8 (V): sagen : | |
| 9 (V): In der „Abhandlung“ hätte | |
| 10 (V): ist | |
| 11 (V): aber irreführend. | |

“The Connection¹ between Language
and Reality” is Made² Through
Explanations of Words, which
Explanations Belong in Turn to
Grammar. So that Language Remains
Self-contained, Autonomous.

³Agreement of thought and reality. Like everything metaphysical the (pre-established) harmony between thoughts and reality is to be discovered in the grammar of language.

⁴What makes us think that there is something like an agreement of thought⁵ and reality? – Here one could⁶ safely put⁷ “pictoriality” instead of agreement.

But is pictoriality an agreement? In *Tractatus Logico-Philosophicus* I said⁸ something like: pictoriality is an agreement of form. But that is misleading.

⁹Anything can be a picture of anything – if we expand the concept of picture enough. Otherwise we have to say what it is that we still want to call¹⁰ a picture of something, and hence too what we want to call “agreement of pictoriality”, “agreement of forms”.

For what I said really boils down to this: any projection, regardless of its method, has to *have* something *in common* with what is projected.¹¹ But that only means that¹² I am expanding

1 (V): Relation

2 (V): Established

3 (M): ? / ✓ (R): [To § 21 p. 76 83]

4 (M): / (R): [To § 21 p. 83]

5 (V): ~~of~~ thoughts

6 (V): One could

7 (V): safely ~~say~~

8 (V): In the *Tractatus* I had said

9 (M): Think about

10 (V): that we call

11 (V₁): regardless of its method, ~~has~~ something *in common* with what is projected. (V₂): boils down to this: ~~to say that~~ any projection, regardless of its method, ~~has to have something~~ *in common* with what is projected.

12 (V): that ~~here~~

des „gemeinsam-habens“ ausdehne & ihn dem allgemeinen Begriff des Projizierens äquivalent mache.¹⁷

Es drängt sich mir also eine bestimmte Form¹⁸ der Verallg. auf, eine Form der Darstellung, ein bestimmter Aspekt.¹⁹

- 189 ²⁰Es ist²¹ auch unrichtig²² zu sagen, die Übereinstimmung (und Nichtübereinstimmung) zwischen Satz und Realität²³ sei willkürlich durch eine Zuordnung geschaffen. Denn, wie ist die Zuordnung auszudrücken? Sie besteht darin, daß der Satz „p“ sagt, es sei gerade das der Fall. Aber wie ist dieses „gerade das“ ausgedrückt?²⁴ Wenn durch einen andern Satz, so gewinnen wir nichts dabei; wenn aber durch die Realität, dann muß diese schon in bestimmter Weise – artikuliert – aufgefaßt sein. Das heißt: man kann nicht auf einen Satz und auf eine Realität deuten und sagen: „das entspricht dem“. Sondern, dem Satz entspricht nur wieder das schon Artikulierte. D.h., es gibt keine hinweisende Erklärung für *Sätze*.
- 190

²⁵Um im Chinesischen²⁶ einen Satz bilden zu können, dazu genügt es nicht, die Lautreihe zu lernen und zu wissen, daß sie, etwa in der Fibel neben einem bestimmten Bild steht. Denn das befähigt mich nicht, die Tatsache auf Chinesisch²⁷ zu porträtieren.

Ja, wenn es mir im Deutschen so geschähe, daß ich die ganze Sprache vergäße,²⁸ mir aber bei einer bestimmten Gelegenheit doch die Lautverbindung des Satzes einfele, die man in diesem Falle zu gebrauchen pflegt,²⁹ so würde ich diese Lautverbindung damit³⁰ nicht verstehen.

Denk aber etwa an den Satz: „Komm!“

³¹Wenn man jemanden fragt „wie weißt Du, daß die Worte dieser Beschreibg.³² wiedergeben,³³ was Du siehst“, so könnte er etwa antworten „ich meine das mit diesen Worten“. Aber was ist dieses „das“, wenn es nicht (selbst) wieder artikuliert, also schon Sprache ist? Also ist „ich meine das“ gar keine Antwort. Die Antwort ist eine Erklärung der Bedeutung der Worte.

³⁴Wenn ich die Beschreibung nach Regeln bilde (sie mit der Wirklichkeit kollationiere),³⁵ dann übersetze ich sie als eine Sprache aus einer anderen. Und das kann ich natürlich mit Grammatik und Wörterbuch tun und so rechtfertigen. – Aber dann ist die Übertragung von

- | | |
|--|---|
| <p>17 (V): daraus hinaus: jedes Bild müsse etwas mit der Welt des Dargestellten gemeinsam haben um ein Bild von etwas in dieser Welt sein darstellen zu können. Was aber nur heißt:
Das Bild habe sozusagen die Projektionsmethode mit dem Dargestellten gemeinsam.
Wie könnte etwas ein Befehl sein wenn ich mich nicht danach richten <i>könnte</i>. Und wie könnte ich mich nach ihm richten, wenn ihm nicht die <i>Form meiner</i> einer Handlung eigen wäre.
Es kann mich nun reizen den Begriff „gem. h.“ so weit auszudehnen, daß man dies sagen kann.</p> <p>18 (V): Art</p> <p>19 (V₁): ein Aspekt. (V₂): äquivalent mache. Ich mache also nur auf eine Möglichkeit der Verallgemeinerung aufmerksam (was freilich sehr wichtig sein kann). (V₃): äquivalent mache. Es schwebt // drängt sich // mir also eine bestimmte mögliche Verallgemeinerung vor eine Form der</p> | <p>Darstellung // eine Form der Darstellung //, ein Aspekt.</p> <p>20 (M): √ ✓ ///</p> <p>21 (V): ist wohl</p> <p>22 (V): Unsinn</p> <p>23 (V): Welt</p> <p>24 (V): gegeben?</p> <p>25 (M): ? / ✓ ////</p> <p>26 (V): Um in einer Sprache</p> <p>27 (V): Tatsache in jener Sprache</p> <p>28 (V): verlernte,</p> <p>29 (V): Falle gebraucht,</p> <p>30 (V): Lautverbindung in diesem Falle</p> <p>31 (M): ? / ✓</p> <p>32 (V): daß diese Beschreibung</p> <p>33 (O): wiedergibt,</p> <p>34 (M): √ ✓</p> <p>35 (V): kollationiere), was auch möglich ist,</p> |
|--|---|

the concept of “having in common” and am making it equivalent to the general concept of projecting.¹³

So a particular form¹⁴ of generalizing forces itself on me, a form of representation, a particular aspect.¹⁵

¹⁶It is also¹⁷ incorrect¹⁸ to say that the agreement (and lack of agreement) between proposition and reality¹⁹ is created arbitrarily by coordinating them. For how is this coordination to be expressed? It consists of the proposition “p” saying that *this particular thing* is the case. But how does this “this particular thing” get expressed?²⁰ If through another proposition, then we gain nothing in the process; but if through reality, then the latter must already have been articulated – understood – in a particular way. This means: one cannot point to a proposition and reality and say: “*This* agrees with *that*”. Rather, only what has been articulated agrees with a proposition. That is to say, there is no ostensive explanation of *propositions*.

²¹To be able to form a sentence in Chinese²², it is not enough to learn a sequence of sounds and to know that, say in my primer, it is next to a certain picture. For this doesn’t enable me to portray a fact in Chinese.²³

Indeed if it happened that I forgot²⁴ all my English, but nevertheless on a certain occasion remembered the combination of sounds of the sentence that one usually uses²⁵ in a particular case, then in so remembering²⁶ I wouldn’t *understand* this combination of sounds.

But think of the sentence “Come!”, for instance.

²⁷If you ask someone “How do you know that the words of your description capture²⁸ what you see?”, he could answer, for instance, “I *mean* that by my words”. But what is this “*that*” if it isn’t (itself) articulated in turn, and is therefore already language? So “I *mean* that” is not an answer at all. The answer is an explanation of the meaning of the words.

²⁹If I form a description in accordance with rules (collate it with reality),³⁰ then I’m translating from one language into another. And of course I can do that with a grammar and a dictionary, and use these to justify it. – But then the transposition is from one articulated

- | | |
|--|--|
| <p>13 (V): equivalent to this: every picture has to have something in common with the world of what it represents in order to represent a picture of something in this world. But this means only:
 The picture and what it represents have their method of projection in common, so to speak.
 How could something be an order if I <i>couldn't</i> comply with it? And how could I comply with it if it didn't contain the <i>form</i> of my an action?
 It can be tempting to stretch the concept of “having in common” so far that one can say this.</p> | <p>// forces itself upon me, // a form of representation,
 // a form of representation, // an aspect.</p> |
| <p>14 (V): kind</p> | <p>16 (M): ∫ ✓ ///</p> |
| <p>15 (V₁): representation, an aspect. (V₂): of projecting. Therefore I am simply pointing out a possibility of generalization (which, to be sure, can be very important). (V₃): of projecting. Therefore a particular possible generalization is in my mind’s eye,</p> | <p>17 (V): also quite
 18 (V): nonsense
 19 (V): world
 20 (V): how is this “this particular thing” given
 21 (M): ? / ✓ /// /
 22 (V): in a language
 23 (V): in that language.
 24 (V): unlearned
 25 (V): one uses
 26 (V): then in this case
 27 (M): ? / ✓
 28 (V): that this description captures
 29 (M): ∫ ✓
 30 (V): reality), which is indeed possible,</p> |

Artikuliertem in Artikuliertes. Und wenn ich sie durch Berufung auf die Grammatik und das Wörterbuch rechtfertige, so tue ich nichts, als eine Beziehung zwischen Wirklichkeit und Beschreibung (eine projektive Beziehung) festzustellen, von der Intention aber, meiner Beschreibung ist hiebei keine Rede. (D.h., ich kann eben nur die Ähnlichkeit des Portraits³⁶ prüfen, nichts weiter.)³⁷

36 (V): Bildes

37 (R): \forall S. 143/1, 2, 3

thing to another. And if I justify my description by appealing to grammar and a dictionary then all I'm doing is establishing a relationship between reality and a description (a projective relationship); nothing is said here, though, about what I intend with my description. (That is, all I can do is to check the portrait's³¹ similarity, nothing more.)³²

31 (V): picture's

32 (R): \forall p. 143/1, 2, 3

191

¹Die Sprache in unserem Sinn
nicht als Einrichtung definiert, die
einen bestimmten Zweck erfüllt.
Die Grammatik kein
Mechanismus, der durch seinen
Zweck gerechtfertigt ist.

²Kann man sagen: „Die Grammatik ist die richtige, die die gewünschte Wirkung hat.“?

Wir möchten³ dann sagen: die Wirkung interessiert uns nicht (wir erlauben uns, *irgend eine* zu erdichten), sondern⁴ nur die Form der Wirkung. D.h. was wir als Wirkung von Etwas *auffassen können*.

⁵Oder auch: Wir erlauben uns irgend welche Erfahrungstatsachen zu erdichten & die Grenze ist für uns nur dort gezogen wo das aufhört was wir⁶ Erdichtung nennen; wo der⁷ Sinn aufhört.

190v

⁸Ich muß nun so etwas sagen, wie: Was ein Zeichen sein kann, *kann* auch eine Ursache sein; aber nicht immer umgekehrt. Eine Ursache muß die Multiplizität eines Zeichens haben. (Ein Zeichen, die Multiplizität einer *möglichen* Ursache.) (Vergleiche Gesetz der Symmetrie,⁹ Gleichgewicht des symmetrischen¹⁰ Hebels.)

¹¹Kann ich eine grammatische Regel durch ihren Zweck rechtfertigen?

¹²Ich kann sagen, ich gebrauche zwei verschiedene Wörter hier um eine Verwechslung zu vermeiden.

¹³Aber sind die Grammatischen Regeln so durch ihren Zweck gerechtfertigt wie die Regeln über den Bau einer Dampfmaschine durch die beabsichtigte Wirkungsweise der Dampfmaschine? Sind sie die Regeln nach denen ein Mechanismus konstruiert sein muß um die & die Bewegungen & . . . hervorzubringen?

¹⁴Man kann eine bestimmte Zeichengebung damit rechtfertigen, daß ein Anderer danach gewisse Handlungen ausführen soll.¹⁵

1 (M): ✓

2 (M): ? / ///

3 (V): würden

4 (V): sondern ~~uns interessiert~~

5 (M): ? /

6 (V): was wir ~~noch~~

7 (V): der ~~Uns~~

8 (M): ∫ / ///

9 (O): Symetrie,

10 (O): symetrischen

11 (M): ? / ///

12 (M): ///

13 (M): ///

14 (M): /

15 (V): Wie wäre es, wenn man eine bestimmte Zeichengebung damit rechtfertigte, daß ein Anderer danach die & die Handlungen ausführen soll?

¹Language in our Sense not
Defined as an Instrument
for a Particular Purpose.
Grammar is not a
Mechanism Justified
by its Purpose.

²Can one say: "The grammar that has the desired effect is the right one"?

In that case we are inclined to³ say: The effect doesn't interest us (we take the liberty of inventing *some random* one), only its form.⁴ That is, what we *can conceive of* as the effect of something.

⁵Or alternatively: We take the liberty of inventing some random empirical facts, and the boundary is drawn for us only where what we call "invention" ends, where sense ends.

⁶Now I have to say something like: What can be a sign *can* also be a cause; but not always the other way around. A cause must have the multiplicity of a sign. (A sign the multiplicity of a *possible* cause.) (Cf. the law of symmetry, the equilibrium of a symmetrical lever.)

⁷Can I justify a grammatical rule by its purpose?

⁸I can say that here I am using two different words in order to avoid a mix-up.

⁹But are grammatical rules justified by their purpose in the same way that the rules for building a steam engine are justified by the way it's intended to operate? Are they the rules to be followed in constructing a mechanism for producing such and such movements and . . . ?

¹⁰One can justify a particular use of signs by saying that they are supposed to induce someone to perform certain actions.¹¹

1 (M): ✓
2 (M): ? / ///
3 (V): we would
4 (V): form ~~interests us~~.
5 (M): ? /
6 (M): J / ///

7 (M): ? / ///
8 (M): ///
9 (M): ///
10 (M): /
11 (V): What would it be like if one justified a . . . ?

Man würde die Wirkung der verschiedenen Zeichen auf ihn beschreiben. Man würde vielleicht sagen, daß dieses Zeichen die gewünschte Wirkung hat¹⁶ ein anderes nicht. Man würde also etwa sagen das Zeichen¹⁷ → bewirkt daß er nach rechts geht dieses ← daß er nach links geht. Gäbe man Erklärungen der Bedeutung, so würde man sagen:¹⁸ das Zeichen ←¹⁹ bedeutet „Geh nach links“, etc. Es ist klar, daß es so eine kausale Rechtfertigung der²⁰ Zeichen gibt.²¹

191 ²²Könnte ich nicht die Sprache als soziale Einrichtung betrachten, die gewissen Regeln unterliegt, weil sie sonst nicht wirksam wäre.²³ Aber hier liegt es: dieses Letzte²⁴ kann ich nicht sagen; eine Rechtfertigung der Regeln kann ich, auch so, nicht geben. Ich könnte sie nur als ein Spiel, das die Menschen spielen, beschreiben.

²⁵Aber wie ist es: Ich gehe diesen Weg, um dorthin zu kommen; ich drehe den Hahn auf, um Wasser zu erhalten, ich winke, damit jemand zu mir kommt und endlich teile ich ihm meinen Wunsch mit, damit er ihn erfüllt! ((D.h.: War also die Mitteilung meines Wunsches nicht nur das Ziehen eines Hebels und der Sinn meiner Mitteilung ihr Zweck aber nicht ihre Wirkung?))²⁶

²⁷Aber was geht vor sich, wenn ich den Hahn aufdrehe, *damit* Wasser herausfließt? Was geschieht, ist, daß ich den Hahn aufdrehe, und daß dann Wasser herauskommt, oder nicht. Was geschieht, ist also, daß ich den Hahn aufdrehe.

192 Was auf das Wort „damit“ folgt, die Absicht, ist darin nicht enthalten. Ist sie vorhanden, so muß sie ausgedrückt sein und sie kann nur dann bereits durch das Aufdrehen des Hahnes ausgedrückt sein, wenn das Teil einer Sprache ist.

191v ²⁸Die Rechtfertigung würde etwa lauten: wenn ich *das* sagen will, muß ich nach *solchen* Regeln vorgehen.²⁹ Aber was ich sagen will (ich meine der Ausdruck für das „*das*“) ist ja erst durch die Regeln bestimmt.

³⁰Die grammatischen Regeln sind nicht diejenigen (natürlich erfahrungsmäßigen) Regeln nach denen die Sprache gebaut sein muß um ihren Zweck zu erfüllen. Um diese Wirkung zu haben.

Vielmehr sind sie die Beschreibung davon, wie die Sprache es macht, – was immer sie macht.

D.h. die Grammatik beschreibt nicht die Wirkungsweise der Sprache sondern nur das Spiel der Sprache, die Sprachhandlungen.

³¹Eine Sprache erfinden um mit ihr etwas Bestimmtes auszudrücken: aber dieses etwas muß schon³² ausgedrückt sein, wenn³³ ich sagen kann, daß ich es ausdrücken will.

³⁴Man könnte z.B. Einem ein Bild zeigen, damit er tut, was auf dem Bild dargestellt ist. Hätte man durch Erfahrung gefunden, daß dieser Behelf ihn zu gewissen Handlungen bringen kann, so könnte man nun eine Sprache, wie einen Mechanismus konstruieren um ihn damit zu lenken.

16 (V): hat ~~jenes~~

17 (V): sagen ~~dieser Pfeil~~

18 (V): sagen: ~~dieses~~

19 (O): Zeichen →

20 (V): ~~unsrerer~~

21 (V): gibt & auch, daß sie uns nicht interessiert.

22 (M): ///

23 (V): nicht wirken würde.

24 (V): dieses Letztere

25 (M): ? / XXX

26 (O): Mitteilung, ~~– ihr Zweck?~~)) aber nicht ihre Wirkung.

27 (M): XXXXX

28 (M): ? /

29 (V): will, muß ich solche // diese // Regeln geben.

30 (M): /

31 (M): / ///

32 (V): schon ~~vorher~~

33 (V): ~~ehe~~

34 (M): ? / ///

One would describe the effect of the various signs on him. One might say that this sign has the desired effect, but another one doesn't. Thus one might say that the sign¹² → has the effect that he goes to the right, this one ← that he goes to the left. If we were giving explanations of meaning, we'd say: "The¹³ sign ← means 'Go to the left', etc." It's clear that there is such a causal justification for¹⁴ signs.¹⁵

¹⁶Couldn't I look at language as a social institution that is subject to certain rules because otherwise it wouldn't be effective?¹⁷ But here's the problem: I cannot make this last¹⁸ claim; I cannot give any justification of the rules, not even like this. I can only describe them as a game that people play.

¹⁹But what about this: I take this path in order to get there; I turn on the tap in order to get water, I beckon so that someone will come to me, and finally I tell him my wish so that he'll fulfil it! ((That is to say: Wasn't communicating my wish merely pulling a lever and the sense of my communication its purpose, but not its effect?))

²⁰But what is going on when I turn on the tap *so that* water will flow out? What happens is that I turn on the tap and then water comes out, or doesn't. So what happens is that I turn on the tap.

What follows the words "so that", the intention, is not contained in the turning on of the tap. If the intention is present it must be expressed; and it can have been expressed by turning on the tap only if that is part of a language.

²¹The justification might run something like this: If I want to say *this* I have to proceed according to *such* rules.²² But what I want to say (I mean the spelling out of "*this*") isn't determined until the rules determine it.

²³Grammatical rules are not those (it goes without saying: empirical) rules in accordance with which language has to be constructed to fulfil its purpose. In order to have a particular effect.

Rather they are the description of *how* language does it – whatever it does.

That is, grammar doesn't describe the way language takes effect but only the game of language, the linguistic actions.

²⁴Inventing a language in order to express something specific with it: but this something must already have been expressed²⁵ for me to say that I want to express it.

²⁶One could show someone a picture, for instance, so that he'll do what's on it. If one had discovered through past experience that this makeshift can get him to carry out certain actions, then one could go on to construct a language as we do a mechanism, and control him with it.

12 (V): say that ~~this arrow~~

13 (V): ~~This~~

14 (V): for ~~our~~

15 (V): signs ~~and also, that it doesn't interest us.~~

16 (M): ~~///~~

17 (V): wouldn't have any effect?

18 (V): latter

19 (M): ? / XXX

20 (M): XXXX

21 (M): ? /

22 (V): *this* I have to establish *such* // these // rules.

23 (M): /

24 (M): / ///

25 (V): must have been expressed ~~beforehand~~

26 (M): ? / ///

192 ³⁵Wenn man sagte: Sprache ist alles, womit man sich verständigen kann, so müßte³⁶ man fragen: Aber worin besteht es, „sich verständigen“?

Ich könnte als Antwort darauf einen realen oder fiktiven Fall einer Verständigung von Menschen oder andern Lebewesen beschreiben. In dieser Beschreibung werden dann fingierte kausale Verbindungen eine Rolle spielen. Aber wenn der Begriff Sprache durch solche bestimmt ist, so interessiert er uns nicht. Und abgesehen von jenen empirischen Regelmäßigkeiten der Ereignisse, haben wir dann nur noch einen beliebigen³⁷ Kalkül. – Aber worin besteht denn das Wesentliche eines Kalküls?

³⁸„Sprache“ und „Lebewesen“. Der Begriff des Lebewesens ist so unbestimmt wie³⁹ der der Sprache.

⁴⁰„Ein Zeichen ist doch immer für ein lebendes Wesen da, also muß das etwas dem Zeichen Wesentliches sein“. Gewiß: auch ein Sessel ist immer nur für einen Menschen da, aber er läßt sich beschreiben, ohne daß wir von seinem Zweck reden. Das Zeichen hat nur einen Zweck in der menschlichen Gesellschaft, aber dieser Zweck kümmert uns gar nicht.

Ja am Schluß sagen wir überhaupt keine Eigenschaften von den Zeichen aus – denn diese interessieren uns nicht – sondern nur die (allgemeinen) Regeln ihres Gebrauchs. Wer das Schachspiel beschreibt, gibt weder Eigenschaften der Schachfiguren an, noch redet er vom Nutzen und Gebrauch des Schachspiels.

193 ⁴¹Denken wir uns den Standpunkt eines Forschers: er findet, daß in der Sprache der Erde ein Zeichen benützt wird, das nach diesen und diesen Regeln (etwa nach denen der Negation) gebraucht wird, und fragt sich: Wozu können sie das brauchen? Die Antwort wäre aber: Wenn immer ein Zeichen mit diesen Regeln zu gebrauchen ist.

192v ⁴²Es wäre ja auch möglich daß man fände, daß nur die deutsche Sprache dazu geeignet wäre von Menschen verstanden zu werden. Und wenn es sich um Menschen handelt die nur Deutsch gelernt haben, so ist das ja wirklich so. Man würde dann sagen: nur mit *diesem* Zeichensystem kann man Menschen beeinflussen.

Wäre dann das aber die einzig richtige Grammatik?

⁴³Die Grammatik ist die Beschreibung der Sprache.

Aber sie teilt nicht mit, ob jemand die Sprache versteht, wer sie versteht, oder ob⁴⁴ ein Befehl dieser Sprache befolgt wird.

⁴⁵Die Sprache ist Teil eines Mechanismus (oder⁴⁶ zu mindest kann sie so aufgefaßt werden⁴⁷). Mit ihrer Hilfe beeinflussen wir die Handlungen anderer Menschen & werden wir beeinflusst.

Als Teil des Mechanismus, kann man sagen, hat die Sprache einen Zweck. Aber die Grammatik kümmert sich nicht um den Zweck der Sprache & ob sie ihn erfüllt. Sowenig wie die Arithmetik um die Anwendung der Addition.

Sind die Regeln des Schachspiels willkürlich? Denken wir uns den Fall, es stellte sich heraus, daß nur das Schachspiel mit seinen gegenwärtigen Regeln die Menschen zerstreute & befriedigte. Dann

35 (M): ¡ / / / /

36 (V): muß

37 (V): willkürlichen

38 (M): ? / ✓

39 (V): Lebewesens hat die gleiche Unbestimmtheit wie

40 (M): ¡ ✓ / / / /

41 (M): ? / XXX überlege

42 (M): /

43 (M): / / / /

44 (V): ob ~~etwa~~

45 (M): / / / /

46 (V): oder ~~man~~

47 (V): kann man sie so auffassen

²⁷If it were said: “Language is everything one can use to communicate with”, then it needs to be asked: What does “communicating” consist in?

In answer to this, I could describe a real or fictional case of humans or other living beings communicating. Fictitious causal connections will then play a role in this description. But if the concept of language is determined by such connections, then we’re not interested in it. And aside from those empirical regularities of the events, all we have left is an arbitrary calculus. – But what does the essence of a calculus consist in?

²⁸“Language” and “living being”. The concept of a living being is as indeterminate as²⁹ the concept of language.

³⁰“A sign is always intended for a living being, so that must be something essential to a sign.” Certainly: a chair too is always intended just for a human being, but it can be described without our talking about its purpose. A sign has a purpose only in human society, but this purpose is of absolutely no concern to us.

Indeed, in the final analysis we don’t make any statements about the properties of signs – for these don’t interest us – but only about the (general) rules for their use. Someone describing the game of chess neither lists the properties of the chess men nor does he talk about the usefulness and use of the game of chess.

³¹Let’s imagine the point of view of an explorer. He finds that in a language spoken on earth a sign is used in accordance with such and such rules (say, with those of negation), and he asks himself: What can they use that for? But the answer would be: Whenever a sign with such rules is of use.

³²One might also find that only the English language were suitable to be understood by human beings. And as concerns people who have learned only English, that’s the way it really is. In this case one would say: You can only influence people with *this* system of signs.

But would that then be the only correct grammar?

³³Grammar is the description of language.

But it doesn’t tell us whether someone understands the language, who understands it, or³⁴ whether a command in this language is obeyed.

³⁵Language is part of a mechanism (or at least it can be understood³⁶ that way). With its help we influence the actions of other people, and are influenced by them.

As a part of a mechanism, one can say, language has a purpose. But grammar isn’t concerned with the purpose of language and whether it fulfils it. Any more than arithmetic is with the uses of addition.

Are the rules of chess arbitrary? Let’s imagine that it turned out that only chess with its present rules entertained and satisfied people. Then in so far as the purpose of the game is to be

27 (M):] /// /

28 (M): ? / ✓

29 (V): living being has the same indeterminacy as

30 (M):] ✓ /// /

31 (M): ? / XXX Think about

32 (M): /

33 (M): /// /

34 (V): or perhaps

35 (M): /// /

36 (V): at least one can understand it

wären doch diese Regeln, wenn der Zweck des Spiels erfüllt werden soll, nicht willkürlich. Wenn man aber von diesem Zweck absähe,⁴⁸ könnte man sie willkürlich nennen.

193 ⁴⁹Eine Sprache erfinden, heißt nicht auf Grund von Naturgesetzen (oder in Übereinstimmung⁵⁰ mit ihnen) eine Vorrichtung zu einem bestimmten Zweck erfinden. Wie es etwa die Erfindung des Benzinmotors oder der Nähmaschine ist. Auch die Erfindung eines Spiels ist nicht in *diesem* Sinne eine Erfindung, aber vergleichbar der Erfindung einer Sprache.

⁵¹Ich brauche nicht zu sagen, daß ich nur die Grammatik des Wortes „Sprache“ weiter beschreibe, indem ich sie mit der Grammatik des Wortes „Erfindung“ in Verbindung bringe.

⁵²Ist alles, was ich sagen kann⁵³ damit gesagt: Man kann nicht von den grammatischen Regeln sagen, sie seien eine Einrichtung dazu, daß die Sprache ihren Zweck erfüllen könne. Wie man etwa sagt: wenn die Dampfmaschine keine Steuerung hätte, so könnte der Kolben nicht hin und her gehen, wie er soll. Als könne man sich eine Sprache auch ohne Grammatik denken.

194 ⁵⁴Die grammatischen Regeln sind, wie sie nun einmal da sind, Regeln des Gebrauchs der Wörter. Übertreten wir sie, so können wir deswegen die Wörter dennoch mit Sinn gebrauchen. Wozu wären dann die grammatischen Regeln da? Um den Gebrauch der Sprache im Ganzen gleichförmig zu machen? (etwa aus ästhetischen Gründen?) Um den Gebrauch der Sprache als gesellschaftliche Einrichtung zu ermöglichen? also wie eine Verkehrsordnung, damit keine Kollision entsteht?⁵⁵ (Aber was geht es uns an,⁵⁶ wenn eine entsteht?) Die Kollision, die nicht entstehen⁵⁷ darf, darf nicht entstehen können! D.h., ohne Grammatik ist es nicht eine schlechte Sprache, sondern keine Sprache.

⁵⁸Andererseits muß man doch sagen, die Grammatik einer Sprache als *allgemein anerkannte Institution* ist eine Verkehrsordnung. Denn, daß man das Wort „Tisch“ *immer* in dieser Weise gebraucht, ist nicht der Sprache als solcher wesentlich, sondern quasi nur eine praktische Einrichtung.

⁵⁹Wie unterscheiden sich die Sprachregeln von denen des Anstandes?

Wenn man kein Ziel angeben kann, das nicht erreicht würde, wenn diese Regeln anders wären.

193v ⁶⁰Denken wir⁶¹ uns einen Baukasten⁶² zur Errichtung⁶³ von Mechanismen. Es gäbe da⁶⁴ Zahnräder, Hebel, Wellen⁶⁵ Lager, etc. Man könnte nun Regeln geben, wie diese Bestandteile aneinander gefügt werden dürften,⁶⁶ abgesehen davon, welchen Zweck der zusammengestellte Mechanismus haben soll.

48 (V): absähe, ~~wären~~

49 (M): ? / ✓

50 (V): (oder im Einklang)

51 (M): / ✓

52 (M): ///

53 (V): darf

54 (M): ///

55 (V): geschieht?

56 (V): was macht es uns,

57 (V): geschehen

58 (M): / ///

59 (M): ////

60 (M): ? / ///

61 (V): wir ~~uns an~~

62 (V): uns eine Art Baukasten

63 (V): Herstellung

64 (V): Mechanismen. ~~Er enthält~~

65 (V): Stäbe,

66 (V): dürften ~~ganz~~

achieved, these rules wouldn't be arbitrary. But if we disregarded this purpose we could³⁷ call them arbitrary.

³⁸Inventing a language does not mean inventing a device for a particular purpose on the basis of laws of nature, or in agreement³⁹ with them. As is the case, for instance, with the invention of the gasoline engine or the sewing machine. The invention of a game is also not an invention in *this* sense, but is comparable to the invention of a language.

⁴⁰I don't need to say that I am merely further describing the grammar of the word "language" when I connect it with the grammar of the word "invention".

⁴¹Is everything I can⁴² say said by: One cannot say of grammatical rules that they are an instrument that enables language to fulfil its purpose? As one might say: If a steam engine didn't have a governor, the piston couldn't go back and forth as it is supposed to. As if one could imagine a language without grammar.

⁴³Grammatical rules, as they currently exist, are rules for the use of words. Even if we transgress them we can still use words meaningfully. Then what do they exist for? To make language-use as a whole uniform? (Say for aesthetic reasons?) To make possible the use of language as a social institution? And thus – like a set of traffic rules – to prevent a collision? (But what concern is it of ours⁴⁴ if that happens?) The collision that mustn't come about⁴⁵ must be the collision that cannot come about! That is to say, without grammar it isn't a bad language, but no language.

⁴⁶On the other hand, one does have to admit that the grammar of a language as a *generally recognized institution* is a set of traffic rules. For it isn't essential to language as such that we *always* use the word "table" this way; rather, this is just a practical arrangement, as it were.

⁴⁷How do the rules of language differ from those of decorum?

When one can't specify a goal we'd fail to achieve if these rules were different.

⁴⁸Let's imagine a construction set for building mechanical devices.⁴⁹ Let it contain cogwheels, levers, shafts,⁵⁰ bearings, etc. Now one could issue rules for how these parts can be joined together, without regard to what purpose the assembled device is to have.

37 (V): ~~would~~

38 (M): ? / ✓

39 (V): harmony

40 (M): / ✓

41 (M): ///

42 (V): I am allowed to

43 (M): ///

44 (V): what does it matter to us

45 (V): mustn't happen

46 (M): / ///

47 (M): ////

48 (M): ? / ///

49 (V): a kind of construction set for the manufacture of mechanical devices.

50 (V): bars,

⁶⁷Es ist klar, daß es einer Verwechslung entspringt, z.B., zu sagen: die Grammatik müsse von vier primären Farbwörtern⁶⁸ reden, weil es vier primäre Farben gäbe. Als wäre der Fall vergleichbar dem: die Astronomie muß von vier Jupitermonden sprechen, weil es vier Jupitermonde gibt.

⁶⁹Man kann also sagen, die Grammatik läßt sich nicht mit der Wirklichkeit rechtfertigen. Aber es ist ein anderer Satz, daß sie sich nicht als Teil eines psychologischen Mechanismus rechtfertigen läßt.

Ja es wäre eben der Fall⁷⁰ denkbar – daß sie sich durch die psychologische Erfahrung rechtfertigen ließe, wenn sich z.B. die deutsche Sprache als die einzige erwiese die ein Mensch lernen kann. Aber diese Rechtfertigung interessiert uns nicht.

⁷¹So könnte es sein daß ein Mensch das Zeigen einer Richtung⁷² (etwa der, in welcher er gehen soll) nur verstünde, wenn es mit der Hand oder einem Pfeil in der⁷³ gewöhnlichen Weise geschähe, aber nicht wenn man mit dem Ellbogen⁷⁴ in diese⁷⁵ Richtung wiese. Und verstehen heißt hier auf das Zeichen in bestimmter Weise reagieren.⁷⁶

194 ⁷⁷Der Zweck der Grammatik ist nur der Zweck der Sprache.
Der Zweck der Grammatik ist der Zweck der Sprache.

⁷⁸Woher die Bedeutung der Sprache? Kann man denn sagen: Ohne⁷⁹ Sprache könnten wir uns nicht miteinander verständigen. Nein, das ist ja nicht so, wie: ohne Telefon könnten wir nicht von Amerika nach Europa reden. (Es sei denn, daß wir unter „Telephon“ jede Vorrichtung verstehen, welche etc. etc.)

Ohne Sprache könnten wir nicht Gedanken austauschen. Ja was heißt das Gedanken austauschen? Und übrigens was heißt denn Gedanken lesen?

⁸⁰Wir können aber sagen: Ohne Sprache könnten wir die Menschen nicht beeinflussen. Oder, nicht trösten. Oder: nicht ohne eine Sprache Häuser und Maschinen bauen.

Ohne Sprache könnten wir die Menschen nicht bewegen unseren Willen zu tun.

193v ⁸¹Denken wir daran wie ein Mensch durch die Sprache die Tätigkeiten einer Schar von Arbeitern
194v lenkt – beim Bau einer Pyramide etwa; und wie Worte & Menschen durch Maschinen zu ersetzen wären. Aber es ist auch eine Maschine denkbar⁸² in die man Befehle hineinspricht & die auf dieses System von Einwirkungen durch Befolgung der Befehle reagiert. – Und⁸³ nun kann man fragen: Welches Interesse hat nun dieser Mechanismus für die Philosophie?

195 ⁸⁴Es ist auch sinnvoll⁸⁵ zu sagen, ohne den Gebrauch des Mundes oder der Hände können sich Menschen nicht verständigen.

⁸⁶Die Worte, die Einer bei gewisser Gelegenheit sagt, sind insofern nicht willkürlich, als gerade *diese* in der Sprache, die er sprechen will (oder muß),⁸⁷ das meinen, was er sagen will; d.h., als gerade für sie diese grammatischen Regeln gelten. Was er aber meint, d.h. das

67 (M): /

68 (V): Farben

69 (M): J

70 (V): wäre – wie ich oben gesagt habe – ein der Fall

71 (M): ? / ///

72 (V): Richtung ~~auf~~

73 (V): mit der Hand in der

74 (V): Fuß

75 (O): dieser

76 (V₁): hier reagieren wie ein Verstehender. (V₂):
hier auf das Zeichen reagieren wie ein Verstehender.

77 (M): ? / /// /

78 (M): ? /

79 (V): Sprache? Nicht: Ohne

80 (M): /

81 (M): / ///

82 (V): denkbar ~~die auf~~

83 (V): reagiert. – ~~Welches~~ Und

84 (M): / ✓

85 (V): richtig

86 (M): ///

87 (O): muß

⁵¹It's clear that the following statement, e.g., stems from a confusion: Grammar has to speak of four primary colour words⁵² because there are four primary colours. As if that were comparable to: Astronomy has to talk about four moons of Jupiter because there are four moons of Jupiter.

⁵³So one can say, grammar can't be justified by reality. But that it can't be justified as part of a psychological mechanism is a different proposition.

In fact this very case – that grammar could be justified by psychological discoveries – is conceivable if⁵⁴ the English language, for example, turned out to be the only one that a human could learn. But this justification doesn't interest us.

⁵⁵Thus someone might understand the indication of a direction⁵⁶ (say, of the one in which he is supposed to go) only if it were carried out in the usual way by hand or by an arrow, but⁵⁷ not if one were to point in that direction with an elbow.⁵⁸ And here "understanding" means reacting to the sign in a specific way.⁵⁹

⁶⁰The purpose of grammar is nothing other than the purpose of language.
The purpose of grammar is the purpose of language.

⁶¹Whence the significance of language? Can one say: "Without⁶² language we couldn't communicate with each other"? No, that's not like: Without a telephone we couldn't speak from America to Europe. (Unless by "telephone" we understand any device that etc., etc.)

Without language we couldn't exchange thoughts. Well, what does "exchanging thoughts" mean, anyway? And by the way, what does "reading thoughts" mean?

⁶³But we can say: Without language we couldn't influence people. Or console them. Or build houses and machines.

Without language we couldn't get people to do our will.

⁶⁴Let's think about how someone uses language to direct the activities of a number of workers – say, when building a pyramid; and how words and people could be replaced by machines. But we can also imagine a machine into which⁶⁵ one speaks commands and which reacts to this system of inputs by obeying the commands. – And then one can ask: Of what⁶⁶ interest is this mechanism to philosophy?

⁶⁷It also makes sense⁶⁸ to say that people can't communicate without using their mouths or their hands.

⁶⁹The words that someone utters on a specific occasion are not arbitrary, in so far as it is just *these* words that mean what he wants to say in the language that he wants (or has) to speak; i.e. in so far as these grammatical rules apply precisely to these words. And what he

51 (M): /

52 (V): primary colours

53 (M): J

54 (V): conceivable – as I said above – if

55 (M): ? / ///

56 (V): direction ~~only~~

57 (V): by hand, but

58 (V): with a foot.

59 (V₁): reacting as one does who understands.

(V₂): reacting to the sign as one does who understands it.

60 (M): ? / ///

61 (M): ? /

62 (V): language? Not: "Without

63 (M): /

64 (M): / ///

65 (V): machine ~~from which~~

66 (V): commands. – ~~Of what~~

67 (M): / ✓

68 (V): It is also correct

69 (M): ///

grammatische Spiel, das er spielt, ist insofern nicht willkürlich, als er etwa seinen Zweck nur so glaubt erreichen zu können.

194v ⁸⁸Die Sprache mit den Bärten von Schlüsseln zu vergleichen. Ebenso kann ich sie aber auch mit der Perforation der Pianolarolle vergleichen.

195 ⁸⁹Man kann sagen, daß die gramm. R. den Bau der Spr. beschreiben; ihre Möglichkeiten beschreiben.

⁹⁰Wie wäre es wenn ein Mensch *die* Sprache erfände wie man eine Maschine erfindet? Könnte er denn nicht das Abrichten von Tieren oder Menschen erfinden, entdecken, daß⁹¹ sie auf gewisse Signale reagieren & dies dazu benützen sie gewisse Arbeiten verrichten zu lassen?

Wenn ich aber eine Notation erfinde so ist das eine „Erfindung“ in einem andern Sinn des Wortes.

⁹²Uns interessiert die Sprache als Phänomen, nicht als die Maschine, die einen bestimmten Zweck erfüllt.

⁹³Sprache ist für uns: die deutsche Sprache, die englische Sprache, etc., etc. & ähnliche Systeme.

⁹⁴Warum interessiert uns aber das Phänomen der Sprache? Gewisser Mißverständnisse halber. – Aber was sind Mißverständnisse?

Worin besteht das Sich-nicht-auskennen? Es findet scheinbar ja auch⁹⁵ seinen Ausdruck in der Sprache.

194v ⁹⁶Könnte sich die Philosophie auch für andere Mechanismen als den der Sprache interessieren? Denken wir es würde uns beunruhigen, daß Handgriffe, deren Verrichtungen ganz verschieden,⁹⁷ gleich geformt sind. Wäre es nicht auch eine Philosophische Tat die gleichen Handgriffe durch verschiedene zu ersetzen. Denken wir an die Handgriffe beim Automobil: das Volant,⁹⁸ eine Pumpe, einen Hahn, die Bremse, etc. Könnte es nicht einen Menschen stutzig machen⁹⁹ daß man aus einem Rohr Flüssigkeit stetig erhalten¹⁰⁰ kann indem man eine einzige Bewegung macht (einen Hahn aufdreht) & aus einem andern nur, indem man einen Handgriff solange bewegt als man Flüssigkeit erhalten will (Pumpe)?

88 (M): a ? / ///

89 (M): ¿ ///

90 (M): ¿ ///

91 (V): erfinden, daß

92 (M): ¿ ///

93 (M): ¿ ///

94 (M): ¿ ///

95 (V): Es findet ja auch

96 (M): ¿

97 (V): verschieden, ~~sind~~

98 (O): Volla,

99 (V): Menschen beunruhigen

100 (V): Flüssigkeit erhalten

means, i.e. the grammatical game he is playing, is not arbitrary, in so far as he may believe that this is the only way to achieve his purpose.

⁷⁰Language can be compared to the wards of keys. But I can equally well compare it to the perforations on a pianola's cylinder.

⁷¹One can say that grammatical rules describe the structure of language; describe its possibilities.

⁷²What would it be like if someone invented *language*, as one invents a machine? Couldn't he invent the training of animals or of humans, discover that⁷³ they react to certain signals, and use this to have them perform certain chores?

But if I invent a notation, this is an "invention" in a different sense of the word.

⁷⁴We're interested in language as a phenomenon, not as a machine that fulfils a particular purpose.

⁷⁵For us language is: the German language, the English language, etc., etc., and similar systems.

⁷⁶But why are we interested in the phenomenon of language? Because of certain misunderstandings. – But what are misunderstandings?

What does not-knowing-one's-way-about consist in? Seemingly, it⁷⁷ also finds expression in language.

⁷⁸Could philosophy also take an interest in mechanisms other than that of language? Let's imagine that it bothered us that handles that do entirely different things were shaped the same way. Wouldn't it also be a philosophical task to replace the identical handles with different ones? Let's think about the handles of a car: the steering wheel, a pump, a tap, the brake, etc. Mightn't it puzzle⁷⁹ someone that from one pipe you can get a steady stream⁸⁰ of liquid with a single motion (by turning on a tap) and from another you get the liquid only by moving a handle for as long as you want (a pump)?

70 (M): a ? / ///

71 (M): ∫ ///

72 (M): ∫ ///

73 (V): humans, that

74 (M): ∫ ///

75 (M): ∫ ///

76 (M): ∫ ///

77 (V): in? It

78 (M): ∫

79 (V): bother

80 (V): a stream

196

Die Sprache funktioniert als Sprache nur durch die Regeln, nach denen wir uns in ihrem Gebrauch richten, wie das Spiel nur durch seine Regeln ein Spiel ist.

¹Das ist insofern nicht richtig, als für die Sprache keine Regeln *niedergelegt* sein müssen; sowenig wie für's Spiel. Aber man kann die Sprache (& das Spiel) vom Standpunkt eines Vorgangs nach Regeln betrachten.

195v ²Grammatik besteht aus Vereinbarungen; andererseits kann die Sprache Teil³ eines Mechanismus sein. Wie tritt nun das, was einer Vereinbarung entspricht, in einen Mechanismus, z.B. das Pianola, ein? Nun eine Vereinbarung ist doch z.B. eine Tabelle & eine Tabelle könnte ganz gut auch Teil eines Mechanismus von der Art des Pianolas⁴ sein.

⁵Warum interessiere ich mich denn so sehr für die Sprache? Kann man einen Grund dafür angeben, oder ist es eben eine Tatsache deren Ursachen mich einfach nicht interessieren?

Und könnten Bilder nicht als Befehle⁶ verwendet werden? und warum sollte ich mich nicht für Bilder interessieren, wenn sie im menschlichen Leben eine überragende Rolle spielen würden?

⁷Und könnten philosophische Probleme, Beunruhigungen, auch in gemalten⁸ Bildern entstehen? So etwas ließe sich schon ausdenken.

196 ⁹Wie, wenn eine Sprache aus lauter einfachen und unabhängigen Signalen bestünde?! Denken wir uns diesen Fall: Es handle sich etwa um die Beschreibung einer Fläche, auf der in schwarz und weiß sich allerlei Figuren zeigen können. Wäre es nun möglich, alle möglichen Figuren durch unabhängige Symbole zu bezeichnen?¹⁰ (Ich nehme dabei an, daß ich nur über, sagen wir 10000 Figuren reden will.) Wenn ich Recht habe, so muß die ganze Geometrie in den Regeln über die Verwendung dieser 10000 Signale wiederkehren. (Und zwar ebenso, wie die Arithmetik, wenn wir statt 10 unabhängiger Zahlzeichen eine Billion verwendeten.)

¹¹Um eine Abhängigkeit auszudrücken, bedarf es einer Abhängigkeit.

1 (M): ✓

2 (M): ? / / / /

3 (V): teil

4 (O): Pianola

5 (M): ? /

6 (V): Befehle ~~gebra~~

7 (M):]

8 (V): gezeichneten

9 (M): / / /

10 (V): kennzeichnen?

11 (M): XXX

Language Functions as Language only by Virtue of the Rules We Follow in Using it, just as a Game is a Game only by Virtue of its Rules.

¹That is not correct, in so far as no rules have to have been *laid down* for language; no more than for a game. But one can look at language (and a game) from the standpoint of a process that uses rules.

²Grammar consists of arrangements; on the other hand, language can be part of a mechanism. Now how does something corresponding to an arrangement enter into a mechanism, for example, a pianola? Well, a chart, for example, is an arrangement, and a chart could easily be part of a pianola-type mechanism.

³Why am I so interested in language? Can a reason be given, or is it simply a fact whose causes just don't interest me?

And couldn't pictures be used as commands? And why shouldn't I be interested in pictures if they were to play a paramount role in human life?

⁴And could philosophical problems, concerns, originate in painted pictures⁵ as well? Something like that *could* be imagined.

⁶What if a language consisted of nothing but simple and independent signs?! Imagine this case: It's a matter of describing a surface on which a variety of figures can appear in black and white. Now would it be possible to refer to⁷ all possible figures using independent symbols? (Here I'm assuming that I only want to talk about, say, 10,000 figures.) If I'm right, then all of geometry has to recur in the rules for the use of these 10,000 signs. (And it would have to recur in the same way as would arithmetic if, instead of 10 independent numerical symbols, we used a trillion.)

⁸To express a dependence you need a dependence.

1 (M): ✓
2 (M): ? / ///
3 (M): ? /
4 (M): J

5 (V): in drawings
6 (M): ///
7 (V): to designate
8 (M): XXX

¹²Denken wir uns ein Tagebuch mit Signalen geführt. Etwa die Seite in Abschnitte für jede Stunde eingeteilt und nun heißt „×“ ich schlafe, „|“ ich stehe auf, „┌“ ich schreibe, etc.¹³

197 ¹⁴Muß denn nicht die Regel der Sprache – daß also dieses Zeichen *das* bedeutet – irgendwo niedergelegt sein?

Freilich auch: *Mehr* als die Regel niederlegen, kann ich nicht.

Ist die Regel niedergelegt, so ist es eben eine andere Sprache, als wenn sie nicht niedergelegt ist.

196v ¹⁵„Contract¹⁶ sociale“ auch hier ist in Wirklichkeit *kein* Vertrag geschlossen worden; aber die Situation ist¹⁷ mehr oder weniger ähnlich, analog, der in welcher wir wären, wenn. . . . Und sie ist mit großem Nutzen¹⁸ unter dem Gesichtspunkt eines solchen Vertrages zu betrachten.

197 ¹⁹Und warum soll ich, daß „×“ in dieser Zeile steht, nicht ein Bild dessen nennen, daß ich dann schlafen gehe? Freilich, daß es die Multiplizität dessen wiedergeben soll die in jenen Worten liegt, kann ich nicht verlangen.

Der Akt des Schlafengehens war ja auch nicht dadurch bestimmt.

Denken wir, ich zeichne einen Sitzplan,

+	+
+	++

²⁰ist ein Kreuzchen das Bild eines Menschen oder nicht? –

²¹Wie kann ich denn kontrollieren, daß es immer dasselbe ist, was ich „×“ nenne. Es sei denn, daß ich etwa ein Erinnerungsbild zuziehe. Das aber dann zum Zeichen gehört.

²²Wenn z.B. Einer fragte: wie weißt Du, daß Du jetzt dasselbe tust wie vor einer Stunde, und ich antwortete: ich habe mir's ja aufgeschrieben, hier steht ja ein „×“!

²³Wenn ich mich in *dieser* Sprache ausdrücke, so werde ich also mit „┌“ immer dasselbe meinen. Es kann keinen²⁴ Sinn haben, zu sagen, daß ich beide Male dasselbe tue, wenn ich den Befehl „┌“ befolge (oder dasselbe getan habe, als ich tat, was ich durch „┌“ bezeichnete).
┌ = ┌

198 ²⁵D.h. die Sprache funktioniert als Sprache nur durch die Regeln, nach denen wir uns in ihrem Gebrauch richten. (Wie das Spiel nur durch Regeln als Spiel funktioniert.)

²⁶Und zwar, ob ich zu mir oder Andern rede. Denn auch mir teile ich nichts mit, wenn ich Lautgruppen ad hoc mit irgend welchen Fakten associiere.

197v ²⁷Ich könnte auch sagen, daß, wenn die Zeichen ad hoc erfunden sind, eben ein System eine Regel erfunden werden muß.

198 ²⁸Ich muß, auch wenn ich zu mir rede, schon auf einem bestehenden²⁹ Sprachklavier spielen.

12 (M): ✓

13 (E): Statt der Symbole ×, |, und ┌ setzt Wittgenstein in TS 213 die Buchstaben A, B und C. Wir haben hier auf die Symbole zurückgegriffen, die MS 110 (S. 208) entstammen.

14 (M): ////

15 (M): ✓ /

16 (O): „Contract

17 (V): ist ~~ähnlich~~

18 (V): Nutzen ~~von Ge~~

19 (M): ////

20 (F): TS 212, S. 600.

21 (M): / ///

22 (M): ┌ ✓

23 (M): ┌ ✓

24 (V): einen

25 (M): ? / ✓ ///

26 (M): ┌ / /// ✓

27 (M): ✓ ///

28 (M): ┌ / ✓ ///

29 (V): gegebenen

⁹Let's imagine a diary kept in signs. For instance, each page is subdivided into portions for each hour and "×" means I'm sleeping, "|" I'm getting up, "┌" I'm writing, etc.¹⁰

¹¹Doesn't a rule of language – i.e. that this sign means *this* – have to be laid down somewhere?

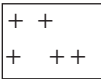
To be sure, though: I can't do *more* than lay down the rule.

When the rule is laid down, it's just a different language from when it isn't.

¹²"*Contrat sociale*" – here too, *no* actual contract was ever concluded; but the situation is more or less similar,¹³ analogous, to the one we'd be in, if. . . . And there's much to be gained in viewing it in terms of such a contract.

¹⁴And why shouldn't I call the fact that "×" is written on this line a picture of my going to sleep then? To be sure, I can't expect that it will reproduce the multiplicity of what is contained in those words.

After all, the act of going to sleep was not determined by my diary.

Let's imagine that I draw a seating plan.  ¹⁵Is a little cross a picture of a person, or not? –

¹⁶How can I verify that what I call "×" is always the same thing? Unless I bring in, say, a memory-image. But then that is part of the sign.

¹⁷If someone were to ask, for instance: How do you know that you are now doing the same thing as an hour ago, and I were to answer: Because I wrote it down – there's an "×" here!

¹⁸If I express myself in *this* language, I'll always mean the same thing by "┌". It can't make sense¹⁹ to say that I do the same thing both times when I obey the command "┌" (or did the same thing when I did what I designated by "┌").

┌ = ┌

²⁰That means that language functions as language only by virtue of the rules we follow in using it. (Just as a game functions as a game only by virtue of its rules.)

²¹And this holds, as a matter of fact, regardless of whether I talk to myself or to others. For neither do I communicate anything to myself if I just associate groups of sounds with random facts on an *ad hoc* basis.

²²I could also say that if the signs have been invented *ad hoc*, then a system, a rule, has to be invented.

²³Even when I'm talking to myself, I have to be playing on an existing²⁴ language-piano.

9 (M): ✓

10 (E): In TS 213 Wittgenstein uses A, B, and C, instead of the symbols ×, |, and ┌. We have taken these symbols from the corresponding passage in MS 110 (p. 208).

11 (M): ////

12 (M): ✓ /

13 (V): is *similar*,

14 (M): ////

15 (F): TS 212, p. 600.

16 (M): / ///

17 (M): ┌ ✓

18 (M): ┌ ✓

19 (V): It can make sense

20 (M): ? / ✓ ///

21 (M): ┌ / /// ✓

22 (M): ✗ ///


23 (M): ┌ / ✓ ///

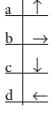
24 (V): on a given

197v ³⁰Man kann sagen: die Grammatik *erklärt* die Bedeutungen der Zeichen & dadurch macht sie die Sprache bildhaft.

Man würde nicht sagen daß ich aus den Signalen im Tagebuch die Ereignisse eines Tages *ableiten* kann d.h. z.B. Bilder nach den³¹ Aufzeichnungen entwerfen kann, wenn zu den Signalen nicht noch eine Erklärung tritt.

Es handelt sich um den Begriff des *Ableitens*. Man spricht vom Ableiten wo eine allgemeine³² Regel, also ein Ausdruck einer solchen Regel, gegeben ist.

Wir würden³³ nämlich nicht sagen aus a b b c ließe sich die Figur  ableiten wohl aber aus abbc & der Tabelle

Die Erklärung der Bedeutung  bestimmt wie ein Wort beim portraituren eines Sachverhalts zu verwenden ist.

198v ³⁴Man kann sagen: die Grammatik bestimmt die Bedeutg. der Wörter & bestimmt ihnen damit den Platz den sie beim Portraituren eines Sachverhaltes einnehmen dürfen. Denn wonach richte ich mich wenn ich hier „rot“ & nicht „gelb“ verwende, hier „aber“³⁵ & nicht „oder“? Doch wohl nach der Bedeutg. der Wörter nach dem was in Übereinkommen über sie in der³⁶ Grammatik festgehalten ist; denn warum sollte ich sonst das eine Wort dem andern vorziehen.

198 ³⁷„Ich verstehe diese Worte“ (die ich etwa zu mir selbst sage), „ich meine etwas damit“, „sie haben einen Sinn“ muß immer dasselbe heißen wie: „sie sind nicht ad hoc erfundene Laute, sondern Zeichen aus einem vorbereiteten System“³⁸. Aber da könnte man fragen: Tut es jedes System? Ist es nicht eben das System unserer Sprache was ich meine? Ich spiele ein Spiel mit ihnen. [d.h. ein schon bestehendes Spiel.]

³⁹Etwa, wie die Teilstriche auf einem Maßstab nur solche sind, wenn sie ein System bilden.

⁴⁰Denn, wenn wir einen Befehl befolgen, so deuten wir die Worte nicht willkürlich.

D.h. wieder, wir müssen die Unterscheidung anerkennen zwischen dem „Befolgen eines Befehls“ und einem „willkürlichen Zuordnen einer Handlung“.

⁴¹Das Aussprechen eines Satzes wäre kein Portraituren, wenn ich meine Worte nicht aus einem System wählte, so daß man sagen kann, ich wähle *sie* im Gegensatz zu anderen.

199 Aber die Worte, wenn sie nicht in einem grammatischen System stehen, sind ja alle gleichwertig und also wäre es dann ganz gleichgültig,⁴² welche ich wählte, ja, – man könnte sagen – als Worte würden sie sich (dann) voneinander gar nicht unterscheiden.

Man muß die Worte wählen, in demselben Sinne wie man⁴³ die Striche und Farben wählt, mit denen man einen Körper abbildet.

⁴⁴Warum wir ein Wort – und nicht ein anderes – an dieser Stelle gebrauchen, erfahren wir, wenn wir jemand fragen: warum gebrauchst Du hier das Wort A. Die Antwort wird sein: das und das heißt A. Und das ist eine Regel der Grammatik, die die Position des Wortes in der Sprache bestimmt.⁴⁵ Und (zum Zeichen, daß es sich hier wirklich um Grammatik

30 (M): ✓ ///

31 (V): dem

32 (V): Allgemeine

33 (V): werden

34 (M): ///

35 (V): verwende – „aber“

36 (V): was in der

37 (M): } } ? / ///

38 (M): [Zeichen, über die eine Konvention besteht?]

39 (M): } ///

40 (M): } ? } } ✓

41 (M): } ✓

42 (V): dann gleichgültig,

43 (V): wählen, wie man


44 (M): ///

45 (V): bestimmt. ~~Und~~

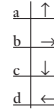
²⁵One can say: Grammar *explains* the meanings of the signs and thereby makes language pictorial.

One wouldn't say that I can *deduce* the events of a day from the signs in my diary, i.e. that I can draw pictures based on the entries, unless an explanation were added to the signs.

It's a matter of the concept of *deduction*. We talk about deduction where a general rule, i.e. an expression of such a rule, is given.

For we wouldn't²⁶ say that the figure  can be *deduced* from *abbc*, but we would say that it certainly can be deduced from *abbc* plus the table

The explanation of its meaning determines how a word is to be used in portraying a state of affairs.



²⁷One can say: Grammar determines the meaning of words, and in so doing determines the place they are allowed to occupy when they portray a state of affairs. For what am I taking as a guideline when I use "red" and not "yellow" here, and "but"²⁸ rather than "or" there? Surely the meaning of the words, what has been agreed about them and has been established in grammar. For why else should I prefer one word to another?

²⁹"I understand these words" (which I say to myself, for instance), "I mean something by them", "They make sense", must always mean the same as: "They are not sounds invented *ad hoc* but signs from a prepared system"³⁰. But here one could ask: Will *any* system do? Isn't what I mean the system of our language? I play a game with the signs. [That is, an already existing game.]

³¹As₂ say, the graduation marks on a measuring stick are such marks only if they form a system.

³²For in obeying a command we don't interpret the words arbitrarily.

That is, once again we have to acknowledge the distinction between "obeying a command" and an "arbitrary pairing of an action with words".

³³Uttering a sentence wouldn't be a portrayal if I didn't choose my words from a system, so that it can be said that I choose *them* as opposed to others.

For words are all of equal value if they're not situated in a grammatical system; if they weren't it would be completely irrelevant³⁴ which ones I chose. Indeed – one could say – as words they wouldn't (then) differ from each other at all.

We have to choose words in the same sense as³⁵ we choose the lines and colours with which we portray a body.

³⁶We find out why we use one word at a particular point – and not another – when we ask someone: Why are you using the word "A" here? The answer will be: "A' means such and such". And that is a rule of grammar, which determines the position of the word in

25 (M): ✓ / / / /

26 (V): ~~won't~~

27 (M): / / /

28 (V): here – "but"

29 (M): ∫ ∫ ? / / / /

30 (M): system [signs, about which there is a convention?]

31 (M): ∫ / / /

32 (M): ∫ ? ∫ ∫ ✓

33 (M): ∫ ✓

34 (V): be irrelevant

35 (V): words as

36 (M): / / /

handelt) wenn A das Wort „und“ gewesen wäre, so könnte man weiter nichts tun, als die Regeln für „und“ angeben.

⁴⁶Sage ich jemandem „bringe eine rote Blume“ und er bringt eine, und nun frage ich „warum hast Du mir eine von dieser Farbe gebracht?“ – und er: „diese Farbe heißt doch ⁴⁷ ‚rot‘ “: so ist dies Letzte ein Satz der Grammatik. Er rechtfertigt eine Anwendung des Worts.

198v ⁴⁸Zusammenhang der Grammatik mit der Bildhaftigkeit der⁴⁹ Sprache.

199 ⁵⁰Fehlt diese Regel,⁵¹ so ist die Grammatik des Worts (seine Bedeutung) eine andere.

⁵²Wenn man einen Satz braucht, so muß er schon irgendwie *funktionieren*. Das heißt, man gebraucht ihn nicht, um einer Tatsache einen Lärm beizuordnen.

198v ⁵³Wir *vergleichen* den tatsächlichen Vorgang mit dem in welchem die Rechtfertigung ausgeführt ist.

⁵⁴Wir ergänzen das tatsächlich Ausgeführte zu einem bestimmten Kalkül, um es dadurch zu beleuchten. Ähnlich wie die Grammatik einen elliptischen⁵⁵ Satz zu einem vollständigen⁵⁶ ergänzt, d.h. ein gewisses Gebilde als elliptischen⁵⁷ Satz auffaßt.

199 ⁵⁸Es wäre doch nicht, einen Tatbestand porträtieren, wenn ich etwa beliebige Striche auf das Papier kritzelte und sagte „es gibt gewiß eine Projektionsmethode, die diesen Tatbestand in diese Zeichnung projiziert“.⁵⁹

200 ⁶⁰Ja auch hier (beim Porträtieren⁶¹) fühle ich mich schon beim ersten Strich verpflichtet – d.h. er ist nicht willkürlich. Jedenfalls aber fängt das *Bild* erst dort an, wo die Verpflichtung anfängt.

199v ⁶²Wenn ich die Achsel zucke, könnte man da sagen: ich meine etwas damit? Gewiß,⁶³ es könnte mich doch jemand fragen: „hast Du mit der Achsel nur zufällig gezuckt⁶⁴ oder hast Du es als Achselzucken gemeint? Und was ist der wesentliche Unterschied zwischen diesen Fällen;⁶⁵ worin besteht es, diese Bewegung als Achselzucken zu *meinen*? Ist es ein besonderes Gefühl was⁶⁶ die Bewegung begleitet? Ist es nicht vielmehr die ganze *Umgebung* in der sie⁶⁷ liegt? Was sozusagen aus ihr folgt, was ich zu ihrer Erklärung sagen würde, oder was ich zu ihrer Ergänzung sage oder denke. Würden wir etwa von der Bedeutung der Meinung des Achselzuckens reden wenn es isoliert von aller andern Ausdrucksweise aufträte?⁶⁸ Sagen wir daß der Hund etwas mit dem Wedeln des Schweifs meint? Wir werden⁶⁹ vielleicht auch da von einer Meinung reden, wenn wir den Fall des Wedelns aus Freude von dem aus einer anderen Ursache unterscheiden wollen, & doch ist das natürlich ein anderer Fall als der, in welchem⁷⁰ das Kriterium der Meinung der Ausdruck einer Sprache ist.

46 (M): ///

47 (V): „diese Farbe nenne ich

48 (M): ✓✓

49 (V): einer

50 (M): ///

51 (V): Fehlt dieser Satz,

52 (M): ↓ ✓ ///

53 (M): ✓

54 (M): ✓

55 (O): eliptischen

56 (O): vollständigen

57 (O): eliptischen

58 (M): /// ✓

59 (O): projiziert.

60 (M): ? / ↓

61 (V): Abbilden

62 (M): v ✓ /

63 (V): Gewiß, ~~man~~

64 (V): nur gezuckt ~~weil~~

65 (V): ~~Und~~ ~~worin~~ unterscheiden sich diese Fälle;

66 (V): ~~das~~

67 (V): ~~die~~

68 (V): geschähe?

69 (V): werden ~~auch~~ ~~da~~

70 (V): welchem ~~wir~~

language. And³⁷ (as a sign that it really is a matter of grammar here) if “A” had been the word “and”, one could do no more than state the rules for “and”.

³⁸If I tell someone “Bring me a red flower” and he brings me one, and then I ask “Why did you bring me one with this colour?” – and he says: “Well, because this colour is called³⁹ ‘red’”, then this last statement is a grammatical proposition. It justifies a use of the word.

⁴⁰The connection between grammar and the pictorial nature of language.⁴¹

⁴²If this rule⁴³ is missing, then the grammar of the word (its meaning) is different.

⁴⁴When one uses a proposition it must already *function* in some way. That is to say, one doesn’t use it to assign a noise to a fact.

⁴⁵We *compare* the actual process with the one in which the justification has been carried out.

⁴⁶We expand what has actually been carried out into a particular calculus, so as to cast light on it. This is similar to grammar expanding an elliptical sentence into a complete one, i.e. conceiving of a particular structure as an elliptical sentence.

⁴⁷After all, I wouldn’t be portraying a factual situation if, for example, I scribbled random lines on a piece of paper and said “Surely there’s a method of projection that projects that situation into this drawing”.

⁴⁸Indeed, here too (in portraying⁴⁹ something) I already feel committed when I draw the first line – i.e. it isn’t arbitrary. In any case, though, the *picture* begins at the point of commitment – and not before.

⁵⁰If I shrug my shoulders, could it be said that I mean something by this? Certainly. Someone could ask me, after all: “Did you just happen to shrug your shoulders⁵¹, or did you mean it as a shrugging of your shoulders?” And what’s the essential difference between these cases?⁵² What does *meaning* this movement as a shrugging of the shoulders consist in? Is what accompanies the movement, when we mean it this way, a certain feeling? Isn’t it rather the entire *context* in which the movement is situated? What follows from it, so to speak – what I would say to explain it, or what I say or think to complement it? Would we talk about the meaning, the intention of shrugging one’s shoulders, for instance, if it occurred⁵³ in isolation from all other modes of expression? Do we say that a dog means something by wagging its tail? Maybe in this case too we’ll speak of a meaning, if we want to distinguish wagging for joy from wagging for other reasons. But of course that’s a different case from the one in which the criterion of meaning is a linguistic expression.

37 (V): ~~And~~

38 (M): ///

39 (V): “I call this colour

40 (M): ✓ ✓

41 (V): of a language.

42 (M): ///

43 (V): proposition

44 (M): ✓ ✓ ///

45 (M): ✓

46 (M): ✓

47 (M): /// ✓

48 (M): ? /]

49 (V): depicting

50 (M): v ✓ /

51 (V): shoulders ~~because~~

52 (V): ~~And where’s the difference between these cases?~~

53 (V): happened

⁷¹Wir würden kaum fragen, ob das Krokodil etwas damit *meint* wenn es mit offenem Rachen auf einen Menschen⁷² zukommt. Und wir würden erklären, das Krokodil könne nicht denken & darum sei eigentlich hier von einem Meinen keine Rede.

200 ⁷³„Meinen“ ist so vieldeutig wie „Zeichen“⁷⁴ oder das Wort „ausdrücken“⁷⁵.

⁷⁶Wie unterscheidet sich eine Geste von irgend einer anderen Bewegung? Dadurch daß sie etw. ausdrückt? –

⁷⁷Denken wir es würde uns Einer vorschlagen: „Meine einmal mit der Lautreihe ‚ber‘ die Negation, statt mit dem Wort ‚nicht‘ “. ⁷⁸ Wie mache ich das? Besteht es darin daß ich in mir ein bestimmtes Gefühl hervorrufe wenn ich das Wort „ber“ ausspreche?

⁷⁹Man könnte sagen,⁸⁰ daß das Wort je nach der Wortart in einem anderen Sinne „bedeutet“.

⁸¹Wenn das Achselzucken ein Zeichen ist, – kann man es durch ein beliebiges anderes ersetzen? & wie kann man das andere an die Stelle des ersten setzen?

⁸²Ist das Gähnen unbedingt ein *Zeichen* der Langenweile & nicht meist nur⁸³ ein Anzeichen von ihr? Und wie wird etwas zum Zeichen, sagen wir, des Zweifels? Wenn ich etwa von heute an, immer wenn ich im Zweifel wäre statt meinen Kopf zu schütteln mit der Hand wackeln würde (erfahrungsgemäß), würde dann die Handbewegung dadurch zum Zeichen des Zweifels? Und kann man das Gähnen auch *meinen*?

200v ⁸⁴Kann man sagen der Unterschied zwischen dem Gähnen & dem Achselzucken ist Unwillkürlichkeit & Willkürlichkeit?

⁸⁵Oder könnte man eine Gebärde, für die es Sinn hat zu sagen, ich trachtete sie nicht zu machen aber mein Körper hat gegen meine Anstrengung sie gemacht, könnte man diese Gebärde auch *meinen* wenn sie in diesem Sinne gegen den Willen geschieht?

⁸⁶Wenn ich mich kratze, nenne ich das ein Zeichen, daß es mich juckt? Gewiß, ich *kann* es als Zeichen dafür gebrauchen, aber auch nicht.

⁸⁷Ich kann in einem Gespräch ein⁸⁸ trauriges Gesicht machen als *Zeichen* der Trauer aber es kann auch nur ein Anzeichen sein. Worin besteht es nun in *diesem* Falle das Gesicht als *Zeichen* der Trauer zu verziehen? Ich würde sagen: „ich habe es absichtlich getan & ihm auch“⁸⁹

⁹⁰Kann ich alle die⁹¹ Gesten die bei uns⁹² im Zusammenhang mit der Sprache stehn, mir auch ohne diesen Zusammenhang richtig vorstellen?⁹³ Würde ich sie außer diesem Zusammenhang auch Zeichen nennen?

71 (M): v ✓ /

72 (V): auf ~~uns~~

73 (M): ? / XXX

74 (V): wie „ein Zeichen geben“

75 (O): „ausdrucken

76 (M): ½ ? / XXX

77 (M): ¾ v ✓ // ///

78 (V): „Meine einmal mit ~~dem Wort~~ ‚ber‘ die Negation ‚nicht‘“.

79 (M): v ✓ ///

80 (V): Es ist zu bedenken,

81 (M): ¾ / XXX

82 (M): v / XXX

83 (V): nicht nur

84 (M): ///

85 (M): ✓

86 (M): ✓ ///

87 (M): ✓ ///

88 (V): kann ein

89 (E): Satz nicht vollendet.

90 (M): ✓ ///

91 (V): ich die

92 (V): mir

93 (V₁): diesen Zusammenhang denken? (V₂): Ich kann mir kaum alle die Gesten . . . stehn, auch ohne diesen Zusammenhang denken // richtig vorstellen.

⁵⁴We'd hardly ask whether a crocodile *means* something when it approaches a person⁵⁵ with its jaws wide open. And we'd explain that the crocodile can't think, and so here it's really not a matter of meaning at all.

⁵⁶"To mean" is as ambiguous as "sign"⁵⁷ or "to express".

⁵⁸How does a gesture differ from some other movement? In that it expresses something? –

⁵⁹Suppose someone were to suggest to us: "Try meaning negation using the sound sequence 'ber' instead of the word 'not'".⁶⁰ How do I do that? By evoking a particular feeling in myself when I utter the word "ber"?

⁶¹One could say⁶² that a word "has meaning" in different senses, depending on the *kind* of word it is.

⁶³If shrugging one's shoulders is a sign – can you arbitrarily replace it with a different one? And how can you put that in place of the first?

⁶⁴Is yawning necessarily a *sign* of boredom, and not just a symptom of it? And how does something come to be a sign, let's say of doubt? If, e.g., starting today I were to wiggle my hand (as I sometimes do) instead of shaking my head whenever I was in doubt, would that hand movement thereby turn into a sign of doubt? And can one also *mean* a yawn?

⁶⁵Can one say that the difference between yawning and shrugging one's shoulders is that between involuntariness and voluntariness?

⁶⁶Or take a gesture of which it makes sense to say that I didn't intend to make it, but my body made it in spite of my efforts: if in this sense it occurs against one's will, could one also *mean* this gesture?

⁶⁷When I scratch, do I call this a sign that I itch? To be sure, I *can* use it as a sign for this, but I don't have to.

⁶⁸In a conversation I can make a sad face as a *sign* of sadness, but it can also be just a symptom.⁶⁹ Now in *this* case what does contorting one's face as a *sign* of sadness consist in? I would say: "I did it on purpose and also . . . to him"⁷⁰

⁷¹All the gestures that are connected with our language: Can I imagine them accurately without that context?⁷² Outside this context would I still call them signs?

54 (M): v ✓ /

55 (V): approaches ~~es~~

56 (M): ? / XXX

57 (V): as "giving a sign"

58 (M): ↓ ? / XXX

59 (M): ÷ v ✓ // ///

60 (V): "Try using ~~the word~~ the sound sequence 'ber' to mean the negation 'not'."

61 (M): v ↓ ///

62 (V): We ought to consider

63 (M): ÷ / XXX

64 (M): v / XXX

65 (M): ///

66 (M): ↓

67 (M): ↓ ///

68 (M): ↓ ///

69 (V): I can make a sad face as a *sign* of sadness, but it can also be just a symptom.

70 (E): Sentence incomplete in TS.

71 (M): / ✓ ///

72 (V₁): conceive of them without that context?
(V₂): I can barely imagine // get an accurate mental picture of // all those gestures that are connected with my language without that context.

⁹⁴Man sagt: die Henne lockt ihre Jungen durch Glucken,⁹⁵ – aber liegt dem nicht schon die Vorstellung unserer Sprache zugrunde? Wird nämlich der Aspekt nicht ganz verändert indem man sich vorstellt durch irgend eine⁹⁶ Physikalische Einwirkung ziehe das Glucken die Kücklein zur Henne?

⁹⁷Wenn aber im Fall der menschlichen Sprache gezeigt würde, daß das Wort „komm zu mir“ auf die Menschen eine Anziehung im physikalischen Sinne bewirkt, würde damit die Sprache den Charakter der Sprache verlieren?

⁹⁸Ich will doch immer wieder sagen der Apparat unserer Sprache, unserer Wortsprache, ist⁹⁹ *vor allem* das was wir Sprache nennen, & dann anderes nach seiner Analogie oder Vergleichbarkeit mit ihr.

¹⁰⁰Wir benützen das Wort „Sprache“, „Meinen“, etc. nach sehr verschiedenen Kriterien.

201 ¹⁰¹Und das Achselzucken ist natürlich gar nicht wesentlich verschieden von einem Wort, ja einem Satz, etwa: „Ich weiß nicht!“ oder „Weiß Gott!“. Diese Worte können gewiß so unwillkürlich ausgesprochen werden wie eine Geste gemacht werden kann.

¹⁰²Die Zeichen, will¹⁰³ ich sagen, haben ihre Bedeutung nicht durch das was sie begleitet, noch durch das, was sie hervorruft, sondern¹⁰⁴ durch ein System dem sie zugehören wovon aber beim Aussprechen des Worts nichts andres als dieses Wort vorhanden sein braucht.¹⁰⁵

94 (M): v ✓ /

95 (V): sagt: der Hahn ruft die Hühner durch sein Krähen herbei,

96 (V): eine ~~Me~~

97 (M): v ✓ / (V): ~~Lernen der Sprache als ein Abrichten~~

98 (M): v ✓ /

99 (V): sagen unsere Sprache, unsere Wortsprache, ist

100 (M): ///

101 (M): ///

102 (M): ///

103 (V): wollte

104 (V): Bedeutung nicht durch etwas was sie begleitet; sondern

105 (R): [siehe Notizbuch]

⁷³We say: A hen clucks to call its young⁷⁴ – but isn't this already based on a conception we have of our language? For isn't the aspect changed completely if we imagine that the clucking draws the chicks to her because of some physical influence?

⁷⁵But if it were shown in the case of human speech that the words "come here" effect an attraction (in a physical sense) on humans, would language thereby lose the character of language?

⁷⁶I want to say over and over again that *primarily* it is the apparatus of our⁷⁷ language, our word-language, that we call language; and only then do we call other things language, depending on their analogy or comparability to word-language.

⁷⁸We use the words "language", "to mean", etc., according to very different criteria.

⁷⁹And of course shrugging one's shoulders is not so very different from a word, indeed a sentence, such as "I don't know!" or "Who knows!". To be sure, these words can be uttered just as involuntarily as a gesture can be made.

⁸⁰I want⁸¹ to say that signs have their meanings neither by virtue of what accompanies them,⁸² nor because of what evokes them – but by virtue of a system to which they belong – one, however, in which when a word is uttered nothing need be present other than that word.⁸³

73 (M): v ✓ /

74 (V): say: A cock crows to call the hens

75 (M): v ✓ / (V): ~~Learning language as a training~~

76 (M): v ✓ /

77 (V): it is our

78 (M): ///

79 (M): ///

80 (M): ///

81 (V): wanted

82 (V): by something that *accompanies* them,

83 (R): [See notebook]

Funktionieren des Satzes an einem Sprachspiel erläutert.¹

²Ich halte meine Wange, und jemand fragt, warum ich es tue und ich antworte: „Zahnschmerzen“. Das heißt offenbar dasselbe, wie „ich habe Zahnschmerzen“, aber weder stelle ich mir die fehlenden Worte im Geiste vor, noch gehen sie mir im Sinn irgendwie ab. „Daher ist es auch möglich, daß ich die Worte³ „ich habe Zahnschmerzen“ in dem Sinne ausspreche, als sagte ich nur das letzte Wort oder, als wären die drei nur⁴ ein Wort“.

(Elliptischer⁵ Satz. Was tut die Grammatik, wenn sie sagt: „Hut und Stock!“ heißt eigentlich „gib mir meinen Hut und meinen Stock!“)

⁶Ein einfaches Sprachspiel ist z.B. dieses: Man spricht zu einem Kind (es kann aber auch ein Erwachsener sein), indem man das elektrische Licht in einem Raum andreht: „Licht“, dann, indem man es abdreht: „Finster“; und tut das etwa mehrere Male mit Betonung und variierenden Zeitlängen. Dann geht man etwa in das Nebenzimmer, dreht von dort aus das Licht im ersten an und bringt das Kind dazu, daß es mitteilt: „Licht“, oder: „Finster“.⁷

Soll ich da nun „Licht“ und „Finster“ „Sätze“ nennen? Nun, wie ich will. – Und wie ist es mit der „Übereinstimmung mit der Wirklichkeit“?

⁸Wenn ich bestimmte einfache Sprachspiele⁹ beschreibe, so geschieht es nicht, um mit ihnen nach und nach die¹⁰ Vorgänge der ausgebildeten Sprache – oder des Denkens – aufzubauen (Nicod, Russell), was nur zu Ungerechtigkeiten führt, – sondern ich stelle die Spiele als solche hin, und lasse sie ihre aufklärende Wirkung auf die besonderen Probleme ausstrahlen.

¹¹Man könnte aber¹² sagen: „die Worte ‚Licht‘, ‚Finster‘ sind hier als Sätze gemeint und sind nicht einfach Wörter“. Das heißt, sie sind hier nicht so gebraucht, wie wir sie in der gewöhnlichen Sprache gebrauchen (obwohl wir tatsächlich auch oft *so* sprechen).

Wenn ich¹³ plötzlich ohne sichtbaren Anlaß das Wort „Licht“ isoliert ausspreche, so wird man allerdings sagen: „was heißt das? das ist doch kein Satz“ oder: „Du sagst ‚Licht‘, – was¹⁴ soll's damit?“ Das Aussprechen des Wortes „Licht“ ist in diesem Fall sozusagen noch kein (kompletter) Zug des Spiels, das, wie wir annehmen, der Andre spielt.¹⁵ Ebenso aber auch der Satz „er darf nicht kommen“.

1 (R): ~~VS. 173/3~~ Lernen der Sprache durch Abbrichten.

2 (M): ✓

3 (V): ich den Satz

4 (V): als wäre der ganze Satz nur

5 (O): (Elliptischer

6 (M): ✓

7 (V): daß es mitteilt, ob es licht oder finster ist.

8 (M): ✓

9 (V): Spiele

10 (V): die ~~wirklichen~~

11 (M): ✓

12 (V): ~~eben~~

13 (V): ~~Aber~~ wenn ich

14 (V): „Licht“, – ~~nun~~ was

15 (V): des Spiels, auf das wir gefaßt sind.

The Functioning of a Proposition Explained with a Language-Game.¹

²I hold my cheek, and someone asks why I do this and I answer: “Toothache”. Obviously that means the same thing as “I have a toothache”, but I neither imagine the missing words, nor do I miss them in terms of their meaning. “Therefore it’s also possible that I could utter the words³ ‘I have a toothache’ in *that* sense – as if I were only saying the last word or as if the four words were only *one*.”⁴

(Elliptical sentence. What is grammar doing when it says: “‘Hat and cane!’ actually means ‘Give me my hat and my cane!’”?)

⁵Here, for example, is a simple language-game: Turning on the electric light in a room, you say “light” to a child (but it can also be an adult), then turning it off you say “dark”; and you might do that several times, emphasizing your words and doing it for varying lengths of time. Then you might go into the adjoining room, from there turn on the light in the first room and get the child to tell you “light” or “dark”.⁶

So should I call “light” and “dark” “sentences”? Well, as I like. – And what about their “agreement with reality”?

⁷When I describe certain simple language-games,⁸ I don’t do this so I can use them to construct gradually the⁹ processes of a fully developed language – or of thinking – (Nicod, Russell), for this only results in injustices. – Rather, I present the games as games and allow them to shine their illuminating effects on particular problems.

¹⁰But one could¹¹ say: “Here the words ‘light’, ‘dark’ are meant as sentences and are not simply words.” That is, here they haven’t been used as we use them in ordinary language (although often we really do speak *this way* as well).

If¹² I suddenly utter the word “light”, in isolation, without any discernible reason, then of course someone will say: “What does that mean? That’s no sentence” or “You say ‘light’ – what¹³ about it?”. In this case, uttering the word “light” is, as it were, not yet a (complete) move in the game we assume the other person is playing.¹⁴ But neither is the *sentence* “He’s not allowed to come”.

1 (R): ~~∇ p. 172/3 Learning language through training.~~

2 (M): ✓

3 (V): sentence

4 (V): as if the whole sentence were only *one* word.”

5 (M): ✓

6 (V): tell you whether it is light or dark.

7 (M): ✓

8 (V): games,

9 (V): the ~~real~~

10 (M): ✓

11 (V): One could ~~just~~

12 (V): ~~But if~~

13 (V): ‘light’ – ~~now~~ what

14 (V): move in the game that we are expecting.

203 ¹⁶Wie unterscheidet sich aber¹⁷ „Licht“, wenn es den Wunsch nach Licht ausdrückt, von „Licht“, wenn es konstatiert, daß es im Zimmer licht ist? ¹⁸Daß wir es in jedem Fall anders meinen? Und worin besteht das? In bestimmten Vorgängen, die das Aussprechen begleiten, oder in einem bestimmten Benehmen, das ihm vorangeht, eventuell es begleitet, und ihm folgt? Wir können es einmal in andern Ton aussprechen als das andere mal, oder mit anderer Empfindung (Meinung im andern Sinn). Oder es kommt bloß in einem anderen Spielzusammenhang vor. (Vielleicht antwortet er das einemal auf die Frage was meinst Du: „ich meinte, Du sollst Licht machen“.)¹⁹

202 Denken wir uns die Frage: Wie unterscheidet sich ein Zug im Damespiel von der gleichen Bewegung in Fuchs & Jäger?

²⁰Wenn ein Mann im Ertrinken „Hilfe!“ schreit, – konstatiert er die Tatsache, daß er Hilfe bedarf? daß er ohne Hilfe ertrinken wird? – Dagegen gibt es den Fall, in dem man, quasi sich beobachtend, sagt „ich hätte (oder: habe) jetzt den Wunsch nach . . .“.

203 ²¹Ich sage das Wort „Licht!“ – der Andere fragt mich: „was meinst Du?“ – und ich antworte:²² „Ich meinte, Du sollst Licht machen“. – Wie war das, als ich es meinte? Sprach ich den „kompletten Satz“ in der Vorstellung unhörbar aus, oder den entsprechenden in einer andern Sprache? (Ja, das kann vorkommen oder auch nicht.) Die Fälle, die man alle mit dem Ausdruck „ich meinte“ zusammenfaßt, sind *sehr mannigfach*.

²³Nun kann man ruhig annehmen: „ich meinte, Du solltest Licht machen“ heißt, daß mir dabei ein Phantasiebild von Dir in dieser Tätigkeit vorgeschwebt hat, und ebensogut: der Satz heißt, daß mir dabei die Worte des vollständigen Satzes in der Phantasie gegenwärtig waren, oder, daß eins von diesen beiden der Fall war; – nur muß ich wissen, daß ich damit eine Festsetzung über die Worte „ich meinte“ getroffen habe und eine engere als die ist, welche dem tatsächlichen allgemeinen Gebrauch des Ausdrucks entspricht.

²⁴Wenn das Meinen für uns irgend eine Bedeutung, Wichtigkeit, haben soll, so muß dem System der Sätze ein System der Meinungen zugeordnet sein, *was immer* für Vorgänge die Meinungen sein mögen.²⁵

201v Modepuppen

²⁶Aber reden wir doch nicht vom Meinen als einem unbestimmten & uns nicht genau bekannten²⁷ Vorgang sondern vom (tatsächlichen), „praktischen“, Gebrauch des Wortes von den Handlungen, die wir mit ihm²⁸ ausführen.

Reden wir vom Meinen nur wenn es ein Teil des Sprachkalküls ist (etwa der Teil der aus Vorstellungsbildern²⁹ besteht). Und³⁰ dann brauchen wir eigentlich das Wort „Meinen“ nicht denn das suggests immer, daß es sich um Vorgänge handelt die der Sprache nicht angehören sondern ihr gegenüberstehen & daß es Vorgänge von wesentlich anderer Natur als der sprachlichen sind.

16 (M): ✓

17 (V): nun

18 (M): ✓ /// – folgt?

19 (E): Dieser Satz wurde von uns (nach dem Doppelpunkt), einem Verweis auf die übernächste Bemerkung folgend, ergänzt.

20 (M): ✓ ///

21 (M): ✓ ///

22 (V): sage:

23 (M): ///

24 (M): ✓ ✓ ///

25 (V): sollen.

26 (M): ✓

27 (V): uns unbekanntem

28 (O): ihnen

29 (V): aus Bildern unserer Vorstellung

30 (V): &

¹⁵But how¹⁶ does “light”, when it expresses the desire for light, differ from “light” when it states that it is light in the room? ¹⁷By our *meaning* it differently in each case? And what does that consist in? In certain processes that accompany the utterance, or in a particular behaviour that precedes it, perhaps accompanies it, and follows it? We can utter it with different inflections depending on which is the case, or with a different feeling (meaning in the other sense). Or it just occurs in a different context in the game. (Perhaps in the one case he’ll answer the question “What do you mean?” with “I meant that you should turn on the light”.)¹⁸

Let’s think of the question: How does a move in draughts differ from the same move in fox and hunter?

¹⁹If a drowning man calls out “Help!” – is he stating the fact that he needs help? That without help he’ll drown? – On the other hand there is the case in which, observing oneself, as it were, one says, “Now I’d like (or: want) . . .”.

²⁰I utter the word “light!” – someone else asks me: “What do you mean?” – and I answer:²¹ “I meant that you should turn on the light”. – What was going on when I *meant* that? Did I silently utter the “complete sentence” in my mind, or one corresponding to it, but in a different language? (That *can* happen, or not.) All the cases that one lumps together in the expression “I meant” are *extremely diverse*.

²²One can easily assume: “I meant that you should turn on the light” means that an image of you performing this action was present in my mind when I said those words, and with equal validity: this sentence means that when I said those words the words of the complete sentence were present in my imagination, or that one of these two things happened. – I just have to be aware that in assuming this I have set up a definition of the words “I meant” – and that it is narrower than the one that corresponds to the actual common use of the expression.

²³If meaning something is to have any significance or importance for us, then a system of meanings must be assigned to the system of propositions, *no matter what* sorts of processes meanings might be.²⁴

Mannequins

²⁵But let’s not talk about “meaning something” as an indefinite process that we don’t know very well,²⁶ but about the (actual), “practical” use of the word, about the actions that we carry out with it.

Let’s talk about “meaning something” only when it is part of the language-calculus (say the part that consists of mental images²⁷). And then we really don’t need the words “meaning something”, for that always suggests that we are dealing with processes that don’t belong to language but stand apart from it, processes whose nature is essentially different from that of language.

15 (M): ✓

16 (V): Now how

17 (M): ✓ /// – follows it?

18 (E): Wittgenstein has drawn an arrow after “mean?” that points to “I meant . . .” in the second remark below, and we have inserted that sentence here.

19 (M): ✓ ///

20 (M): ✓ ///

21 (V): say:

22 (M): ///

23 (M): ✓ ✓ ///

24 (V): meanings are supposed to be.

25 (M): ✓

26 (V): don’t know,

27 (V): of images in our imagination

203 ³¹Inwiefern stimmt nun das Wort „Licht“ im obigen Symbolismus oder Zeichenspiel mit einer Wirklichkeit überein, – oder nicht überein?

Wie gebrauchen wir³² das Wort „übereinstimmen“? – Wir sagen „die beiden Uhren stimmen überein“, wenn sie die gleiche Zeit zeigen, „die beiden Maßstäbe stimmen überein“, wenn gewisse Teilstriche zusammenfallen, „die beiden Farben stimmen überein“, wenn etwa ihre Zusammenstellung uns angenehm ist oder manchmal wenn wir sagen wollen die beiden Dinge haben dieselbe Farbe. Wir sagen „die beiden Längen stimmen überein“, wenn sie gleich sind, aber auch, wenn sie in einem von uns gewünschten Verhältnis stehen. Und, daß sie „übereinstimmen“ heißt dann nichts andres, als daß sie in diesem Verhältnis – etwa 1 : 2 –

204 stehen. So muß also in jedem Fall erst festgesetzt werden, was unter „Übereinstimmung“ zu verstehen ist. – So ist es nun auch mit der Übereinstimmung einer Längenangabe mit der Länge eines Gegenstandes.³³ Wenn ich sage: „dieser Stab ist 2m lang“, so kann ich z.B. erklären,³⁴ wie man nach diesem Satz mit einem Maßstab die Länge des Stabes kontrolliert, wie man etwa nach diesem Satz einen Meßstreifen für den Stab erzeugt.³⁵ Und ich sage nun, der Satz stimmt mit der Wirklichkeit überein, wenn der auf diese Weise konstruierte Meßstreifen mit dem Stab übereinstimmt. Diese Konstruktion eines Meßstreifens illustriert übrigens, was ich in der „Abhandlung“ damit meinte, daß der Satz bis an die Wirklichkeit herankommt. – Man könnte das auch so klar machen: Wenn ich die Wirklichkeit daraufhin prüfen will, ob sie mit einem Satz übereinstimmt, so kann ich das auch so machen, daß ich sie nun beschreibe und sehe, ob der gleiche Satz herauskommt. Oder: ich kann die Wirklichkeit nach grammatischen Regeln in die Sprache des Satzes übersetzen und nun im Land der Sprache den Vergleich durchführen.

Als ich nun dem Andern erklärte: „Licht“ (indem ich Licht machte), „Finster“ (indem ich es auslöschte), hätte ich auch sagen können und mit genau derselben Bedeutung: „das heißt³⁶ ‚Licht‘“ (wobei ich Licht mache) und „das heißt³⁷ ‚Finster‘“ etc., und auch ebensogut:³⁸ „das stimmt mit ‚Licht‘ überein“, „das stimmt mit ‚Finster‘ überein“.³⁹

⁴⁰Es kommt eben wieder auf die Grammatik des Wortes „Übereinstimmung“ an, auf seinen Gebrauch. Und hier liegt die Verwechslung mit „Ähnlichkeit“ nahe, in dem Sinn, in dem zwei Personen einander ähnlich sind, wenn ich sie leicht miteinander verwechseln kann.

Ich kann auch wirklich nach der Aussage über die Gestalt eines Körpers eine Hohlform konstruieren, in die nun der Körper paßt, oder nicht paßt, je nachdem die Beschreibung richtig oder falsch war, und die konstruierte Hohlform gehört dann in dieser Auffassung noch zur Sprache (die bis an die Wirklichkeit herankommt).

205 Aber auch die Hohlform macht kein finsternes Gesicht, wenn der Körper nicht in sie paßt.

204v ⁴¹Wenn das Wort „Übereinstimmung mit der Wirklichkeit“ gebraucht werden darf,⁴² dann nicht als metalogischer Ausdruck, sondern als (ein)⁴³ Teil der gewöhnlichen, praktischen,

31 (M): ✓ ✓

32 (V): wir ~~überhaupt~~

33 (V): mit einer Länge.

34 (V): z.B. eine Erklärung geben,

35 (V): einen 2m langen Stab erzeugt.

36 (V): ist

37 (V): ist

38 (V): und warum hätte ich nicht sagen sollen:

39 (M): passen. Der Plan stimmt mit der Wirklichkeit überein.

Was er spielt stimmt mit den Noten überein.

40 (M): ✓

41 (M): ✓

42 (V): gebraucht wird,

43 (O): (einen)

²⁸Now to what extent does the word “light” in the symbolism or sign-game above agree – or not agree – with reality?

How do we use²⁹ the word “agree”? – We say “The two clocks agree” when they show the same time, “The two yardsticks agree” if certain graduation marks coincide, “The two colours agree” if, say, we like the way they go together or sometimes if we want to say that two things have the same colour. We say “The two lengths agree” if they are the same, but also if they are in a desired ratio to each other. And that they “agree” then means nothing more than that they are in that ratio to each other – say 1 : 2. So in each case what is to be understood by “agreement” has to be established first. – Now that’s also the way it is with the agreement between a specification of length and the length of an object.³⁰ If I say: “This rod is 2 metres long,” I can explain for example how,³¹ in accordance with this proposition, to check the length of the rod with a measuring stick, how to use this proposition, say, to produce a measuring tape for the rod.³² And now I say that the proposition agrees with reality if the measuring tape that was constructed in this way agrees with the rod. Incidentally, this construction of a measuring tape illustrates what I meant in the *Tractatus* when I said that the proposition comes right up to reality. – One could also make it clear this way: If I want to test reality to see whether it agrees with a proposition, then I can also do this by describing it and seeing whether the same proposition results. Or: I can – in accordance with grammatical rules – translate reality into the language of the proposition and then carry out the comparison within the domain of language.

So when I was explaining to someone: “Light” (by turning on the light), “Dark” (by turning it off), I could also have said – with exactly the same meaning: “This means³³ ‘light’ ” (turning on the light) and “This means³⁴ ‘dark’ ” etc., and I could just as well have said:³⁵ “This agrees with ‘light’”, “This agrees with ‘dark’ ”.³⁶

³⁷Again it simply depends on the grammar of the word “agreement”, on its use. And in using it it’s easy to confuse it with “resemblance”, in the sense in which two people resemble each other if I can easily confuse them.

Using a statement about the shape of a body, I can actually construct a mould, into which the body fits or doesn’t fit, depending on whether the description was true or false; and then – following this way of looking at it – the mould I constructed is still a part of language (which extends right up to reality).

But the mould doesn’t frown if the body doesn’t fit it.

³⁸If the phrase “agreement with reality” can be³⁹ used, then it is not as a meta-logical expression, but as (a) part of normal, practical language.⁴⁰ One can say, for instance:

28 (M): ✓ ✓

29 (V): we ~~actually~~ use

30 (V): specification of length and a length.

31 (V): can give an explanation of how,

32 (V): produce a rod 2 metres long.

33 (V): is

34 (V): is

35 (V): and why shouldn’t I have said:

36 (M): To fit. The plan agrees with reality.

What he is playing agrees with the notes.

37 (M): ✓

38 (M): ✓

39 (V): reality” is

40 (V₁): but as part of a calculus, part of normal language. // but only as a coin in the practical traffic with money. (V₂): but // only // as a part of speech in the practical use of our ordinary language.

205 Sprache.⁴⁴ Man kann etwa sagen: Im Sprachspiel „Licht! – Finster!“ kommt der Ausdruck „Übereinstimmung mit der Wirklichkeit“ nicht vor.

⁴⁵In dem Sprachspiel „Licht – Finster“ kommt keine Frage vor. – Aber wir könnten es auch mit Fragen spielen.

Das Sprachspiel „eine Geschichte erfinden“ andererseits ein wirkliches Erlebnis erzählen.

So lernt der Maler porträtieren, aber auch ein Bild aus der Phantasie entwerfen, oder ein Ornament erfinden, etc.

44 (V₁): sondern als Teil eines Kalküls, als Teil der gewöhnlichen Sprache. // sondern nur als eine Münze im praktischen Geldverkehr. (V₂): son- 45 (M): ///

dern // sondern nur // als Redeteil im praktischen Gebrauch unserer gewöhnlichen Sprache.

In the language-game “Light! – Dark!” the expression “agreement with reality” doesn’t appear.

⁴¹No question occurs in the language-game “Light! – Dark!”. – But we could just as well play it with questions.

The language-game “inventing a story”, and on the other hand, narrating a real experience.

Likewise, a painter learns how to paint portraits, but also how to sketch a picture from his imagination, or how to make an embellishment, etc.

41 (M): ///

Behauptung, Frage, Annahme, etc.

¹Das Frege'sche Behauptungszeichen ist am Platze, wenn es nichts weiter bezeichnen soll, als den Anfang des Satzes. Man könnte sagen „den Anfang der Behauptung“, im Gegensatz zu den Sätzen, die in der Behauptung vorkommen können. Das Behauptungszeichen dient dann demselben Zweck, wie der Schlußpunkt des vorhergehenden Satzes.

„Ich denke p“ hat dann mit „⊢p“ eben *nur* das Zeichen „p“ gemeinsam.²

³Was zum Wesen des Satzes gehört, kann die Sprache schon darum nicht ausdrücken, weil es für jeden Satz das Gleiche wäre; und ein Zeichen, das in jedem Satz vorkommen muß, logisch eine bloße Spielerei wäre. Die Zeichen des Satzes sind ja nicht Talismane oder magische Zeichen, die auf den Betrachter einen bestimmten Eindruck hervorrufen sollen.

Gäbe es philosophische Zeichen im Satz, so müßte ihre Wirkung⁴ eine solche unmittelbare sein.

207 ⁵Man hat natürlich das Recht, ein Behauptungszeichen zu verwenden, wenn man es im Gegensatz etwa zu einem Fragezeichen gebraucht. Irrelevant ist es nur, wenn man meint, daß die Behauptung nun aus zwei Akten bestehe, dem Erwägen und dem Behaupten (Beilegen des Wahrheitswertes, oder dergl.) und daß wir diese Akte nach dem geschriebenen Satz ausführen, ungefähr wie wir nach Noten Klavier spielen.⁶

206v Mit dem Klavierspielen nach Noten ist nun allerdings das laute oder auch leise, Lesen nach dem geschriebenen oder gedruckten Satz zu vergleichen und ganz analog.⁷ Aber die Zeichen des Satzes sind nicht Signale zu psychischen Tätigkeiten des Meinens.⁸ Daher ist auch das B. Zeichen⁹

207 in der Fregeschen Schreibweise ganz überflüssig. Es wird (ja) vor alle Sätze gesetzt, kann also in allen weggelassen werden. Dort wo er einmal einen Satz ohne dieses Zeichen hinschreibt tut er es mit einer

1 (M): ✓ ////

2 (V): gemein.

3 (M): ✓ ////

4 (V): Funktion

5 (M): ✓

6 (V): Noten singen.

7 (M): /// – kann

207 8 (V): analog; aber nichts, was wir „denken“ nennen. // aber nicht das Denken des Satzes. // Ist also z.B. ein Behauptungszeichen im geschriebenen Satz, so wird wieder ein Behauptungszeichen im gelesenen sein (etwa die Betonung, oder der Stimmfall). Aber nicht, als ob im geschriebenen Satz die // das // Zeichen, im gedachten aber die Bedeutung anwesend wäre. – (V₂): /// aber nicht etwas, was wir ein Denken oder Meinens des Satzes

nennen würden. (V₃): /// Aber nicht so als ob das Denken des Satzes darin bestünde // Aber das Denken des Satzes besteht [nicht darin – E] // daß wir nach den Signalen des Satzes Gedankenoperationen, – u.a. auch das Behaupten –, ausführten. Als // Und als // seien im Satz die Zeichen & die Bedeutungen im Denken. (V₄): /// aber nicht Akte des Denkens oder Meinens. (V₅): /// Aber nicht das Denken; ~~insofern~~ da wir nicht (V₆): /// aber nicht eine psychologische Tätigkeit // Reihe seelischer Akte // des Denkens oder Meinens des Satzes. (V₇): /// Aber die Zeichen des Satzes sind nicht Signale nach welchen // denen // wir psychische Operationen ausführen // vornehmen // – u.a. auch das Behaupten. –

9 (V): das Zeichen

Assertion, Question, Assumption, etc.

¹Frege's assertion-sign is properly placed if it's supposed to indicate nothing more than the beginning of a sentence. One could say "the beginning of the assertion", as opposed to the sentences that can occur within the assertion. Then the assertion-sign serves the same purpose as the period in the previous sentence.

Then "I think p" and "⊢p" have *only* the sign "p" in common.

²The first and most obvious reason language cannot express what belongs to the essence of a sentence is that this would be the same for every sentence; and that from a logical point of view a sign that has to appear in every sentence would be nothing but a frivolous game. After all, the signs in a sentence aren't talismans or magical symbols, which are supposed to cast a certain spell on the beholder.

If there were philosophical signs in a sentence, then their effect³ would have to be an immediate one like that.

⁴Of course one has the right to use an assertion-sign if one uses it in contrast, say, to a question mark. But it is misleading to believe that therefore an assertion consists of two acts, contemplating and asserting (attaching a truth-value, or some such thing), and that we perform these acts following the written sentence, more or less as we play the piano⁵ following the score.

Now to be sure reading – aloud, or to oneself – in accordance with a written or printed sentence can be compared to using a score to play the piano, and it is completely analogous to it. ⁶But the signs of a sentence are not signals that trigger psychological acts of meaning.⁷ Therefore the assertion-sign⁸ in Frege's notation is completely superfluous. (After all), it's placed in front of all sentences and can therefore be omitted in all of them. Where he occasionally writes a sentence

1 (M): ✓ ////

2 (M): ✓ ////

3 (V): function

4 (M): ✓

5 (V): sing

6 (M): /// – all sentences

7 (V₁): analogous to it; but nothing that we call "thinking" is. // but the thinking of a sentence isn't. // So if, say, there is an assertion-sign in a written sentence, then in turn there will be an *assertion-sign* in the one that is read (say, an intonation or a cadence of voice). But it's not as if the sign // signs // is present in the written sentence, and the meaning in the one that is thought. – (V₂): /// but something that we would call a thinking or meaning of a sentence isn't.

(V₃): /// But it's not as if thinking a sentence consisted in // But thinking a sentence [doesn't – Eds.] consist // in our carrying out thought-operations – including among others the act of assertion – following the signals in the sentence. As if // And as if // the signs were in the sentence & the meanings in thinking. (V₄): /// but acts of thinking or meaning aren't. (V₅): /// But thinking isn't; since ~~in so far~~ as we do not (V₆): /// but psychological activity // a series of psychic acts // of thinking or meaning a proposition isn't // aren't. (V₇): /// But the signs of a proposition are not signals according to which we carry out // undertake // psychic operations including, among others, the act of assertion. –

8 (V): sign

gewissen Unsicherheit die zeigt, daß er eigentlich nicht darauf gefaßt war es je wegzulassen also¹⁰ Gebrauch im Kalkül davon zu machen.

206v ¹¹Freges Ansicht daß in der Behauptung eine Annahme steckt läuft¹² darauf hinaus zu sagen daß jede Behauptung in der Form geschrieben werden könne
Ich behauptete, daß. . . .

207 ¹³Eine Sprache (ich meine eine Sprechart) ist denkbar, in der es keine Behauptungssätze gibt, sondern nur Fragen und die Bejahung und Verneinung.

¹⁴Behauptung, Annahme, Frage. Man kann auf dem Schachbrett einen Zug in einer Schachpartie machen, – aber auch während eines Gesprächs über ein Schachproblem zur Illustration, oder wenn man jemand das Spiel lehrt, – etc. Man sagt dann auch etwa: „angenommen, ich zöge so, . . .“. So ein Zug hat Ähnlichkeit mit dem, was man in der Sprache „Annahme“ nennt. Ich sage nun etwa „im Nebenzimmer ist ein Dieb“, – der Andre fragt mich „woher weißt Du das?“ und ich antworte: „oh ich¹⁵ wollte nicht sagen, daß wirklich ein Dieb im Nebenzimmer ist, ich habe es nur in Erwägung gezogen“. – Möchte man da nicht fragen: *Was* hast Du erwogen? wie Du Dich benehmen würdest, wenn ein Dieb da wäre, oder, was für ein Geräusch es machen würde, oder, was er Dir wohl stehlen würde?

Freges Anschauung könnte man so wiedergeben: daß die Annahme (so wie er das Wort gebraucht) das ist, was die Behauptung, daß p der Fall ist, mit der Frage, ob p der Fall ist, gemeinsam hat. Oder auch, daß die Annahme dasselbe ist wie die Frage. Man könnte auch eine Behauptung immer als eine Frage mit einer Bejahung darstellen. Statt „Es regnet“: „Regnet es? Ja!“¹⁶

Annahme ⊢

¹⁷Wenn es so etwas gäbe, wie eine Annahme im Sinne Freges, müßte dann nicht die Annahme daß p der Fall ist gleich der sein, daß $\sim p$ der Fall ist?

¹⁸In dem Sinn, in welchem die Frage „ist p der Fall?“ die gleiche ist wie „ist p nicht der Fall?“.

¹⁹Es gibt wirkliche Annahmen, die wir eben durch Sätze von der Form „angenommen p wäre (oder: ist) der Fall“ ausdrücken. Aber solche Sätze nennen wir nicht vollständig und sie erinnern uns an Sätze der Form²⁰ „wenn p der Fall ist, . . .“.

²¹Ist nun aber eine solche Annahme *ein Teil* einer Behauptung? Ist das nicht, als sagte man, die Frage, ob p der Fall ist, sei ein Teil der Behauptung, daß p der Fall ist?

²²Ist es aber nicht auffällig, daß wir es in unsern gewöhnlichen²³ philosophisch-grammatischen Problemen nie damit zu tun haben, ob sie sich auf Behauptungen oder Fragen beziehen? (Etwa in dem Problem vom Idealismus und Realismus.)

²⁴Und welcher Art ist ein Satz, wenn sich Einer eine mögliche Situation, etwa ihrer Seltsamkeit wegen, notiert? Oder: die Erzählung eines Witzes?

10 (V): also ~~wirklichen~~

11 (M): ////

12 (V): kommt

13 (M): ✓

14 (M): ////

15 (V): antworte: „~~ie~~ „oh ich

16 (V): Ja!“ „Ich behauptete daß es regnet“

17 (M): ///

18 (M): ///

19 (M): ///

20 (V): sie scheinen sehr ähnlich den Sätzen der Form

21 (M): ///

22 (M): ///

23 (O): gewöhnlich

24 (M): ✓

without this sign he does so with some uncertainty, which shows that actually he was never prepared to leave it out, i.e. to⁹ use it in a calculus.

¹⁰Frege’s view that an assumption is contained within an assertion amounts to saying that every assertion can be written in the form

“I assert that . . .”

¹¹A language (I mean a way of speaking) can be imagined in which there are no assertoric sentences, but only questions and their affirmation and denial.

¹²Assertion, assumption, question. One can make a move on a chess board in a game of chess – but also in a conversation to illustrate a chess problem, or when one is teaching someone the game – etc. There one says, for instance: “Say I were to move *this way*, . . .”. Such a move is similar to what in language is called an “assumption”. Suppose I say, for instance, “There’s a thief next door” – the other person asks me “How do you know that?” and I answer: “Oh, I¹³ didn’t want to say that there really was a thief next door, I was just turning it over in my mind”. – Isn’t one then inclined to ask: *What* were you turning over in your mind? How you would behave if a thief were there, or what sort of noise he would make, or what he might steal from you?

One could restate Frege’s view this way: An assumption (as he uses the word) is what the assertion that p is the case has in common with the question whether p is the case. Or: An assumption is the same thing as a question. One could also represent every assertion as a question together with an affirmation. Instead of “It’s raining”: “Is it raining? Yes!”¹⁴

Assumption ⊢

¹⁵If there were such a thing as an assumption in Frege’s sense, wouldn’t the assumption that p is the case have to be the same as that ~p is the case?

¹⁶In the sense in which the question “Is p the case?” is the same as “Is p not the case?”.

¹⁷There are real assumptions, which we express in sentences of the form “Let’s assume that p were (or: is) the case”. But we don’t call such sentences complete, and they remind us of sentences¹⁸ of the form “If p is the case, . . .”.

¹⁹But now: is such an assumption *part* of an assertion? Isn’t that as if one were to say that the question whether p is the case is part of the assertion that p is the case?

²⁰But isn’t it striking that in our usual philosophical-grammatical problems we never deal with whether they refer to assertions or questions? (For example, in the problem of idealism and realism.)

²¹And what sort of sentence is it if someone jots down a possible situation, say because of its oddity? Or: the narration of a joke?

9 (V): i.e. *really* to

10 (M): ////

11 (M): ✓

12 (M): ////

13 (V): answer: “~~I~~ “oh, I

14 (V): Yes!” “I assert that it’s raining”

15 (M): ///

16 (M): ///

17 (M): ///

18 (V): they seem to be quite similar to sentences

19 (M): ///

20 (M): ///

21 (M): ✓

209 ²⁵Sprachspiel: eine Geschichte erfinden. Oder: eine Geschichte erfinden und zeichnen. – Etc.

²⁶Es ist uns, als könnten wir sagen,²⁷ der fragende Tonfall sei dem Sinn der Frage angemessen.

²⁸Wir können²⁹ uns auch eine Sprache denken, die nur aus Befehlen besteht. So eine Sprache verhält sich zu der unseren, wie eine primitive Arithmetik zu unserer. Und wie jene Arithmetik nicht wesentlich unvollständig ist, so ist es auch die primitivere Form der Sprache nicht.³⁰

208v ³¹Denken wir an die große Mannigfaltigkeit³² der Sprachspiele:
 Eine Mitteilung machen wie „Licht“, „Finster“.³³
 Einen Befehl geben „mach Licht!“ „Lösch aus“.
 Auf Fragen Licht? Finster? mit ja & nein antworten.
 Einen Befehl ausführen.
 Fragen & die Antwort auf ihre Richtigkeit prüfen.³⁴
 Negative & positive Befehle ausführen. Disjunktive.
 Eine Vermutung aussprechen (Aufschlagen von Karten) & sie verifizieren.
 Die Form eines Satzes vereinfachen ($\sim\sim p = \sim p$), Schließen.
 Ein³⁵ angewandtes Rechenexempel lösen.
 Eine Zeichnung³⁶ herstellen & sie beschreiben.
 Einen Hergang erzählen.
 Eine Erzählung erfinden.
 Eine Hypothese aufstellen & prüfen.
 Eine Tabelle anlegen.
 Grüßen.

³⁷Es hilft hier immer sich den Fall des Kindes vorzustellen welches³⁸ sprechen lernt oder auch den³⁹ eines Volkes⁴⁰ das nur eine⁴¹ primitive Sprache besitzt.

Aber auch der Erwachsene lernt neue Sprachspiele⁴² wenn er die Form des Beweises kennen lernt oder lernt Tabellen⁴³ anzulegen oder abzulesen oder graphische Darstellungen zu machen & zu verwenden.

209 ⁴⁴Geschicklichkeits- & Hasardspiele sie sind viel fundamentaler verschieden als ihre Bezeichnung erkennen läßt.

⁴⁵Richtig & falsch *spielen*.

Richtig & falsch *vermuten* wobei man richtig spielt.

⁴⁶Der Tonfall der Frage angelernt & instinktiv. Und was macht es aus, ob er angelernt ist oder nicht; da wir, wenn wir ihn einmal gebrauchen, doch nicht auf das Lernen zurückgreifen. Später ist er jedenfalls instinktiv, was immer sein Ursprung ist.

25 (M): ✓

26 (M): ✓

27 (V): sagen⁺

28 (M): ✓

29 (V): könnten

30 (R): S. 21/1 & Bemerkung gehört nicht hierher. ✗

31 (M): | ✓

32 (V): die Mannigfaltigkeit

33 (V): „Finster“, ~~einen~~

34 (V): Antwort kontrollieren.

35 (V): ~~Eine Rechnung machen~~. Ein

36 (O): Zeichnung

37 (M): ✓

38 (V): welches ~~ist~~

39 (V): den ~~Fall~~

40 (O): Volkesstammes (V): Volksstammes

41 (V): das eine

42 (V): neue Formen der Sprache

43 (V): Tabellen ~~oder~~

44 (M): ✓

45 (M): ✓

46 (M): ///

²²Language-game: inventing a story. Or inventing and drawing a story. – Etc.

²³We feel that we could say that the inflection used in a question is appropriate for the sense of the question.

²⁴We can also imagine a language that consists only of commands. Such a language relates to ours as a primitive arithmetic does to ours. And just as that arithmetic is not essentially incomplete, neither is the more primitive form of language.²⁵

²⁶Let's think about the great variety²⁷ of language-games:
 Making a report, such as "light", "dark".²⁸
 Issuing a command "Turn on the light!", "Lights out".
 Answering the questions "Light?", "Dark?" with yes and no.
 Carrying out an order.
 Asking a question and checking the correctness of the answer to it.²⁹
 Carrying out negative and positive orders. Disjunctive ones.
 Uttering a hunch (turning up cards) and verifying it.
 Simplifying the form of a proposition ($\sim\sim p = \sim p$), drawing conclusions.
 Solving³⁰ a problem of applied mathematics.
 Making a drawing and describing it.
 Narrating a course of events.
 Inventing a story.
 Setting up and testing a hypothesis.
 Compiling a table.
 Greeting someone.

³¹Here it's always helpful to imagine the case of a child who is learning to talk, or that³² of a people who have only a³³ primitive language.

But a grown-up too learns new language-games³⁴ when he becomes acquainted with the form of a proof or learns how to construct or read tables or how to draw and use graphs.

³⁵Games of skill and games of chance: they differ more fundamentally than their names reveal.

³⁶*Playing* correctly and incorrectly.

Guessing correctly and incorrectly, while playing correctly.

³⁷The inflection of a question, learned and instinctive. And what's the difference whether it's been learned or not? Because once we use it we don't fall back on this learning. In any case it's instinctive later on, whatever its origin.

22 (M): ✓

23 (M): ✓

24 (M): ✓

25 (R): p. 21/1 & remark don't belong here. ✗

26 (M): | ✓

27 (V): the variety

28 (V): "dark", a

29 (V): Questions and checking their answers.

30 (V): ~~Making a calculation.~~ Solving

31 (M): ✓

32 (V): or the ~~case~~

33 (V): of a tribe that has a

34 (V): new forms of language

35 (M): ✓

36 (M): ✓

37 (M): ///

⁴⁷Man sagt: Die Affen sprechen nicht, weil ihnen die geistigen Fähigkeiten dazu fehlen. Das heißt: sie denken nicht, darum sprechen sie nicht. Aber sie sprechen eben nicht & das ist alles. Befehlen, fragen, erzählen,⁴⁸ plauschen, sind so natürliche Handlungen wie gehen, trinken, spielen.

209v ⁴⁹Das hängt damit zusammen daß man meint das Lernen der Sprache bestehe darin daß man Gegenstände benennt & zwar: Menschen, Gattungen, Farben, Schmerzen, Stimmungen, Zahlen, etc.

⁵⁰Wie gesagt, das Benennen ist etwas Ähnliches wie einem Ding eine Namenstafel⁵¹ umhängen. Man kann es eine Vorbereitung zum weiteren Gebrauch eines⁵² Worts nennen. Aber *worauf* ist es eine Vorbereitung?!

⁵³„Wir benennen die Dinge, & können nun über sie reden, uns⁵⁴ in der Rede auf sie beziehen“: als ob mit dem Akt des Benennens schon das was wir weiter tun gegeben sei. Als ob es nur Eines gäbe was heißt: von Dingen reden. Während wir das Verschiedenartigste mit unseren Sätzen tun.

⁵⁵Denken wir nur an die Ausrufe⁵⁶ mit ihren ganz verschiedenen Funktionen: Wasser!⁵⁷ Weg!⁵⁸ Au! – Hilfe! – Schön! – Nicht! –

⁵⁹Bist Du nun noch geneigt diese Wörter „Namen“ zu nennen?

⁶⁰Es sagte mir einmal jemand: „Wie wäre es, wenn die Menschen ihre Schmerzen nicht äußerten (nicht stöhnten, etc.), – dann könnte man einem Kind nicht das Wort ‚Zahnschmerz‘ beibringen!“ – Denken wir uns nun, es würde Einer sagen: „Ich nehme an, das Kind sei ein Genie & erfinde *selbst* einen Namen für den Schmerz, obwohl ihm keiner gelehrt wurde. – Aber nun könnte er sich freilich mit diesem Wort nicht verständlich machen!“ Also versteht es ihn, kann aber seine⁶¹ Bedeutung niemandem erklären? Aber was heißt es denn, daß er „seinen Schmerz⁶² *benannt* hat“? Was ist die Verbindung des Wortes das⁶³ er ausspricht mit dem Schmerz? Und was für eine Funktion hat dieses Wort? Wie hat er das gemacht den Schmerz zu benennen?? Und was immer er getan hat, was hat es für einen Zweck? – Wenn man sagt „er hat dem Schmerz einen Namen gegeben“ so vergißt man daß sozusagen schon⁶⁴ alles mögliche in der Sprache vorbereitet sein muß damit das bloße Benennen⁶⁵ einen Sinn hat. Und wenn wir davon reden daß er dem Schmerz einen Namen gibt ist die⁶⁶ Grammatik des Wortes „Schmerz“ hier das Vorbereitete:⁶⁷ es zeigt den Posten an an den das neue Wort gestellt wird.

47 (M): ✓

48 (V): ~~beschreiben~~,

49 (M): ✓

50 (M): ✓

51 (V): wie einem ~~Ding Mineral eine Etiquette~~

52 (V): des

53 (M): ✓

54 (V): reden“, uns

55 (M): ✓

56 (V): die ~~Verschiedenen~~ Ausrufe

57 (V): Trinken! // ~~(Ich will trinken)~~

58 (V): ~~(Geh weg)~~

59 (M): ✓

60 (M): ✓

61 (V): kann seine

62 (V): er „seine Schmerzen

63 (O): daß

64 (V): daß schon

65 (O): benennen

66 (O): gibt die

67 (O): Vorbereitete

³⁸One says: Monkeys don't talk because they lack the mental abilities for it. That is: They don't think, therefore they don't talk. But they simply don't talk, and that's it. Commanding, asking,³⁹ narrating, chatting are activities that are as natural as walking, drinking, playing.

⁴⁰This is connected with the view that learning a language consists in naming objects, that is to say: humans, genres, colours, pains, moods, numbers, etc.

⁴¹As mentioned above, naming is something like hanging a name-plate on a thing.⁴² One can call it a preparation for the further use of a word.⁴³ But *what* is it a preparation *for*?

⁴⁴"We name things, and then we can talk about them, can refer to them in speech." As if what we do afterwards were already given in the act of naming. As if there were only one thing that means: talking about things. Whereas we do the most varied things with our sentences.

⁴⁵Just think of exclamations⁴⁶ with their completely different functions: Water!⁴⁷ Leave!⁴⁸ Ow! – Help! – Beautiful! – Don't! –

⁴⁹Now are you still inclined to call these words "names"?

⁵⁰Once someone said to me: "What would it be like if humans didn't express their pains (didn't groan, etc.)? – then we couldn't teach a child the word 'toothache'! – Now let's imagine that someone were to say: "I'm assuming that the child is a genius and invents a name for the pain *himself*, even though he wasn't taught one. – But then, of course, he couldn't make himself understood when he used this word!" So he understands the name, but can't⁵¹ explain its meaning to anybody? But what does it mean to say that he "has *named* his pain⁵²"? What is the connection between the word he utters and the pain? And what kind of function does this word have? How did he accomplish naming the pain?? And whatever he did, what purpose does it have? – When one says "He has given a name to his pain" then one forgets that all sorts of things in the language have to have been prepared in advance, as it were, for the mere act of naming to make sense. And when we speak about his giving a name to a pain, then here it is the grammar of the word "pain" that has been prepared; it shows the post where the new word is stationed.

38 (M): ✓

39 (V): ~~describing~~.

40 (M): ✓

41 (M): ✓

42 (V): like ~~labeling a thing~~ mineral.

43 (V): the word.

44 (M): ✓

45 (M): ✓

46 (V): of ~~different~~ exclamations

47 (V): Drinking! // ~~(I want to drink)~~

48 (V): ~~(Go away)~~

49 (M): ✓

50 (M): ✓

51 (V): name, can't

52 (V): pains

Gedanke. Denken.

**Thought.
Thinking.**

211 **Wie denkt man den Satz „p“,
wie erwartet (glaubt, wünscht) man,
daß p der Fall sein wird?
Mechanismus des Denkens.**

Das Unverständnis der Grammatik des Wortes „Denken“ & psychologisches Unverständnis angesehen als nicht Verstehen eines komplizierten mechanischen Vorgangs.

Die Idee ist: Denken, Glauben, etc. als Tätigkeiten in denen der Satz vorkommt, etwa wie¹ die Karten in den Operationen des Musterwebstuhls.

²Man ist³ versucht, zu fragen: „wie denkt man den Satz p,⁴ wie erwartet man, daß das und das eintreffen wird“ (wie macht man das).⁵

210v ⁶„Wie arbeitet der Gedanke, wie bedient er sich seines Ausdrucks?“ – dies scheint analog
211 der Frage:⁷ „wie arbeitet der Musterwebstuhl, wie bedient er sich der Karten?“

210v Das Gefühl ist, daß in⁸ dem Satz „ich glaube, daß p der Fall ist“ etwas Wesentliches, der eigentliche Vorgang⁹ des Glaubens, nur angedeutet sei; daß sich diese Andeutung durch eine¹⁰ Beschreibung dieses¹¹ Mechanismus müsse ersetzen lassen. Eine Beschreibung worin „p ist der Fall“ wie¹² die Karten in der Beschreibung des Musterwebstuhls vorkäme. Und daß nun diese Beschreibung erst der komplette Ausdruck des Glaubens wäre.

Vergleichen wir nun das Glauben mit dem Aussprechen eines Satzes. Es gehen da auch sehr komplizierte Vorgänge in unseren Sprechmuskeln, Nerven etc., etc., vor sich. Diese *begleiten* den ausgesprochenen Satz & er bleibt das Einzige was *uns* interessiert. Und zwar als Bestandteil¹³ eines Kalküls,¹⁴ nicht eines Mechanismus.¹⁵

1 (V): vorkommt, wie

2 (M): ✓

3 (V): ist (~~durch die irreführende Grammatik~~) // (~~durch unsere Grammatik irreführt~~)

4 (V): Satz . . . ,

5 (V): das). ~~Und in dieser falschen Frage liegt wohl die ganze Schwierigkeit in nuce enthalten.~~

6 (M): ✓

7 (V): Ausdrucks?“ – das ist // ~~klings~~ // ~~dies möchte man fragen~~ analog der Frage:

8 (V): ~~mit~~

9 (V): der Vorgang

10 (V): eine ~~eigentliche~~

11 (V): des

12 (V): worin p wie

13 (V): Und ~~ist~~ Bestandteil

14 (O): Kalkül,

15 (V): ✓ Das Gefühl ist, daß mit dem Satz „ich glaube, daß p der Fall ist“ der Vorgang des Glaubens nicht beschrieben sei (daß vom Webstuhl nur die Karten gegeben seien und alles übrige bloß angedeutet ist). Daß man die Beschreibung „ich glaube p“ durch die Beschreibung eines Mechanismus ersetzen könnte, worin dann p, d.h. jetzt die Wortfolge „p“, wie die Karten im Webstuhl nur als *ein* Bestandteil vorkommen würde. Aber hier ist der Irrtum: Was immer diese Beschreibung enthielte, wäre für uns wertlos, außer eben der Satz p *mit seiner Grammatik*. Sie ist quasi der eigentliche Mechanismus, in welchem // dem // er eingebettet liegt.

How does one Think the Proposition “p”, how does one Expect (Believe, Wish) that p will be the Case? Mechanism of Thinking.

A lack of understanding of the grammar of the word “thinking” and a lack of psychological understanding seen as not understanding a complicated mechanical process.

The idea is: thinking, believing, etc. as activities in which the proposition occurs more or less like¹ the punch cards in the workings of a pattern-loom.

²One³ is tempted to ask: “How does one think the proposition p, how does one expect that such and such will happen?” (How does one do that?)⁴

⁵“How does thought work, how does it make use of its expression?” – this seems analogous to the question:⁶ “How does the pattern-loom work, how does it make use of the punch cards?”

The feeling is that something essential, the actual process⁷ of believing, is only alluded to in⁸ the sentence “I believe that p is the case”; that this allusion must be replaceable by a⁹ description of this¹⁰ mechanism. A description in which “p is the case” would¹¹ occur like the punch cards in the description of a pattern-loom. And that then only this description would be the complete expression of believing.

Let’s now compare believing with uttering a sentence. Here too very complicated processes take place in the muscles and nerves in our throat, etc., etc. These processes *accompany* the spoken sentence, yet *it* remains the only thing that we are interested in – the sentence as part¹² of a calculus, not of a mechanism.¹³

1 (V): occurs like

2 (M): ✓

3 (V): (~~Because of misleading grammar~~) one // (~~Misled by our grammar~~) one

4 (V): that? ~~And in this false question the entire difficulty is contained in a nut shell.~~

5 (M): ✓

6 (V): expression?” – that is // ~~sounds // one is inclined to ask this analogously to the question:~~

7 (V): the process

8 (V): ~~with~~

9 (V): by an ~~actual~~

10 (V): of the

11 (V): in which p would

12 (V): are interested in. And ~~it is~~ part

13 (V): ✓ The feeling is that the process of believing is not described by the sentence “I believe that p is the case” (that only the punch cards in a pattern-loom are given, and that everything else is merely alluded to). That one could replace the description “I believe p” with the description of a mechanism, in which p, i.e. the word-sequence “p”, occurred only as *one* component part, like the punch cards in a pattern-loom. But here is the mistake: whatever this description contained would be worthless to us, except for the sentence “p”, *with its grammar*. Grammar is as it were the true mechanism in which the proposition is embedded.

212 ¹⁶Wenn man fragt „wie macht der Satz¹⁷ das, daß er darstellt?“ So könnte die Antwort sein: „Weißt Du es denn (wirklich) nicht? Du siehst es doch, wenn Du ihn benützt^{18c}. Es ist ja nichts verborgen.“

Wie macht der Satz das? – Weißt Du es denn nicht? Es ist ja nichts versteckt.

¹⁹Daß „alles fließt“, scheint uns am Ausdruck der Wahrheit zu hindern, denn es ist, als ob wir sie nicht auffassen könnten, da sie uns entgleitet.

Aber es hindert uns eben nicht am Ausdruck. – Was es heißt, etwas Entfliehendes in der Beschreibung festhalten zu wollen, wissen wir. Das geschieht etwa, wenn wir das Eine vergessen, während wir das Andere beschreiben wollen. Aber darum handelt es sich doch hier nicht. Und so ist das Wort²⁰ „entfliehen“ anzuwenden.²¹

²²Aber auf die Antwort „Du weißt ja, wie es der Satz macht, es ist ja nichts verborgen“, möchte man sagen: „ja, aber es fließt alles so rasch vorüber und ich möchte es gleichsam breiter auseinander gelegt sehen“.

²³Aber auch hier irren wir uns. Denn es geschieht dabei auch nichts, was uns durch die Geschwindigkeit entgeht.

213 ²⁴Warum können wir uns keine Maschine mit einem Gedächtnis denken? Es wurde oft gesagt, daß das Gedächtnis darin besteht, daß Ereignisse Spuren hinterlassen, in denen nun gewisse Vorgänge vor sich gehen müßten. Wie wenn Wasser sich ein Bett macht und das folgende Wasser in diesem Bett fließen muß; der eine Vorgang fährt das Geleise²⁵ aus, das den andern führt.²⁶ Geschieht dies nun aber in einer Maschine, wie es wirklich geschieht, so sagt niemand, die Maschine habe Gedächtnis, oder habe sich den einen Vorgang gemerkt.

²⁷Nun ist das aber ganz so, wie wenn man sagt, eine Maschine kann nicht denken, oder kann keine Schmerzen haben. Und hier kommt es darauf an, was man darunter versteht „Schmerzen *zu haben*“. Es ist klar, daß ich mir eine Maschine denken kann, die sich genau so benimmt (in allen Details), wie ein Mensch der Schmerzen hat. Oder vielmehr: ich kann den Andern eine Maschine nennen, die Schmerzen hat, d.h.: den andern *Körper*. Und ebenso, natürlich, meinen Körper. Dagegen hat das Phänomen der Schmerzen, wie es auftritt, wenn „ich Schmerzen habe“, mit meinem Körper, d.h. mit den Erfahrungen, die ich als Existenz meines Körpers zusammenfasse, gar nichts zu tun. (Ich kann Zahnschmerzen haben ohne Zähne.) Und hier hat nun die Maschine gar keinen Platz. – Es ist klar, die Maschine kann nur einen physikalischen Körper ersetzen. Und in dem Sinne, wie man von einem solchen sagen kann, er „habe“ Schmerzen, kann man es auch von einer Maschine sagen. Oder wieder, die *Körper*, von denen wir sagen, sie hätten Schmerzen, können wir mit Maschinen vergleichen, und auch Maschinen nennen.

212v Könnte eine Maschine denken? – Könnte sie Schmerzen haben? In dem Sinne in welchem der tierische Körper Schmerzen hat – ja.²⁸ Wenn ich diesen eine Maschine nennen will.²⁹ Hier kommt es

16 (M): ← ✓

17 (V): Gedanke

18 (V): wenn Du denkst

19 (M): ((R): [gehört nicht hierher, sondern zur Betrachtg. der Zeit oder zu Solipsismus.]

20 (V): ist der Ausdruck

21 (M):)

22 (M): ← ✓

23 (M): ///

24 (M): ✓ ///

25 (O): das Geleise

26 (V): der eine Vorgang fährt für den nächsten das Geleise aus.

27 (M): ✓

28 (V): ja. ~~warum~~

29 (O): will:

¹⁴If one asks “How does a sentence¹⁵ go about representing?”, the answer could be: “Do you (really) not know this? After all, you see it when you use one¹⁶”. For nothing is concealed.

How does a sentence do that? – Do you really not know this? After all, nothing is hidden.

¹⁷That “everything is in flux” seems to hinder us in expressing the truth, for it’s as if we can’t grasp it, since it slips away from us.

But (and this is the point) this doesn’t prevent us from expressing something. – We know what it means to want to pin down something in a description that’s fleeting. This happens, for instance, when we forget the one thing as we’re trying to describe the other. But that isn’t what this is all about. And that’s the way the word¹⁸ “fleeting” is to be used.¹⁹

²⁰But one is inclined to respond to the answer “You know how the proposition does it; after all, nothing is concealed” by saying: “Yes, but everything goes by so quickly, and I’d like to see it with all of its parts spread out, as it were”.

²¹But here too we’re mistaken. For in this process nothing that happens escapes us because of speed.

²²Why can’t we imagine a machine with a memory? It was often said that memory consists in events leaving behind traces, in which certain events then have to occur. As when water erodes a bed for itself and the water that follows has to flow in this bed; the first process lays down the track that guides the latter.²³ But if this happens in a machine, as indeed it does, nobody says that the machine has a memory or that it remembered the first process.

²⁴But this is exactly like saying that a machine cannot think or cannot have pain. And here it depends on what one understands by “*having* pain”. It’s clear that I can imagine a machine that behaves exactly (in all details) like a human in pain. Or rather: I can call someone else – i.e. his *body* – a machine that has pain. And of course my own body as well. On the other hand, the phenomenon of pain as it occurs when “I’m in pain” has nothing at all to do with my body, i.e. with the experiences that I sum up as the existence of my body. (I can have a toothache without teeth.) And here the machine has absolutely no place. – It is clear that a machine can only replace a physical body. And in the sense in which one can say of such a body that it “has” pain, one can also say it of a machine. Or, once again, we can compare the *bodies* of which we say that they are in pain to machines, and can also call them machines.

Could a machine think? – Could it have pain? In the sense in which an animal’s body feels pain – yes.²⁵ If I want to call the animal’s body a machine. Here it depends on how the expression “have

14 (M): ← ✓

15 (V): thought

16 (V): when you think one

17 (M): ((R): [doesn’t belong here, but rather to the considerations of time or to solipsism.]

18 (V): expression

19 (M):)

20 (M): ← ✓

21 (M): ///

22 (M): ✓ ///

23 (V): the first process lays down the track for the next.

24 (M): ✓

25 (V): yes. ~~Why~~

drauf an, wie der Ausdruck „Schmerzen haben“ angewandt wird. Aber im Satz „Ich habe Schmerzen“ bezeichnet „ich“ keinen Körper also³⁰ auch keine Maschine.

213 ³¹Und ganz ebenso verhält es sich mit dem Denken und dem Gedächtnis.

³²Es ist uns – wie gesagt – als ginge es uns mit dem Gedanken so, wie mit einer Landschaft, die wir gesehen haben und beschreiben sollen, aber wir erinnern uns ihrer nicht genau genug, um sie in allen ihren Zusammenhängen beschreiben zu können. So, glauben wir, können wir das Denken nachträglich nicht beschreiben, weil uns alle die³³ feineren Vorgänge dann verloren gegangen sind.

214

Diese feinen Verhäkelungen möchten wir sozusagen unter der Lupe sehen.

30 (V): also ~~nicht~~

31 (M): ///

32 (M): ←

33 (V): die ~~vielen~~

pain” is used. But in the sentence “I’m in pain”, “I” doesn’t signify a body, and therefore neither does it signify²⁶ a machine.

²⁷And that’s exactly the way it is with thinking and memory.

²⁸It seems to us – as we’ve said – as if we fared with thought the way we do with a landscape we’ve seen and are supposed to describe, but which we don’t remember well enough to be able to describe in all of its detail. Likewise, we believe, we can’t describe thinking after it’s happened, because by then all of the²⁹ more subtle processes have escaped us.

We would like to see these fine interconnections under a magnifying glass, so to speak.

26 (V): therefore ~~not~~

27 (M): ///

28 (M): ←

29 (V): the ~~many~~

215 „Was ist ein Gedanke, welcher Art
muß er sein, um seine Funktion
erfüllen zu können?“

Hier will man sein Wesen aus seinem
Zweck, seiner Funktion erklären.

¹Wir fragen: Was ist ein Gedanke, welcher Art muß etwas sein, um die Funktion des Gedankens verrichten zu können? Und diese Frage ist² analog der: Was ist, oder, wie funktioniert, eine Nähmaschine. „Wie macht sie das?“ Aber die Antwort könnte sein: Schau den Stich an; alles, was der Nähmaschine wesentlich³ ist, ist in ihm zu sehen; alles andre kann so, oder anders sein.

⁴Wir fragen, wie muß der Gedanke beschaffen sein, um seine Funktion⁵ zu erfüllen; aber was ist denn seine Funktion?⁶ Wenn sie nicht in ihm selbst liegt (d.h. wenn sie nicht ist, (das) zu sein, was er ist), liegt sie in seiner *Wirkung*; aber die interessiert uns nicht.

⁷Wir sind nicht im Bereiche der Erklärungen und jede Erklärung klingt uns trivial.

216 ⁸Aber dieser Verzicht auf die Erklärung macht es so schwer zu sagen, was der Gedanke uns eigentlich bedeutet.

⁹Man kann etwa sagen: er rechnet auf Grund von Gegebenem und endet in einer Handlung.

¹⁰Willst Du sehen wie der Gedanke verwendet wird: die Berechnung der Wandstärke eines Kessels und die dieser entsprechende¹¹ Verfertigung¹² muß ein Beispiel des Denkens & seiner Verwendung sein.¹³

¹⁴Der Schritt, der von der Berechnung auf dem Papier zur Handlung führt, ist noch ein Schritt der Rechnung.

1 (M): ✓

2 (V): ist ~~ganz~~

3 (V): *wesentlich*

4 (M): ✓

5 (V): Bestimmung

6 (V): Bestimmung?

7 (M): ✓

8 (M): ///

9 (M): ✓

10 (M): ✓

11 (O): entsprechenden

12 (V): Die Berechnung der Wandstärke eines Kessels und, *der* entsprechenden, Verfertigung

13 (V): Verfertigung ist ein sicheres Beispiel des Denkens.

14 (M): ///

“What is a Thought, What
Must it be Like for it to
Fulfil its Function?”

Here one Wants to Explain its
Essence by its Purpose, its Function.

¹We ask: What is a thought, what does something have to be like in order to carry out the function of a thought? And this question is² analogous to: What is a sewing machine, or how does one work? “How does it do that?” But the answer could be: Look at the stitch; everything that is essential³ to the sewing machine can be seen in it; everything else can be this way or that.

⁴We ask: How must a thought be constituted in order to fulfil its function?⁵ But what is its function,⁶ anyway? If it isn’t contained in the thought itself (i.e. if the function isn’t to be what the thought is), then it’s contained in its *effect*; but that doesn’t interest us.

⁷We are not in the realm of explanations, and every explanation sounds trivial to us.

⁸But this renunciation of an explanation makes it so difficult to say what “thought” actually means to us.

⁹One can say, for example: Thought calculates on the basis of what it’s been given, and ends up in an action.

¹⁰Do you want to see how thought gets used? The calculation of the thickness of the wall of a boiler, and the¹¹ construction that conforms to it is an example of thinking and its use.¹²

¹³The step that leads from a calculation on paper to an action is still a step within the calculation.

1 (M): ✓
2 (V): is ~~completely~~
3 (V): *essential*
4 (M): ✓
5 (V): purpose?
6 (V): purpose,
7 (M): ✓

8 (M): ///
9 (M): ✓
10 (M): ✓
11 (V): *and of the*
12 (V): to it is a good example of thinking.
13 (M): ///

¹⁵Wir sagen, wir werden das Denken untersuchen von dem Standpunkt aus, daß es auch von einer Maschine ausgeführt werden könnte.

Aber hier befinden wir uns in einer falschen Betrachtungsweise. Wir sehen das Denken als¹⁶ einen Vorgang wie das Schreiben an, oder das Weben, das¹⁷ Erzeugen eines Stoffes, etc. Und dann läßt sich natürlich sagen, daß dieser Vorgang der Erzeugung sich im Wesentlichen auch maschinell muß denken lassen.

15 (M): ////

16 (V): ~~für~~

17 (O): Weben das

¹⁴We say that we’ll investigate thinking from the standpoint of its also being carried out by a machine.

But here we’ve taken a false approach. We’re viewing thinking as a process like writing, or weaving, making cloth, etc. And then of course it will be said that by its very nature this process of making things must also be conceivable as something a machine can do.

14 (M): ////

217 ¹Ist die *Vorstellung* das Porträt par excellence, also grundverschieden, etwa, von einem gemalten Bild und durch ein solches oder etwas Ähnliches nicht ersetzbar? Ist sie das, was eigentlich eine bestimmte Wirklichkeit darstellt, – zugleich Bild und Meinung?²

Denn so ein Wunderding, scheint es, brauchen wir.

Und die Vorstellung scheint dies³ zu sein: Denn⁴ wir können uns nicht fragen, ob, z.B., unsre Vorstellung von diesem Menschen wirklich die Vorstellung von *diesem* Menschen sei, & nicht vielleicht von⁵ einem Andern der ihm nur ähnlich sieht.

⁶Aber ist nicht der Satz dieses Wunderding – der⁷ sagt, was er meint?

⁸Sokrates zu Theaitetos: „Und wer vorstellt, sollte nicht *etwas* vorstellen?“

Th.: „Notwendig“.

Sok.: „Und wer etwas vorstellt, nichts Wirkliches?“

Th.: „So scheint es“.⁹

Und wer malt sollte nicht etwas malen – & wer etwas malt, nichts wirkliches? – Ja, was¹⁰ meinst Du: das Bild was er malt oder den Gegenstand etwa den Menschen den es darstellt?

¹¹„Ist die Vorstellung nur die Vorstellung, oder ist sie Vorstellung von Etwas in der Wirklichkeit?“

¹²Und von dieser Frage aus¹³ könnte man auch die Beziehung der Vorstellung zum gemalten Bild erfassen. Denn ich kann nicht zweifeln, wenn ich mir Napoleon vorstelle, ob es wirklich Napoleon ist den ich mir vorstelle oder nicht nur jemand der ihm ähnlich sieht!

1 (M): v

2 (V): Intention?

3 (V): es

4 (V): sein, denn

5 (V): sei, oder von

6 (M): v

7 (V): Wunderding? der

8 (M): v ×××× (R): [Zu § 21]

9 (E): Vgl. Platon, *Theaitetos*, 189a.

10 (V): ~~was~~

11 (M): ××××

12 (M): v

13 (V): aus

¹Is a *Mental Image* a Portrait *Par Excellence*, and thus Fundamentally Different from, say, a Painted Picture, and not Replaceable by one or by any such Thing? Is it a Mental Image that Really Represents a Particular Reality – Simultaneously Picture and Meaning?²

For it seems that we need such a marvel.

And a mental image seems to be just that³: For we can't ask ourselves whether, for example, our mental image of this person is really the mental image of *him* and not perhaps⁴ of someone else who just looks like him.

⁵But isn't a proposition this marvel – that⁶ says what it means?

⁷Socrates to Theaetetus: "And he who thinks, doesn't he think *something*?"

Theaetetus: "Necessarily so."

Socrates: "And he who thinks something, doesn't he think something real?"

Theaetetus: "So it seems."⁸

And he who paints, doesn't he paint something – and he who paints something, doesn't he paint something real? – Well, which⁹ do you mean: the picture he's painting, or the object – say the person it represents?

¹⁰"Is a mental image only a mental image or is it a mental image of something real?"

¹¹And using this question as a starting-point, one can also grasp the relationship of a mental image to a painted picture. For if I imagine Napoleon I can't be in doubt whether it really is Napoleon I am imagining or only someone who looks like him!

1 (M): v

2 (V): Intention?

3 (V): be it

4 (V): *him*, or

5 (M): v

6 (V): marvel? One that

7 (M): v XXXX (R): [To § 21]

8 (E): Cf. Plato, *Theaetetus*, 189a.

9 (V): ~~which~~

10 (M): XXXX

11 (M): v

¹⁴Die Frage könnte aber nicht heißen: „Ist die Vorstellung immer Vorstellung von etwas, was in der Wirklichkeit existiert“ – denn das ist sie offenbar nicht immer –; sondern, es müßte heißen: bezieht sich die Vorstellung immer, wahr oder falsch, auf Wirklichkeit. – Denn das kann man von einem gemalten Bild nicht sagen. – Aber worin besteht dieses „sich auf die
218 Wirklichkeit beziehen“? Es ist doch wohl die Beziehung des Porträts zu seinem Gegenstand.

¹⁵Aber warum sollte man dann nicht sagen, daß eine Vorstellung Vorstellung eines Traumes sei?

Wenn mir heute geträumt hat, daß N mich besuche und N besucht mich nun wirklich, so war darum jene Traumphantasie keine Erwartung, und die Tatsache, daß N mich besuchte, keine Erfüllung einer¹⁶ Erwartung.

Wie kommt es daß es diese Situation nicht gibt?¹⁷ Ich habe irgend ein Vorstellungsbild vor mir und sage: „jetzt weiß ich nicht, ist das eine Erwartung oder eine Erinnerung, oder nur ein Bild ohne jede Beziehung zur Wirklichkeit“.

¹⁸Denn ich erwarte ebenso wirklich, wie ich *warte*.

14 (M): XXX

15 (M): ///

16 (V): der

17 (V): Diese Situation ist nicht denkbar:

18 (M): ?

¹²But the question couldn't be: Is a mental image always a mental image of something that exists in reality? – For obviously it isn't always that. Rather, the question should be: Does a mental image, true or false, always refer to reality? – For that it does cannot be said of a painted picture. – But what does this “referring to reality” consist in? Surely it is the relationship of a portrait to its subject.

¹³But then why shouldn't one say that a mental image is a mental image of a dream?

If I dreamed last night that N was visiting me and now N really does visit me, then that doesn't make that dream fantasy an expectation, and it doesn't make the fact that N visited me the fulfilment of an¹⁴ expectation.

How come this situation doesn't exist:¹⁵ I have some mental image in front of me and I say “I'm at a loss – is this an expectation, or a memory, or only an image with no relationship to reality?”?

¹⁶For my expecting is just as real as my *waiting*.

12 (M): XXX

13 (M): ///

14 (V): of the

15 (V): This situation is not conceivable:

16 (M): ?

219 Ist das Denken ein spezifisch organischer Vorgang? Ein spezifisch menschlich-psychischer Vorgang? Kann man ihn in diesem Falle durch einen anorganischen Vorgang ersetzen, der denselben Zweck erfüllt, also¹ sozusagen durch eine Prothese?

218v Wenn man an den Gedanken als etwas spezifisch menschliches, organisches denkt, möchte man fragen: könnte es eine Gedankenprothese geben?²

219 Der „Gedanke“, das ist nichts *organisches*, sollte nicht mit etwas organischem verglichen werden,³ das sich dann etwa durch⁴ Anorganisches⁵ wie durch eine Prothese ersetzen ließe.⁶

⁷Eine Gedankenprothese ist darum nicht möglich, weil der Gedanke für uns nichts spezifisch Menschliches ist.

Wir könnten die Rechenmaschine als eine Prothese statt der 10 Finger ansehen, aber die *Rechnung* ist nichts spezifisch Menschliches und für sie gibt es keine Prothese.⁸

1 (V): ~~aber~~
 2 (V): fragen: kann man sich eine Gedankenprothese denken?
 3 (V): *organisches*, läßt sich mit nichts organischem vergleichen;

4 (V): durch ~~ein // etwas~~
 5 (V): Totes
 6 (V): Anorganisches // Totes // ersetzen läßt.
 7 (M): // // //
 8 (V): es keinen Ersatz.

Is Thinking a Specifically Organic Process? A Process Specific to Human Psychology? If so, can one Replace it with an Inorganic Process that Fulfils the Same Purpose, that is,¹ by a Prosthesis, as it Were?

If one thinks of thought as something specifically human, organic, one is inclined to ask: Could there be² a thought-prosthesis?

"Thought" is nothing *organic*, and it shouldn't³ be compared to something organic, which could then be replaced, say, by⁴ something inorganic, as by a prosthesis.⁵

⁶A thought-prosthesis is not possible because for us thought is nothing specifically human.

We could view an adding machine as a prosthesis in place of our 10 fingers, but a *calculation* is nothing specifically human, and there is no prosthesis⁷ for it.

1 (V): Purpose, ~~but~~

2 (V) Can one conceive of

3 (V): can't

4 (V): by a // something

5 (V): something inorganic. // something dead.

6 (M): ////

7 (V): is no substitute

Ort des Denkens.

220

Das Denken: ein Vorgang im Gehirn & Nervensystem; im Geist; im¹ Mund & Kehlkopf; auf dem Papier.

²Eine der gefährlichsten Ideen ist, merkwürdigerweise, daß wir mit dem Kopf, oder im Kopf denken.

³Die Idee vom Denken als einem⁴ Vorgang im Kopf, in dem gänzlich abgeschlossenen Raum, gibt ihm⁵ etwas Okkultes.⁶

⁷„Das Denken geht im Kopf vor sich“ heißt eigentlich nichts anderes, als, unser Kopf hat etwas mit dem Denken zu tun. Man sagt freilich auch: „ich denke mit der Feder auf dem Papier“ und diese Ortsangabe ist mindestens so gut, wie die erste.

⁸Wenn wir fragen „wo geht das Denken vor sich“, so ist dahinter immer die Vorstellung eines maschinellen Prozesses, der in einem abgeschlossenen Raum vor sich geht, sehr ähnlich, wie die Vorgänge⁹ in der Rechenmaschine.

221 ¹⁰Schon die Bezeichnung „Tätigkeit“ für's Denken ist in einer Weise irreführend. Wir sagen: das Reden ist eine Tätigkeit unseres Mundes. Denn wir sehen dabei unseren Mund sich bewegen und fühlen es, etc. In diesem¹¹ Sinne kann man nicht sagen, das Denken sei eine Tätigkeit unseres Gehirns.

Und kann man sagen, das Denken sei eine Tätigkeit des Mundes oder des Kehlkopfs oder der Hände (etwa, wenn wir schreibend denken)?

¹²Zu sagen, Denken sei eben eine Tätigkeit des Geistes, wie Sprechen des Mundes, ist eine Travestie (der Wahrheit).

Wir gebrauchen eben ein Bild, wenn wir von der Tätigkeit des Geistes reden.

¹³Das Denken ist nicht mit der Tätigkeit eines Mechanismus zu vergleichen, den wir von außen sehen, in dessen Inneres wir aber erst dringen müssen.¹⁴

1 (V): Geist; ~~auf dem~~

2 (M): ← ✓

3 (M): ← ✓

4 (V): Die Idee von einem // Die Idee ~~es sei ein~~

5 (V): gibt dem Denken

6 (O): Okkultes.

7 (M) ✓

8 (M): ///

9 (V): wie der Vorgang

10 (M): ///
– Mundes

11 (V): demselben

12 (M): ✓

13 (M): ///

14 (V₁): Das Denken ist nicht mit der Tätigkeit eines Mechanismus zu vergleichen, die wir von außen sehen // der wir von außen zuschauen //, deren Inneres aber wir sehen müßten // müssen // um sie zu verstehen. (V₂): Das Denken ist nicht die Tätigkeit eines Mechanismus, der wir von außen zusehen, deren Inneres aber erforscht werden muß.

Location of Thinking.

Thinking: a process in the brain and nervous system; in the mind; in the¹ mouth and larynx; on paper.

²Remarkably, one of the most dangerous ideas is that we think with or in our heads.

³The idea of thinking as a⁴ process in the head, in that completely closed-off space, endows it with⁵ an occult quality.

⁶“Thinking takes place in the head” really means nothing other than: Our head has something to do with thinking. To be sure, one also says: “I think with pen on paper”, and this specification of location is at least as good as the first one.

⁷The question “Where does thinking take place?” always implies the mental image of a mechanical process taking place in an enclosed space, very similar to the processes⁸ in an adding machine.

⁹In a way, the designation “activity” for thinking is already misleading. We say: Speaking is an activity of our mouth. For we see and feel our mouth move in the process, etc. We can’t say in this sense¹⁰ that thinking is an activity of our brain.

And can one say that thinking is an activity of our mouth or larynx or our hands (say, when we think while writing)?

¹¹To say that thinking is simply an activity of the mind, as speaking is of the mouth, is a travesty (of the truth).

When we talk about the activity of the mind all we’re doing is using an image.

¹²Thinking is not to be compared to the activity of a mechanism that we see from the outside, but into whose inner workings we have yet to penetrate.¹³

1 (V): mind; ~~from the~~

2 (M): ← ✓

3 (M): ← ✓

4 (V): The idea of a // The idea ~~that there is a~~

5 (V): space, gives thinking

6 (M): ✓

7 (M): ///

8 (V): the process

9 (M): /// – of our mouth.

10 (V): in the same sense

11 (M): ✓

12 (M): ///

13 (V₁): Thinking is not to be compared to the activity of a mechanism, which activity we see from the outside, // we observe from the outside, // but whose interior we would have to see // we have to see // in order to understand it. (V₂): Thinking is not the activity of a mechanism, which activity we observe from the outside, but whose interior must be investigated.

¹⁵Die Wendung „daß etwas in unserem Geist vor sich geht“, soll, glaube ich, andeuten, daß es im physikalischen Raum nicht lokalisierbar ist. Von Magenschmerzen sagt man nicht, daß sie in unserem Geist vor sich gehen, obwohl der physikalische Magen ja nicht der unmittelbare Ort der Schmerzen ist, in dem Sinn, in welchem er der Ort der Verdauung ist.

15 (M): ///

¹⁴The expression “that something is going on in our mind” is supposed to suggest, I believe, that it can’t be situated in physical space. One doesn’t say of a stomach-ache that it is going on in our mind, even though, as we know, the physical stomach isn’t the immediate location of the pain, in the sense in which it is the location of digestion.

14 (M): ///

Gedanke und Ausdruck des Gedankens.

222

Das Denken ein Vorgang in einem ätherischen Mechanismus.

Der Schrei als Ausdruck des Schmerzes, der Satz als Ausdr. des Gedankens.

221v

Denken nennen wir einen bestimmten *Gebrauch* von Symbolen.

Der Gedanke ist nicht eine Art von Stimmung die durch seinen¹ Ausdruck wie durch eine Droge hervorgerufen wird.

Und die Verständigung, die Vermittlung des Gedankens durch die Sprache² ist nicht der Vorgang daß ich durch ein Gift im Andern die gleichen Schmerzen hervorrufe wie ich sie habe.

Was für einen Vorgang³ könnte man „Gedankenlesen“ nennen.

222

⁴Der Gedanke ist wesentlich das, was durch den Satz ausgedrückt ist, wobei „ausgedrückt“ nicht heißt „hervorgerufen“. Ein Schnupfen wird durch ein kaltes Bad hervorgerufen, aber nicht⁵ ausgedrückt.

⁶Man hat nicht den Gedanken, und *daneben* die Sprache. – Es ist also nicht so, daß man für den Andern die Zeichen, für sich selbst aber einen stummen Gedanken hat. Gleichsam einen gasförmigen oder ätherischen Gedanken, im Gegensatz zu sichtbaren, hörbaren Symbolen.

⁷Man könnte so sagen, am *Gedanken* ist nichts wesentlich privat. – Es kann jeder in ihn Einsicht nehmen.

⁸Man hat nicht den Zeichenausdruck und daneben, für sich selbst, den (gleichsam dunkeln) Gedanken. Dann wäre es doch auch zu merkwürdig, daß man den Gedanken durch die Worte sollte wiedergeben können.

223

⁹D.h.: wenn der Gedanke nicht schon artikuliert wäre, wie könnte der Ausdruck durch die Sprache ihn artikulieren. Der artikuliert Gedanke aber ist in allem Wesentlichen ein Satz.

1 (V): den
2 (V): die Verständigung ~~mittels der~~ Sprache
3 (V): Welchen Vorgang
4 (M): ///
5 (V): nicht ~~durch ein kaltes Bad~~

6 (M): ✓
7 (M): ///
8 (M): ///
9 (M): ///

Thought and Expression of Thought.

Thinking: a process in an ethereal mechanism.

The scream as an expression of pain, the proposition as an expression of thought.

We call a specific *use* of symbols thinking.

A thought is not a kind of mood that is triggered by expressing it, as by a drug.

And communication, transmitting¹ a thought through language, is not the same thing as my using a poison to elicit in someone else the same pain that I feel.

What kind of a process² could one call "thought-reading"?

³A thought is essentially what is expressed by a proposition, in which context "expressed" does not mean "brought about". A cold is brought about, but not expressed, by a cold bath.⁴

⁵One doesn't have a thought and *apart from it* language. – So it's not that one has the signs for someone else, but only a mute thought for oneself. A gaseous or ethereal thought, as it were, as opposed to visible, audible symbols.

⁶One could put it this way: There is nothing essentially private about a *thought*. – Everybody can look into it.

⁷One doesn't have an expressive symbol and apart from it, for oneself, the (as it were, "dark") thought. For if that were the case, it would certainly be strange beyond belief that one should be able to render a thought with words.

⁸That is to say: if a thought were not already articulated, how could expressing it by means of language articulate it? Rather, an articulated thought is essentially a proposition.

1 (V): communicating

2 (V): Which process

3 (M): ///

4 (V): brought about by a cold bath, but not expressed ~~by a cold bath~~.

5 (M): ✓

6 (M): ///

7 (M): ///

8 (M): ///

Um einzusehen, wie Gedanke & Rede sich zu einander verhalten bedenke,¹⁰ ob¹¹ das „Verständnis“ (der Gedanke) einer Rechnung (¹²einer Multiplikation z.B.) als gesonderter Prozeß neben dem Rechnungsvorgang einherläuft.

¹³Wenn man das Verstehen, Wissen, etc., als *Zustand* auffaßt, dann nur hypothetisch im Sinne einer psychischen Disposition, welche auf derselben Stufe steht, wie eine physiologische Disposition.

¹⁴„Dachtest Du denn, als Du den Satz sagtest, daran, daß Napoleon . . .“ – „ich dachte nur, was ich sagte“.

¹⁵Plato nennt die Hoffnung eine Rede. (*Philebos*)¹⁶

¹⁷Der Gedanke ist kein geheimer – und verschwommener – Prozeß, von dem wir nur Andeutungen in der Sprache sehen, als wäre die Negation ein Stoß und der Gedanke darauf wie ein unbestimmter Schmerz, von diesem Stoß hervorgerufen, aber gänzlich von ihm verschieden.

¹⁸Gedankenlesen kann nur darin bestehen, daß wir Zeichen interpretieren, also einfach lesen (nur vielleicht *andere* Zeichen). Oder aber es besteht darin, daß Einem, wenn man des Anderen Hand hält (oder in anderer Art mit ihm in Kontakt steht) Gedanken kommen, die durch nachträgliche¹⁹ Fragen als die Gedanken auch des Anderen erkannt werden. Aber da
224 handelt es sich überhaupt um kein Lesen, sondern es wäre nur die *Hypothese* erlaubt, daß zwei Leute unter gewissen Umständen das Gleiche dächten.

²⁰Ist das Denken ein augenblicklicher Vorgang oder etwa ein andauernder Zustand, wovon die Worte, der Satz, nur eine ungeschickte Wiedergabe sind (sodaß man etwa sagen könnte, wie von dem Eindruck einer Landschaft: Worte können das gar nicht wiedergeben)? Der Gedanke braucht solange wie sein Ausdruck. Weil der Ausdruck der Gedanke ist.

²¹Ich habe (einmal) diesen Ausspruch eines französischen²² Politikers gelesen,²³ die französische Sprache sei dadurch ausgezeichnet, daß in ihr die Wörter in der Ordnung folgen, wie man wirklich denkt.

²⁴Niemand würde fragen, ob die Multiplikation zweier Zahlen (etwa nach der gewöhnlichen Art durchgeführt) gleichläuft mit dem Denkvorgang.²⁵ Man betrachtet eben die Mult. als ein Instrument.²⁶ Während man den Satz²⁷ nicht als ein Instrument ansieht.

²⁸Die Idee, daß eine Sprache eine Wortfolge haben kann, die der Reihenfolge des Denkens entspricht, im Gegensatz zu anderen Sprachen,²⁹ rührt von der Auffassung her, daß das Denken vom Ausdruck der Gedanken getrennt vorgeht. Also ein wesentlich anderer

10 (V): bedenke ~~man~~,

11 (V): Wie sich der Gedanke zur Rede verhält, kann man am besten verstehen, wenn man bedenkt, ob ~~etwa~~

12 (V): Rechnung (~~etwa~~ // z.B.

13 (M): ///

14 (M): /// ✓ (R): √ S. 154/5 ✓ S. 158/1 ✓

15 (M): ///

16 (E): Platon, *Philebos*, 40a.

17 (M): ///

18 (M): ✓

19 (V): nachträgliches

20 (M): ///

21 (M): ✓

22 (O): französischer

23 (V): Ich habe ~~einmal gelesen, daß~~ ein französischer Politiker ~~gesagt hat~~,

24 (M): ✓

25 (V): Gedanken. // Gedankenprozeß.

26 (V): Weil jeder die Multiplikation als ein Instrument ansieht. // betrachtet

27 (V): ~~Gedanken~~

28 (M): ✓

29 (V): zu einer anderen Sprache,

To understand how thought and speech relate to each other, consider whether⁹ the “understanding” (the thought) of a calculation (¹⁰one of multiplication, for example) runs alongside the process of calculation as a separate process.

¹¹If one conceives of understanding, knowing, etc. as a *state*, then one does so only hypothetically, in the sense of a psychological disposition that’s on the same level as a physiological one.

¹²“When you uttered that sentence, were you thinking of the fact that Napoleon . . . ?” – “I only thought what I said.”

¹³Plato calls hope a speech. (*Philebus*.)¹⁴

¹⁵A thought is no secret – and blurred – process of which we only see hints in language, as if negation were a jolt and the thought following it like an indefinite pain, elicited by this jolt, but completely different from it.

¹⁶Reading another’s thoughts can only consist in our interpreting signs, i.e. in our simply reading (perhaps only *different* signs). Or it consists in having thoughts – when one holds someone else’s hand or is in contact with him in some other way – that, when we ask him later, we can recognize as his thoughts. But here it is not a matter of reading at all; here the only legitimate thing would be the *hypothesis* that under certain circumstances two people might think the same thing.

¹⁷Is thinking a momentary process or, say, a continuing state, of which the words, the sentence, are only a clumsy rendering (so that one might say, as of the impression of a landscape: Words can’t even come close to expressing that)? A thought takes as long as its expression. Because the expression is the thought.

¹⁸(Once) I read this statement by a French politician:¹⁹ The French language has the special merit that words in it follow upon each other in the order in which one really thinks.

²⁰Nobody would ask whether the multiplication of two numbers (carried out, say, in the usual way) runs parallel with the thought process.²¹ Multiplication is simply regarded²² as an instrument. Whereas one doesn’t view a proposition²³ as an instrument.

²⁴The idea that one language, as opposed to other languages,²⁵ can have a sequence of words that corresponds to the sequence of thinking originates in the view that thinking takes place separately from the expression of thoughts. And is therefore an essentially different process.

9 (V): One can best understand how a thought relates to speech if one considers whether **perhaps**

10 (V): (~~for example~~ // e.g.

11 (M): ///

12 (M): /// ✓ (R): ∀ p. 154/5 ✓ P. 158/1 ✓

13 (M): ///

14 (E): Plato, *Philebus*, 40a.

15 (M): ///

16 (M): ✓

17 (M): ///

18 (M): ✓

19 (V): ~~Once I read that~~ a French politician ~~had said:~~

20 (M): ✓

21 (V): with thought.

22 (V): Because everyone looks at // regards // multiplication

23 (V): ~~thought~~

24 (M): ✓

25 (V): to another language,

Vorgang ist. Nach dieser Auffassung könnte man nun freilich sagen: Die wesentlichen Eigenschaften des Negationszeichens offenbaren sich freilich erst *nach und nach* im Gebrauch, aber ich *denke* die Negation auf einmal. Das Zeichen „nicht“ ist ja nur ein Hinweis auf den Gedanken „nicht“. Es stößt mich nur, daß ich das Rechte denke. (Es ist nur Signal.)

225 ³⁰Willkürlichkeit des sprachlichen Ausdrucks: Könnte man sagen: das Kind muß das *Sprechen* einer bestimmten Sprache zwar lernen, aber nicht das Denken, d.h. es würde von selber denken, auch ohne irgend eine Sprache zu lernen? ((D.h. Willkürlichkeit, wie sie gewöhnlich aufgefaßt wird. Sozusagen: „auf den Gedanken kommt es an, nicht auf die Worte“.))

Ich meine aber, wenn es denkt, so macht es sich eben Bilder und diese sind in einem gewissen Sinne willkürlich, insofern nämlich, als andere Bilder denselben Dienst geleistet hätten. Und andererseits ist ja die Sprache auch natürlich entstanden, d.h., es muß wohl einen ersten Menschen gegeben haben, der einen bestimmten Gedanken zum ersten Mal in gesprochenen Worten ausgedrückt hat. Und übrigens ist das Ganze gleichgültig, weil jedes Kind, das die Sprache lernt, sie nur in dieser Weise lernt, daß es anfängt in ihr zu denken. Plötzlich anfängt; ich meine: Es gibt kein Vorstadium, in welchem das Kind die Sprache zwar schon gebraucht, sozusagen zum Zweck der Verständigung³¹ gebraucht, aber noch nicht in ihr denkt.

224v Lernt das Kind nur sprechen, & nicht auch denken? Lernt es den Sinn des Multiplizierens *vor*, oder *nach* dem³² Multiplizieren?

Oft könnte³³ man auf die Frage „was meinst Du, wenn Du sagst . . . ?“ nur antworten: ich meine nur was ich sage.

„Ich bin nicht ganz sicher, aber ziemlich sicher daß er kommen wird.“³⁴ Ich meine, was ich sage.

225 Ist es quasi eine Verunreinigung des Sinnes, daß wir ihn in einer bestimmten Sprache, mit ihren Zufälligkeiten, ausdrücken und nicht gleichsam körperlos und rein? ³⁵Nein, denn es ist wesentlich, daß ich die Idee der Übersetzung von einer Sprache in die andere verstehe.

Spiele ich eigentlich doch nicht das Schachspiel selbst, da die Figuren ja auch andere Formen haben könnten?³⁶

³⁷Da der Sinn eines Satzes ganz in der Sprache fixiert ist, und es auf den Sinn ankommt, so ist jede Sprache gleich gut. Der Sinn aber ist, was Sätze, die in einander übersetzbar sind, gemein haben.

224v Beweise die das Dez. Syst. verwenden.

30 (R): \forall S. 156/4,5 ✓

31 (V): sozusagen ~~zur~~ Verständigung

32 (V): oder *nach*, dem

33 (V): ~~müßte~~

34 (V): „Ich ~~weiß~~ ziemlich sicher daß er kommen wird.“ ~~nicht ganz sicher~~

35 (M): J

36 (V): ja auch anders sein könnten?!

37 (M): J

Now according to this view one could undoubtedly say: True, the essential properties of the negation sign become apparent only gradually as it's being used, but I *think* the negation all at once. The sign "not", after all, is just a reference to the thought "not". It just jolts me into thinking the right thing. (It's only a signal.)

²⁶Arbitrariness of linguistic expression. Could one say: A child does have to learn to *speak* a particular language, but not to think, i.e. it would think of its own accord, even without learning any language? ((That is, arbitrariness as it is usually understood. As if to say: "The thought is what counts, not the words".))

But I believe that when a child thinks, it simply creates images for itself, and in a certain sense these images are arbitrary, i.e. other images would have served as well. And on the other hand, of course, language also came about naturally, i.e. there must have been a first human who expressed a particular thought in spoken words for the first time. And furthermore, all of this is irrelevant because every child who learns a language only learns it by beginning to think in it. By beginning straight off; I mean: there is no preliminary stage in which the child already uses the language, uses it for the purpose of communication,²⁷ as it were, but doesn't yet think in it.

Does a child learn only how to speak and not also how to think? Does it learn the meaning of multiplying *before* or *after* multiplying?

When asked "What do you mean when you say . . . ?" often the only answer that could be²⁸ given is: I mean only what I say.

"I'm not completely sure, but fairly sure that he will come."²⁹ I mean what I say.

Is it so to speak a pollution of sense that we express it in a particular language with its contingencies, and not, as it were, disembodied and pure?³⁰No, for it's essential that I understand the idea of translating from one language into another.

Am I really not playing the game of chess itself, since to be sure the figures could be shaped differently³¹!?

³²Since the sense of a proposition is completely fixed in a language, and since sense is what counts, each language is equally good. But sense is what sentences that can be translated into each other have in common.

Proofs that use the decimal system.

26 (R): \forall p. 156/4,5 ✓

27 (V): ~~for~~ communication,

28 (V): that ~~has to be~~

29 (V): "I ~~know~~ pretty surely that he will come, ~~but not~~
~~completely surely~~."

30 (M): \int

31 (V): could be different

32 (M): \int

Was ist der Gedanke? Was ist sein Wesen? „Der Gedanke, dieses seltsame Wesen“.

Sage Dir (beim Philosophieren) immer wieder:¹ daß es eine Verführung ist, die² Dich das Denken als einen geheimn. Vorg. sehen läßt.³

Der Gedanke, soweit man überhaupt von ihm reden kann, muß etwas ganz hausbackenes sein. (Man pflegt, sich ihn als etwas Ätherisches, noch Unerforschtes, zu denken; als handle es sich um Etwas, dessen Außenseite bloß wir kennen, dessen Wesen aber noch unerforscht ist, etwa wie unser Gehirn.)⁴

⁵Der Gedanke hat aber nur eine Außenseite und kein Innen. Und ihn analysieren heißt nicht in ihn dringen.

Man kann wieder nur die Grammatik des Wortes „denken“⁶ explicit machen. (Und so des Wortes „erwarten“,⁷ etc.)

1 (V): Sage Dir: // Sage Dir (beim Philosophieren):

2 (V): was

3 (V₁): daß Denken // ~~denken~~ // etwas hausbackenes // etwas ganz hausbackenes // sein muß. Daß es sich nicht darum handelt // Es handelt sich nicht darum //, ein geheimnisvolles Wesen zu studieren. (V₂): | | daß // Daß // Du verführt bist, – wenn Du ~~meinst~~ denkst, daß ~~es~~ hier // da // ein seltsamer Vorgang vorliegt // ist //. (V₃): – daß Du verführt bist, ~~sewie~~ wenn Du das Denken als seltsamen Vorgang

(an)siehst. (V₄): daß Du verführt bist, wenn Dir das Denken als ein seltsamer // als seltsamer // Vorgang erscheint. (V₅): ; daß es eine Verführung ist, zu meinen, // wenn wir denken, // daß hier etwas Geheimnisvolles vorliegt // daß uns hier ein geheimnisvoller Vorgang vorliegt.

4 (V): wie das unseres Gehirns.)

5 (M): ///

6 (V): „erwarten“

7 (V): „denken“,

What is Thought? What is its Essence? “Thought, this Peculiar Being.”

Tell yourself over and over (when doing philosophy):¹ that it is a seduction that causes you to see thinking as a mysterious process.²

A thought, in so far as one can talk about it at all, has to be something utterly prosaic. (Usually one thinks of it as something ethereal, something still unexplored; as if it were a matter of something of which we know only the outside, whose essence, however, is still unexplored, say like our brain.)³

⁴But a thought has only an exterior and no inside. And to analyse it does not mean to penetrate into it.

Once again, all one can do is to make the grammar of the word “think”⁵ explicit. (And so too of the word “expect”,⁶ etc.).

1 (V): Tell yourself: // Tell yourself (when doing philosophy):

2 (V₁): : that thinking has to be something // utterly // prosaic. That it is not a matter // It is not a matter // of studying a mysterious being (V₂): | | : that you have been led astray, – if you think believe, that here // there // is a strange process // a strange process is going on. (V₃): philosophy) – that you have been led astray as soon as if you see (look at) think-

ing as a strange process. (V₄): : you have been led astray if thinking looks like a strange process to you.

(V₅): philosophy); that it is a seduction to believe // if we think // that something mysterious is the case // that here we have a mysterious process.

3 (V): like that of our brain.)

4 (M): ///

5 (V): “expect”

6 (V): “think”,

Zweck des Denkens. Grund des Denkens.

Wozu denkt der Mensch? Weil Denken sich bewährt hat?
Denkt man, weil man denkt, es sei vorteilhaft zu denken?
Erzieht er seine Kinder weil sich das¹ bewährt hat?

²Wie wäre herauszubringen,³ *warum* er denkt?

Wozu denkt der Mensch? wozu ist es nütze? Wozu *berechnet* er Dampfkessel und überläßt ihre Wandstärke⁴ nicht dem Zufall?⁵ Es ist doch nur Erfahrungstatsache, daß Kessel, die so berechnet wurden, nicht so oft explodieren.⁶ Aber so, wie er alles eher täte, als die Hand ins Feuer stecken, das ihn früher gebrannt hat, so wird er alles eher tun, als den Kessel nicht berechnen. Da⁷ uns aber Ursachen nicht interessieren,⁸ können⁹ wir nur sagen: die Menschen denken tatsächlich – ¹⁰sie gehen (z.B.) auf diese Weise vor, wenn sie einen Dampfkessel bauen. Und dieses Vorgehen hat sich bewährt. – Kann nun ein so erzeugter Kessel nicht explodieren? Oh freilich.¹¹ – Warum denn nicht?¹²

227v Und doch kann man sagen, das Denken habe sich bewährt.

Es seien jetzt weniger Kesselexplosionen als früher seit man die Dimensionen etwa nicht mehr nach dem Gefühl bestimmt sondern auf die & die Weise berechnet. Oder, seit man jede Rechnung unabhängig von zwei Leuten ausführen läßt.¹³

Manchmal, also, denkt man weil es sich bewährt hat.

227 ¹⁴Sich etwas überlegen. Ich überlege, ob ich jetzt ins Kino gehen soll. Ich mache mir ein Bild der Zeiteinteilung des Abends. Aber *wozu* tue ich das?? Ich mache ja kein „Gedankenexperiment“!

1 (V): weil es sich

2 (M): §

3 (V): herauszubringen:

4 (V): überläßt ~~die Dimensionen~~

5 (V): und überläßt ~~es~~ nicht dem Zufall ~~wie stark~~
~~er ihre Wand // Wände // macht // wie stark die~~
~~Wand des Kessels wird //?~~

6 (V): ~~explodierten.~~

7 (V): Wenn

8 (V): interessieren, ~~so~~

9 (V): werden

10 (V): tatsächlich:

11 (V): explodieren? ~~Oh ja. // Doch!~~

12 (V): Warum ~~sollte er~~ nicht?

13 (V):

Denkt der Mensch also, weil Denken sich bewährt hat?

Weil er denkt, es sei vorteilhaft zu denken?

In gewissen speziellen Fällen wird man das sagen können.

In gewissen, speziellen, Fällen ~~aber~~ wird man // aber // sagen können: Heute berechnet man dies, ~~weil~~ & überläßt es nicht // nicht mehr // dem Gefühl (oder // oder dem // Zufall) weil es sich // sich das // bewährt hat.

Man kann auch sagen es hat sich *bewährt* diese Berechnungen immer genau kontrollieren zu lassen.

14 (M): J

The Purpose of Thinking. The Reason for Thinking.

Why do humans think? Because it has proved its worth?

Does one think because one thinks that it is advantageous to think?

Do humans raise their children because that¹ has proved its worth?

²How could one find out³ *why* humans think?

Why do humans think? What is it good for? Why do they *make calculations* for boilers and not leave the thickness of their walls⁴ to chance?⁵ After all, it is only an empirical fact that boilers calculated this way don't explode⁶ so often. But just as they will do anything rather than put their hands into the fire that once burned them, they will do anything rather than not calculate for a boiler. But as causes don't interest us, we can only say⁷: Humans do in fact think – this, for instance, is the way they proceed when they build a boiler, and this procedure has proved its worth. – Now can't a boiler produced this way explode? Oh, certainly. – And why not?⁸

And yet one can say that thinking has proved its worth.

That there are fewer boiler explosions now than before – ever since we stopped determining their dimensions instinctively, and started calculating them in such and such a way. Or ever since we have had every calculation worked out independently by two people.⁹

So *sometimes* one does think because it has proved its worth.

¹⁰To think about something. I'm thinking about whether to go to the movies now. I create a mental image of the evening's schedule. But *what* do I do that *for*? I'm not, after all, performing any "thought-experiment"!

1 (V): it

2 (M): §

3 (V): could it be brought out:

4 (V): leave ~~the dimensions~~

5 (V): and not leave ~~it~~ to chance ~~how thick they make their wall // walls // how thick the wall of the boiler is to be made // ?~~

6 (V): way ~~didn't explode~~

7 (V): But if causes don't interest us, we will only say

8 (V): explode? ~~Oh, yes. // Sure! // Why should it not?~~

9 (V): So do humans think because thinking has proved its worth?

Because they believe it is advantageous to think?

In certain special cases one can say that.

In certain special cases // however // one can say: Nowadays one calculates this ~~because~~ and does not leave // and no longer leaves // it to instinct (or // to // chance) because it // that // has proven its worth.

One can also say that it has *proven its worth* always to have these calculations accurately checked.

10 (M): †

Wir verstehen alle, was es heißt, in einem Kalender nachschlagen, an welchem Tag der
 228 Woche wir frei sind. Das Bild, das wir sehen, ist etwa

M	D	M	D	F	S	S
---	---	---	---	---	---	---

 und wir sagen nun, wir seien nur Freitag frei, und handeln
 demgemäß. Mit welcher Berechtigung handeln wir nach dem Bild?
 Fahrplan

Wir erwarten etwas und handeln der Erwartung gemäß. Muß die Erwartung eintreffen?
 – Nein. Warum aber handeln wir nach der Erwartung? Weil wir dazu getrieben werden,
 wie dazu, einem Automobil auszuweichen, uns niederzusetzen, wenn wir müde sind, und¹⁵
 aufzuspringen, wenn wir uns auf¹⁶ einen Dorn gesetzt haben.

¹⁷Die Natur des Glaubens an die Gleichförmigkeit des Geschehens wird vielleicht am
 klarsten im Falle, in dem wir Furcht vor dem Erwarteten¹⁸ empfinden. Nichts könnte mich
 dazu bewegen, meine Hand in die Flamme zu stecken, obwohl ich mich doch *nur in der*
Vergangenheit verbrannt habe.

¹⁹Daß²⁰ mich das Feuer brennen wird, wenn ich die Hand hineinstecke: das ist Sicherheit.

D.h., da siehst Du,²¹ was Sicherheit bedeutet. (Nicht nur was das Wort „Sicherheit“ bedeutet,
 sondern auch, was es mit ihr auf sich hat.)

²²Der Glaube, daß mich das Feuer brennen wird, ist von der Natur der Furcht, daß es
 mich brennen wird.

²³Wenn man mich ins Feuer zöge, so würde ich mich wehren und nicht gutwillig gehn;
 und ebenso würde ich schreien: „es²⁴ wird mich brennen!“ und ich würde nicht schreien:
 „vielleicht wird es ganz angenehm sein!“

Ich kalkuliere *so*, weil ich nicht anders kalkulieren kann. (Ich glaube *das*, weil ich nicht
 anders glauben kann.)

229 Was sollte ich als Grund angeben dafür, weswegen²⁵ man denken soll.

Es sei denn einen²⁶ Grund von der Art dessen, weswegen man essen soll.

Es ist eines: einen Gedanken aus anderen begründen, – ein anderes: das Denken begründen.²⁷ Das,
 glaube ich, ist es, was unsere Untersuchung rein beschreibend macht.

²⁸Ich weiß nicht, *warum* ich denken sollte. Aber ich denke.

Es läßt sich kein rationaler Grund angeben, weshalb wir denken sollten.²⁹

³⁰Ich nehme an, daß dieses Haus nicht in einer halben Stunde zusammenstürzen wird.
 Wann nehme ich das an? Die ganze Zeit? und was ist dieses Annehmen für eine Tätigkeit?
 Heißt, das annehmen, nicht (wieder) zweierlei? Einmal bezeichnet es eine hypothetische
 psychologische Disposition; einmal den Akt des Denkens, Ausdrückens, des Satzes „das Haus

15 (O): sind und

16 (V): auf ~~de~~

17 (M): ←

18 (V): dem erwarteten Ereignis

19 (M): ←

20 (V): Daß ~~mei~~

21 (V): da sehe ich, // da sehen wir,

22 (M): ←

23 (M): ←

24 (V): schreien: „das Feuer

25 (V): Es läßt sich kein // Man kann keinen //
 Grund angeben, weswegen // Was sollte ich für
 einen Grund angeben, weswegen

26 (V): ein

27 (V): Man kann einen Gedanken aus anderen
 begründen, aber nicht das Denken.

28 (M): v

29 (V): müßten.

30 (M): Fahrplan

All of us understand what it means to check in a calendar to see on which day of the week we are free. The image that we see is, say

M	T	W	T	F	S	S
---	---	---	---	---	---	---

, and now we say that we're free only on Friday and act accordingly. What justification do we have for acting in accordance with that image?

A travel timetable.

We expect something and act in accordance with our expectation. Does the expectation have to come about? – No. So why do we act in accordance with an expectation? Because we are driven to do this as we are driven to dodge a car, to sit down when we're tired and to jump up when we've sat on a thorn.

¹¹Possibly the essence of our belief in the uniformity of nature comes out most clearly when we fear what we expect.¹² Nothing could get me to put my hand in a flame even though it was *only in the past*, after all, that I got burned.

¹³The fire will burn me if I stick my hand in it: that is certainty.

That is to say: here you see¹⁴ what certainty means. (Not only what the word “certainty” means, but also what certainty is all about.)

¹⁵The belief that fire will burn me is of the same nature as the fear that it will burn me.

¹⁶If I were dragged into a fire I would resist and not go willingly; likewise I would shout: “It’s¹⁷ going to burn me!”, not: “Maybe it will be quite pleasant!”

I’m calculating *thus* because I cannot calculate otherwise. (I believe *this* because I cannot believe otherwise.)

What should I list as a reason for¹⁸ why one should think?

Unless it is a reason of the sort why one should eat.

It is one thing to justify a thought on the basis of other thoughts – something else to justify thinking.¹⁹ It is this, I believe, that makes our investigation purely descriptive.

²⁰I don’t know *why* I should think. But I do think.

It is not possible to give a rational basis for why we should²¹ think.

²²I assume that this house won’t collapse in half an hour. When do I assume that? All the time? And what kind of an activity is this assuming? Doesn’t assuming that (again) mean two different things? On the one hand it designates a hypothetical psychological disposition; on the other an act of thinking, of expressing the sentence “The house won’t collapse”.²³ In the first sense the criterion for my assuming that²⁴ is what I normally say, feel and do; in

11 (M): ←

12 (V): fear the ~~event~~ we expect.

13 (M): ←

14 (V): here I see // here we see

15 (M): ←

16 (M): ←

17 (V): shout: “The fire’s

18 (V): No reason can be given // One can give no reason // What kind of a reason should I give

19 (V): One can justify a thought on the basis of other thoughts, but not thinking.

20 (M): v

21 (V): we have to

22 (M): Travel timetable

23 (V): of expressing that sentence.

24 (V): for my making that assumption

wird nicht einstürzen³¹.³¹ Im ersten Sinne ist das Kriterium dafür, daß ich das annehme,³² das,³³ was ich sonst sage, fühle und tue; im andern Sinn, daß ich einen Satz sage, der wieder ein Glied einer Kalkulation³⁴ ist. Nun sagt man: Du mußt aber doch einen Grund haben, das anzunehmen, sonst ist die Annahme ungestützt und wertlos (erinnere Dich daran, daß wir zwar auf der Erde stehen, die Erde aber nicht wieder auf irgend etwas; und Kinder glauben, sie müsse fallen, wenn sie nicht gestützt ist). Nun, ich habe auch Gründe zu meiner Annahme. Sie lauten etwa: daß das Haus schon jahrelang gestanden hat, aber nicht so lang, daß es schon baufällig sein könnte, etc. etc. *Was* ein Grund *wofür* ist (Was als Grund wofür gilt), kann von vornherein angegeben werden und bestimmt³⁵ einen Kalkül, in welchem³⁶ eben das eine ein Grund des andern ist. Soll aber nun ein Grund für diesen ganzen Kalkül gegeben werden, so sehen wir, daß er fehlt. Fragt man aber, ob der Kalkül also eine willkürliche Annahme ist, so ist die Antwort, daß er es so wenig ist, wie die Furcht vor dem Feuer oder einem wütenden Menschen, der sich uns nähert. Ist es Willkür,³⁷ daß wir *das* als Grund von *dem* betrachten? Ist es Willkür,³⁸ daß wir auf die Erzählung³⁹ dieser Hund habe⁴⁰ gebissen, diesem Hund nicht in die Nähe gehen wollen?

230

Wenn man nun sagt: gewiß sind doch die Regeln der Grammatik, nach denen wir vorgehen und operieren, nicht willkürlich; so müßte man zur Antwort fragen: Gut also, warum denkt denn ein Mensch, wie er denkt? warum geht er denn durch diese Denkhandlungen? (gefragt ist hier natürlich nach den *Gründen*,⁴¹ nicht Ursachen). Nun, da lassen sich Gründe in dem Kalkül angeben; und ganz zum Schluß ist man dann versucht zu sagen: „es ist eben sehr wahrscheinlich, daß sich das Ding jetzt so verhalten wird, wie es sich immer verhalten hat“,⁴² – oder dergleichen. Eine Redensart, die den Anfang des Raisonnements verhüllt und an diesem Anfang⁴³ eine ähnliche Rolle spielt, wie der Schöpfer am Anfang⁴⁴ der Welt, welcher⁴⁵ zwar in Wirklichkeit nichts erklärt, aber ein den Menschen acceptabler Anfang ist.⁴⁶

229v

230

Das, was so schwer einzusehen ist: Solange wir im Bereich der W.F. Spiele bleiben, kann uns eine Änderung der Gramm. nur von *einem* solchen Spiel zu einem *andern* führen, aber nicht⁴⁷ von etwas Wahrem zu etwas Falschem. Und wenn wir andererseits aus dem Bereich dieser Spiele her austreten, so nennen wir es eben nicht mehr Grammatik, und zu einem Widerspruch mit der Wirklichkeit kommen wir wieder nicht.

Denken wir uns die Tätigkeit in einem Haus, in einer Werkstatt. Da wird gehobelt, gesägt, gestrichen, etc. etc.; und außerdem gibt es da eine Tätigkeit, die man „Rechnen“⁴⁸ nennt, und die sich scheinbar von allen den andern unterscheidet,⁴⁹ besonders, was ihren⁵⁰ Grund

231

231
Teile der andern Tätigkeit. Er setzt aus, rechnet etwas, dann mißt er und arbeitet mit dem

31 (V): Ausdrücken, jenes Satzes.

32 (V): ich jene Annahme mache,

33 (O): annehme das, // ich jene Annahme mache das,

34 (V): Rechnung

35 (V): beschreibe

36 (V): dem

37 (V): willkürlich,

38 (V): willkürlich,

39 (V): Erzählung ~~des A~~

40 (V): habe ~~ih~~

41 (V): ~~Gründen~~,

42 (V): daß das Ding jetzt das gleiche Verhalten zeigen wird, das es immer gezeigt hat“,

43 (V): und hier

44 (V): Beginn

45 (V): der

46 (V): aber einen den Menschen acceptablen Anfang macht.

47 (V): Das, was so schwer einzusehen ist, ist, eigentlich, daß, // Das was so schwer einzusehen ist, lautet eigentlich // etwa //: daß, *solange* wir ein Wahr-Falsch-Spiel spielen // daß, *solange* wir im Bereich der Wahr-Falsch-Spiele bleiben //, eine Änderung der Grammatik uns nur von einem solchen Spiel zu einem andern führen kann, aber nicht

48 (V): „rechnen“

49 (V): von allen diesen unterscheidet,

50 (V): den

the second the criterion for my assumption is that I utter a sentence that is in turn a step in a calculation.²⁵ Now it is said: But you must have a reason for assuming that, otherwise the assumption is unsupported and worthless (remember that, to be sure, we stand on the earth, but that the earth doesn't rest on anything in turn; and children believe that it has to fall if it isn't supported). Well, I do have reasons for my assumption. They run something like this: that the house has been standing for years, but not long enough for it to be ramshackle, etc., etc. *What* is a reason *for what* (what counts as a reason for what) can be stated from the outset, and this determines²⁶ a calculus in which²⁷ one thing is a reason for another. But if one is then to give a reason for this whole calculus, we see that it's missing. And if it's asked whether the calculus is therefore an arbitrary assumption, the answer is that it is so no more than fear of fire or of an angry person approaching us. Is it arbitrariness for us to look at *this* as a reason for *that*? Is it arbitrariness²⁸ that we don't want to get close to a dog after we've heard that it bit someone?

Now if one says: "But certainly the rules of grammar according to which we proceed and operate are not arbitrary", then we'd have to respond by asking: All right, then, why *does* someone think as he thinks? Why *does* he go through these acts of thought? (Of course the *reasons*²⁹ are in question here, not the causes). Well, reasons for this can be given within the calculus; and at the very end, one is tempted to say "It is simply quite probable that this thing will now behave as it has always behaved"³⁰ – or something like that. A phrase that veils the beginning of the reasoning process and plays a similar role at this beginning³¹ to that played by the Creator at the beginning of the world. He doesn't really explain anything, but is a beginning³² that is acceptable to humans.

What is so hard to understand: So long as we stay within the realm of True–False games, all that a change in grammar can do is to lead us from *one* such game to *another*, not³³ from something true to something false. And if, alternatively, we step outside the realm of these games, we then no longer call it grammar, and once again we don't get to the point of contradicting reality.

Let's think of the activity in a house, in a workshop. Planing, sawing, painting, etc., etc. is going on there; and in addition there's an activity called "calculating", which seemingly differs from all of the others, especially³⁴ as concerns its³⁵ reason. Here we might create a picture: the activity of calculating (drawing, etc.) connects parts of the other activities. He stops, calculates something, then he measures something and continues working with a plane.

25 (V): computation.

26 (V): describes

27 (V): calculus for which

28 (V): approaching us. Is it arbitrary for us to look at *this* as a reason for *that*? Is it arbitrary

29 (V): **reasons**

30 (V): will now show the same behaviour that it has always shown"

31 (V): role here

32 (V): but does create a beginning

33 (V): What is so hard to accept is actually that, // What is so hard to accept is actually that // is, say: that // *so long as* we are playing a True–False game // we remain in the realm of True–False games //, a change in grammar can only lead us from one such game to another, but not

34 (V): from all of them, especially

35 (V): the

Hobel weiter. Er setzt auch manchmal aus, um das Hobelmesser zu schleifen; aber ist diese Tätigkeit analog der andern des Kalkulierens? – „Aber Du glaubst doch auch, daß mehr Kesselexplosionen wären,⁵¹ wenn die Kessel nicht berechnet würden.“ Ja, ich bin überzeugt davon,⁵² – aber was will das sagen?⁵³ Folgt daraus, daß weniger *sein* werden? Und was ist denn die Grundlage dieses Glaubens?

Wenn man nun nach dem Grund einer einzelnen Denkhandlung (Kalkülhandlung) fragt, so erhält man als Antwort die Auseinandersetzung eines Systems dem die Handlung angehört.

„Ist also daß es sich in der Vergangenheit bewährt hat kein guter Grund⁵⁴ anzunehmen daß es in Zukunft so sein wird?“ – Das ist, was wir einen guten Grund nennen.⁵⁵

51 (V): mehr Kessel explodieren würden,

52 (V): ich glaube es;

53 (V): „Ja, . . . sagen?“

54 (V): Grund ~~zu~~

55 (V): nennen. ~~z~~

Sometimes he also stops to sharpen the plane's blade; but is this activity analogous to the other one, to calculating? – “But you too believe, don't you, that there would be more explosions of boilers³⁶ if the boilers weren't calculated?” Yes, I'm convinced of it;³⁷ – but what is that supposed to say?³⁸ Does it follow from this that there will *be* fewer explosions? And what is the basis for this belief?

If one asks for the reason behind an individual act of thought (act of calculation), the answer one gets is an analysis of a system to which the act belongs.

“So is the fact that it has proved its worth in the past no good reason to assume that that's the way it will be in the future?” – *That's* what we call a good reason.

36 (V): that more boilers would explode

37 (V): Yes, I believe it;

38 (V): “Yes, I'm convinced of it; – but what is that supposed to say?”

Grammatik.

Grammar.

Die Grammatik ist keiner
Wirklichkeit Rechenschaft schuldig.
Die grammatischen Regeln
bestimmen erst die Bedeutung
(konstituieren sie) und sind darum
keiner Bedeutung verantwortlich
und insofern willkürlich.

Angenommen, wir lassen die Übersetzung in die Gebärdensprache fort; zeigt es sich dann in der Anwendung (ich meine, in den grammatischen Regeln der Anwendung), daß diese Übersetzung möglich ist?

Und kann es sich nur zeigen, daß sie¹ *möglich* ist, oder auch, daß sie notwendig ist?

Wenn sie *notwendig* ist, so heißt das, daß die Sprache vermittle des roten Täfelchens in irgend einem Sinn notwendig ist; und nicht gleichberechtigt der Wortsprache.

Aber wie könnte das sein? denn dann wären ja die hinweisenden Erklärungen überflüssig: das heißt aber schon, implicite in den andern enthalten. Wie kann denn eine Regel eines Spiels überflüssig sein, *wenn* es eben *das* Spiel sein soll, was auch durch *diese* Regel charakterisiert wird.

- 234 Mein² Fehler besteht hier immer wieder darin, daß ich vergesse daß erst *alle* Regeln das Spiel, die Sprache, charakterisieren, und daß diese Regeln nicht einer Wirklichkeit verantwortlich sind, so daß sie von ihr kontrolliert würden, und so daß man von einer Regel bezweifeln könnte, daß sie notwendig, oder richtig wäre. (Vergleiche das Problem der Widerspruchsfreiheit der Nicht-euklidischen Geometrie.)

³Die Grammatik ist keiner Wirklichkeit verantwortlich.

⁴(Die Grammatik ist⁵ der Wirklichkeit nicht Rechenschaft schuldig.)

⁶Kann⁷ diese hinweisende Erklärung mit den übrigen Regeln der Verwendung des Worts kollidieren? Denn eigentlich können ja Regeln nicht kollidieren, außer sie widersprechen

1 (V): die
2 (V): Der
3 (M): ✓
4 (M): ✓

5 (V): ist ~~kei~~
6 (M): ← ✓
7 (V): Kann ~~man~~

Grammar is not
Accountable to any Reality.
The Rules of Grammar Determine
Meaning (Constitute it), and
Therefore they are not Answerable
to any Meaning and in this Respect
are Arbitrary.

Let's set the translation into a language of gestures to one side; then does it show in the use (I mean in the grammatical rules for the use) that such a translation is possible?

And can it show only that such a translation is *possible*, or also that it's necessary?

If such a translation is *necessary*, this means that the language that uses the red colour chip is in some sense necessary; and that it isn't on an equal footing with a word-language.

But how could that be? For then ostensive explanations would be superfluous; but that means they'd be implicitly contained in other explanations. How can a rule of a game be superfluous *if* it is supposed to be precisely *the* game that is characterized by *that* rule?

Again and again my¹ mistake consists in forgetting that it is *all* its rules that characterize a game, a language, and that these rules are not answerable to a reality in the sense that they are controlled by it, and that we could have doubts whether a particular rule is necessary or correct. (Compare the problem of consistency in non-Euclidean geometry.)

²Grammar is not answerable to any reality.

³(Grammar is not accountable to reality.)

⁴Can this ostensive explanation collide with the rest of the rules for the use of the word? Actually, rules can't collide, unless they contradict each other. What is more, they *determine*

1 (V): the

2 (M): ✓

3 (M): ✓

4 (M): ← ✓

einander. Denn im Übrigen *bestimmen* sie ja eine Bedeutung und sind nicht einer verantwortlich, so daß sie ihr widersprechen könnten. ((Dazu eine Bemerkung, daß die hinweisende Erklärung *eine* der Regeln ist, die von einem Wort gelten.))

Eine Sprache ist, was sie ist, und eine andere Sprache ist nicht *diese* Sprache. Ich gebrauche also die Nummern des Musterkataloges anders, als die Wörter „rot“, „blau“, etc.

235 ⁸Wie kann es eine Diskussion darüber geben, ob diese Regeln oder andere die richtigen für das Wort „nicht“ sind?⁹ Denn das Wort hat ohne diese ¹⁰Regeln noch keine Bedeutung, und wenn wir die Regeln ändern, so hat es nun eine andere Bedeutung (oder keine) und wir können dann ebensogut auch das Wort ändern. Daher sind diese Regeln willkürlich, weil die Regeln erst dem Zeichen die Bedeutung geben.¹¹

234v ¹²Überlege: „Das einzige Korrelat in der Sprache zu¹³ einer Naturnotwendigkeit ist eine willkürliche Regel. Sie ist das einzige, was man von dieser Notwendigkeit in einen Satz¹⁴ abziehen kann.“ Bezieht sich auf Sätze wie $\sim\sim p = p$.

235 ¹⁵Wenn man fragt „warum gibst Du Eier in diesen Teig“, so ist die Antwort etwa „weil der Kuchen dann besser schmeckt“. Also, man hört¹⁶ eine Wirkung und sie wird als Grund gegeben.

234v ¹⁷Wenn ich dem Holzblock eine bestimmte Form geben will, so ist der Hieb der richtige, der diese Form erzeugt. – Ich nenne aber nicht das Argument das richtige, das die erwünschten Folgen hat. Vielmehr nenne ich die Rechnung falsch, auch wenn¹⁸ die Handlungen, die dem Resultat entspringen, zum gewünschten Ende geführt haben. Vergl. den Witz: A ¹⁹erzählt dem B²⁰ er habe in der Lotterie den Haupttreffer gewonnen;²¹ er habe auf der Straße eine Kiste liegen sehen²² & drauf²³ die Zahlen 5 & 7. Er²⁴ habe²⁵ gerechnet, 5×7 ist 64 – & habe 64 gesetzt.²⁶ B: Aber 5×7 ist²⁷ doch nicht 64! A:²⁸ Ich mach den Haupttreffer & er will mich belehren.²⁹ Das zeigt, daß die „Rechtfertigung“ in den beiden Fällen von verschiedener Art ist.³⁰ In einem Fall kann man sagen: „Wart‘ nur, Du wirst schon sehen, daß das Richtige (d.h. hier: Gewünschte) herauskommt“; im andern ist dies keine Rechtfertigung.³¹

³²Wenn man nun von der³³ Willkürlichkeit der grammatischen Regeln spricht, so kann das nur bedeuten, daß es die Rechtfertigung, die *in* der Grammatik als solcher liegt, nicht *für* die Grammatik gibt. Und wenn man das Rechnen aber³⁴ nicht das Kochen dem Spiel vergleicht, so ist es aus eben³⁵ diesem Grund.³⁶ Das ist aber auch der Grund, warum man

-
- | | |
|---|---|
| 8 (M): / ← ✓ | 25 (V): habe nun |
| 9 (V): Es kann keine Diskussion darüber geben, . . . sind. | 26 (V): gerechnet; 5×7 ist 64, & habe auf die Nummer 64 gesetzt. |
| 10 (V): die | 27 (V): Der Andre: Aber 5×7 ist |
| 235 11 (V): erst das Zeichen machen . | 28 (V): 64! Der Erste: |
| 12 (M): ← ✓ | 29 (V): haben. (Vergleich den Witz „Ich mach‘ den Haupttreffer, und er will mich belehren!“) |
| 13 (V): Korrelat, in der Sprache, zu | 30 (V): daß die Rechtfertigungen in den beiden Fällen verschiedene sind . // sind, und also „Rechtfertigung“ verschiedenes in beiden bedeutet . |
| 14 (V): in Sätze | 31 (M):) |
| 15 (M): ✓ XXX | 32 (M): XXX |
| 16 (V): erfährt | 33 (V): der Wirklich |
| 17 (M): / (| 34 (V): und |
| 18 (V): falsch, obwohl | 35 (V): es eben aus |
| 19 (O): Witz A | 36 (V): <u>Grunde</u> . |
| 20 (V): Ein Jude erzählt einem andern | |
| 21 (V): gemacht: | |
| 22 (V): gesehen | |
| 23 (V): darauf | |
| 24 (V): & auf der-seien die Zahlen 5 & 7 gestanden , er | |

a meaning; they are not answerable to one and thus can't contradict it. ((Cf. the remark that an ostensive explanation is *one* of the rules that are valid for a word.))

A language is what it is, and no other one is *this* language. So I use the numbers of a sample-catalogue differently from the words "red", "blue", etc.

⁵How can there be a discussion whether these rules, or others, are the correct ones for the word "not"?⁶ For without these⁷ rules the word doesn't as yet have any meaning, and if we change the rules it has another meaning (or none), and then we might just as well change the word. Thus these rules are arbitrary, because it is the rules that first give meaning to the sign.⁸

⁹Consider: "In language the only correlate to natural necessity is an arbitrary rule. It is the only thing one can remove from this necessity and put into a proposition."¹⁰ Refers to propositions such as $\sim\sim p = p$.

¹¹If someone asks "Why do you put eggs into this dough?" the answer might be "Because then the cake tastes better". So one hears¹² an effect and it is given as a reason.

¹³When I want to shape a block of wood a certain way, the stroke that produces that shape is the right one. – But I don't call an argument that has the desired consequences the right one. Rather, I call a calculation wrong even if¹⁴ the actions stemming from its result have led to the desired end.¹⁵ Cf. the joke: A tells B¹⁶ that he won¹⁷ the jackpot in the lottery: he saw a crate lying in the street and on it the numbers 5 and 7. He¹⁸ calculated that 5×7 is 64 and filled in 64. B: But $5^{19} \times 7$ isn't 64! A²⁰: I win the jackpot and he wants to give me lessons. This shows that "justification" is of a different kind in the two cases.²¹ In the one case it can be said: "Just wait, you'll see that the right thing (i.e. here: the desired thing) will result"; in the other case that is no justification.²²

²³Now when one talks about the arbitrariness of grammatical rules this can only mean that the justification that is inherent *in* grammar as *such* doesn't exist *for* grammar. And when one compares calculating, but²⁴ not cooking, to a game, one does so for this very reason. And that's also the reason one wouldn't call cooking a calculus. But how about tidying up a room

5 (M): ← ✓

6 (V): There can be no discussion . . . "not".

7 (V): the

8 (V): first ~~create~~ the sign.

9 (M): ← ✓

10 (V): into propositions."

11 (M): ✓ XXX

12 (V): one is told

13 (M): / (

14 (V): wrong, ~~although~~

15 (V): end. (Cf. the joke "I win the jackpot and he wants to give me lessons!")

16 (V): One Jew tells another

17 (V): got

18 (V): street & on ~~it~~ the numbers 5 & 7 ~~were written~~, he

19 (V): ~~The other person: But~~ 5

20 (V): 64! ~~The first person~~

21 (V): that the justifications in the two cases ~~are~~ different. // ~~are~~ different ~~and that therefore "justification" means something different in each.~~

22 (M):)

23 (M): XXX

24 (V): and

das Kochen keinen Kalkül nennen würde. Wie ist es aber mit dem Aufräumen eines Zimmers, oder dem Ordnen eines Bücherschranks, – oder dem Stricken eines bestimmten Musters?
 236v Diese Dinge kommen dem Spiel in irgendeiner Weise näher. Ich glaube, der Grund, warum man das Kochen kein Spiel zu nennen versucht ist, ist der: es gibt natürlich auch für das Kochen Regeln, aber „Kochen“ bezeichnet nicht wesentlich eine Tätigkeit nach diesen Regeln, sondern eine Tätigkeit, die ein bestimmtes Resultat hat. Es ist etwa³⁷ eine Regel, daß man Eier 3 Minuten lang kocht, um weiche Eier zu erhalten; wird aber durch irgendwelche³⁸ Umstände das gleiche Ergebnis durch 5 Minuten langes Kochen erreicht, so sagt man nun nicht „das heißt dann nicht ‚weiche Eier kochen‘“. Dagegen heißt „Schachspielen“ nicht die Tätigkeit, die ein bestimmtes Ergebnis hat, sondern dieses Wort bedeutet eine Tätigkeit, die den & den Regeln entspricht.³⁹ Die Regeln der Kochkunst hängen mit der Grammatik des Wortes „kochen“ anders zusammen, als die Regeln des Schachspiels mit der Grammatik des Wortes „Schach spielen“ und als die Regeln des Multiplizierens mit der Grammatik des Wortes „multiplizieren“.

Die Regeln der Grammatik sind in demselben Sinne⁴⁰ willkürlich, & in demselben Sinne nicht willkürlich wie die Wahl einer Maßeinheit. Man drückt dies auch so aus: diese Regeln seien „praktisch“ oder „unpraktisch“, „brauchbar“ oder „unbrauchbar“, aber nicht „wahr“ oder „falsch“.⁴¹

236v In diesem Sinn würde man es eine willkürliche Regel nennen, die Ingredientien beim Kochen nach Pfund zu wägen, aber nicht, Eier 3 Minuten lang kochen zu lassen.

⁴²„Die Maßeinheit ist willkürlich“ (wenn *dies* nicht heißen soll: „wähle *in diesem Falle* die Einheit ganz wie Du willst“) sagt nichts anderes, als daß die Angabe der Maßeinheit keine Längenangabe ist (obwohl sie so klingt). Und zu sagen, die Regeln der Grammatik sind willkürlich, sagt bloß: Verwechsle eine Regel⁴³ über den Gebrauch des Wortes A nicht mit einem Satz, in dem vom Wort A Gebrauch gemacht wird. Denke nicht die Regel sei in ähnlicher Weise einer Realität verantwortlich, mit einer Realität zu vergleichen, wie der Erfahrungssatz der von A handelt.⁴⁴

235v ⁴⁵Die grammatischen Regeln sind zu vergleichen Regeln über das⁴⁶ Vorgehen beim Messen von Zeiträumen,⁴⁷ von Entfernungen, Temperaturen, Kräften⁴⁸ etc. etc. Oder auch: diese methodologischen Regeln sind selbst Beispiele⁴⁹ grammatischer Regeln. Grammatische Regeln wird man mit Vorteil Übereinkommen vergleichen.

Diese Regeln des Vorgehens sind willkürlich kann nur heißen:⁵⁰ Wenn Dein Zweck nur *der* ist, so kannst Du ihn auf alle diese Weisen erreichen.

37 (V): z.B.

38 (O): irgend welche

39 (V): die nach gewissen Regeln ausgeführt wird.
 // die gewissen Regeln entspricht.

40 (V): sind so (d.h. in demselben Sinne)

41 (V): Maßeinheit. ~~Aber das kann doch nur heißen, daß sie von der Länge des Zumessenden unabhängig ist. Und daß nicht die Wahl der einen Einheit „wahr“, der andern „falsch“ ist, wie die Angabe der Länge wahr oder falsch ist. Was natürlich nur eine Bemerkung über die Grammatik des Wortes „Längeneinheit“ ist.~~

42 (M): v

43 (V): Regel ~~nicht mit einem~~

44 (V): ~~Denke nicht daß die Regel in über „A“ in ähnlichem Sinne einer Realität verantwortlich ist, wie der Erfahrungssatz der „A“ enthält.~~

45 (M): v ✓

46 (V): das Messen

47 (V): beim Messen der Zeit, d

48 (V): von Entfernungen, Kräften

49 (V): sind Beispiele

50 (V): willkürlich heißt:

or arranging a bookshelf – or knitting a particular pattern? In some way these things come closer to a game. I believe the reason one isn't tempted to call cooking a game is this: of course there are also rules governing cooking, but in essence "cooking" doesn't refer to an activity that follows those rules – rather, to an activity that has a particular result. It's a rule, for example, that you cook eggs for 3 minutes in order to get soft-boiled eggs; but if, because of some set of circumstances, the same result is achieved by boiling them for 5 minutes, you don't say "That doesn't mean 'cooking soft-boiled eggs'". On the other hand "playing chess" doesn't mean an activity that has a particular result, but rather an activity that corresponds to such and such²⁵ rules. The rules of culinary art have a connection to the grammar of the word "cook" that is different from the connection between the rules of chess and the grammar of the words "play chess", different from the connection between the rules of multiplication and the grammar of "multiply".

The rules of grammar are²⁶ arbitrary and not arbitrary, in the same sense as is the choice of a unit of measurement. This is also expressed by saying that these rules are "practical" or "impractical", "useful" or "useless", but not "true" or "false".²⁷

In this sense one would call it an arbitrary rule of cooking to weigh the ingredients out in pounds, but not to let eggs cook for three minutes.

²⁸"The unit of measurement is arbitrary" (if *this* is not to mean "Choose the unit any way you want *in this case*") means nothing other than that the specification of the unit of measurement is not a specification of length (even though it sounds like one). And to say that the rules of grammar are arbitrary just means: Don't confuse a rule for the use of the word A with²⁹ a sentence in which the word A is used. Don't think that a rule is answerable to a reality, is comparable to a reality, in more or less the way an empirical proposition about A is.³⁰

³¹The rules of grammar can be compared to rules for procedures to measure³² periods of time³³, distances, temperatures, forces³⁴, etc, etc. Or: these methodological rules are themselves examples³⁵ of grammatical rules. We'll profit by comparing grammatical rules to agreements.

All that "These rules of procedure are arbitrary" can mean is:³⁶ If your only purpose is *this*, you can attain it in all of these ways.

25 (V): that is carried out according to certain // that corresponds to certain

26 (V): are ~~thus~~ (i.e. in the same sense)

27 (V): measurement. ~~But all that can mean is that this unit of measurement is independent of the length of what is to be measured. And that it isn't the case that the choice of one unit is "true" and that of the other "false", as a measurement of length is true or false. All of which is, of course, only a remark about the grammar of the phrase "unit of length".~~

28 (M): v

29 (V): a rule ~~with~~

30 (V): Don't think ~~that~~ the rule ~~in about~~ "A" ~~is~~ answerable to a reality in a similar ~~sense~~ as is the empirical proposition that ~~contains~~ "A".

31 (M): v ✓

32 (V): rules for the ~~measure~~ of

33 (V): measure time

34 (V): distances, forces

35 (V): are examples

36 (V): arbitrary" means is:

⁵¹ „Wenn Du mit diesem Zeichen die Negation ausdrücken willst, so mußt Du von ihm *die*⁵² Regeln gelten lassen.“ – Was für eine Art Satz⁵³ ist das?

236 Man ist versucht, Regeln⁵⁴ der Grammatik durch Sätze zu rechtfertigen von der Art: „Aber es gibt doch wirklich 4 primäre Farben“; und gegen die Möglichkeit dieser Rechtfertigung, die nach dem Modell der Rechtfertigung eines Satzes durch (den) Hinweis auf seine Verifikation gebaut ist, richtet sich das Wort, daß die Regeln der Grammatik willkürlich sind.

237 Kann man aber nicht doch in irgend einem Sinne sagen, daß die Grammatik der Farbwörter die Welt, wie sie tatsächlich ist, charakterisiert? Man möchte sagen: kann ich nicht wirklich vergebens nach einer fünften primären Farbe suchen?⁵⁵ Nimmt man nicht die primären Farben zusammen, weil sie eine Ähnlichkeit haben, oder zum mindesten die Farben, im Gegensatz z.B. zu den⁵⁶ Formen oder Tönen, weil sie eine Ähnlichkeit haben? Oder habe ich, wenn ich diese Einteilung der Welt als die richtige hinstelle, schon eine vorgefaßte Idee als Paradigma⁵⁷ im Kopf? Von der ich dann etwa nur sagen kann: „ja, das ist die Art,⁵⁸ wie wir die Dinge betrachten“, oder „wir wollen eben ein solches Bild (von der Wirklichkeit) machen“. Wenn ich nämlich sage: „die primären Farben haben doch eine bestimmte Ähnlichkeit miteinander“⁵⁹ – woher nehme ich den Begriff dieser Ähnlichkeit?⁶⁰ Ist nicht so, wie der Begriff „primäre Farbe“ nichts anderes ist, als „blau oder rot oder grün oder gelb“, – auch der Begriff jener Ähnlichkeit nur durch die vier Farben gegeben? Ja, sind sie nicht die gleichen! – „Ja, könnte man denn auch rot, grün und kreisförmig zusammenfassen?“ – Warum nicht?!

Die Wichtigkeit eines Spiels⁶¹ liegt darin, daß wir dieses Spiel spielen. Daß wir *diese* Handlungen ausführen. Es verliert seine Wichtigkeit nicht dadurch, daß es selbst nicht wieder eine Handlung in einem andern (übergeordneten) Spiel ist.

⁶²Warum nenne ich die Regeln des Kochens nicht willkürlich; und warum bin ich versucht, die Regeln der Grammatik willkürlich zu nennen? Weil „Kochen“⁶³ durch seinen Zweck definiert ist, dagegen das Sprechen der Sprache⁶⁴ nicht. Darum ist der Gebrauch der Sprache in einem gewissen Sinne autonom, in dem das Kochen und Waschen es nicht ist. Denn, wer sich beim Kochen nach andern als den richtigen Regeln richtet, kocht schlecht; aber wer sich nach andern Regeln als denen des Schachs richtet, spielt *ein*⁶⁵ *anderes Spiel* und wer sich nach andern grammatischen Regeln richtet, als denen und denen,⁶⁶ spricht darum nichts Falsches, sondern von etwas Anderem.

238 ⁶⁷Könnte ich den Zweck der grammatischen Konventionen dadurch beschreiben, daß ich sagte, ich müßte sie machen, weil etwa die Farben gewisse Eigenschaften haben, so wären damit diese Konventionen überflüssig, denn dann könnte ich eben das sagen, was die Konventionen gerade ausschließen. Umgekehrt, wenn die Konventionen nötig waren, also gewisse Kombinationen der Wörter als unsinnig ausgeschlossen werden mußten, dann kann

51 (M): a

52 (V): mußt Du davon die & die

53 (V): Was für ein Satz

54 (V): versucht, **die** Regeln

55 (V): suchen? (~~Und wenn man suchen kann, dann ist ein Finden denkbar.~~)

56 (V): z.B. von

57 (V): Paradigma **der**

58 (V): Weise,

59 (V): ~~Wenn ich nämlich sage: „die primären Farben haben doch eine bestimmte Ähnlichkeit mit einander“~~

60 (V): Ähnlichkeit? ~~D.h.: habe ich hier eine Funktion „x ähnlich mit y“, in die ich die Farben als Argumente einsetzen kann?~~

61 (V): Wichtigkeit ~~in einem Spiel~~

62 (M): ✓

63 (V) Weil ~~das~~ Kochen

64 (V): dagegen ~~der~~ Gebrauch der Sprache // dagegen ~~die Regeln des~~ Gebrauchs der Sprache

65 (V): **ein**

66 (O): als den und den,

67 (M): ///

³⁷"If you want to express negation with this sign, then you have to have it conform to *these*³⁸ rules." What kind of a proposition³⁹ is that?

One is tempted to justify grammatical rules with sentences such as: "But there really are 4 primary colours"; and the statement that the rules of grammar are arbitrary is directed against the possibility of this justification, which is constructed on the model of justifying a proposition by referring to its verification.

But still, can't one in some sense say that the grammar of the colour-words characterizes the world as it actually is? One is inclined to say: Don't I really search in vain for a fifth primary colour?⁴⁰ Don't we group the primary colours together because they are similar, or at least group colours together, as opposed to, say, shapes or tones, because they are similar? Or do I already have a preconceived idea in my head as a paradigm when I posit this classification of the world as the correct one? – An idea about which I can only say, for example: "Yes, that's the way we look at things" or "What we want is to create this kind of an image (of reality)". For if I say: "But the primary colours do have a certain similarity to each other"⁴¹ – where do I get the concept of this similarity from?⁴² Just as the concept of primary colour is nothing more than "blue or red or green or yellow" – isn't the concept of that similarity also only given via the four colours? Indeed, aren't these concepts the same! – "Well, could one also combine red, green and circular?" – Why not?!

The importance of a game⁴³ lies in the fact that we play this game. That we carry out *these* actions. It doesn't lose its importance by not being an action in another (superior) game.

⁴⁴Why don't I call the rules of cooking arbitrary; and why am I tempted to call the rules of grammar arbitrary? Because "cooking" is defined by its end, whereas speaking a language⁴⁵ isn't. Therefore the use of language is autonomous in a certain sense in which cooking and washing aren't. For anyone guided by other than the correct rules when he cooks, cooks badly; but anyone guided by rules other than those for chess plays a⁴⁶ *different game*, and anyone guided by grammatical rules other than such and such doesn't as a result say anything that is false, but is talking about something else.

⁴⁷If I could describe the purpose of grammatical conventions by saying that I had to create them because, for instance, colours have certain properties, that would make these conventions unnecessary, because then I could say precisely what it was the conventions were excluding. Conversely, if the conventions were necessary, i.e. if certain combinations of words had to be excluded as being nonsensical, then for that very reason I couldn't name a single

37 (M): a

38 (V): to such and such

39 (V): What sort of a proposition

40 (V): colour? (~~And if one can search, then finding is conceivable.~~)

41 (V): For if I say: "~~But the primary colours do have a certain similarity to each other~~"

42 (V): from? ~~That is, do I have a function – "x similar to y" – here into which I can insert the colours as arguments?~~

43 (V): importance ~~in a game~~

44 (M): ✓

45 (V): whereas ~~the~~ use of language // whereas ~~the~~ rules for the use of language

46 (V): plays ✱

47 (M): ///

ich eben darum nicht eine Eigenschaft der Farben angeben, die die Konventionen nötig machte, denn dann wäre es denkbar, daß die Farben diese Eigenschaft nicht hätten und das könnte nur entgegen den Konventionen ausgedrückt werden.

237v Angenommen man wollte eine grammatische⁶⁸ Konvention damit rechtfertigen, daß – z.B. – die Farben die & die Eigenschaften haben & daher gewisse Regeln für den Gebrauch der Farbwörter gelten müßten.⁶⁹ Dann wäre es nach dieser Grammatik auch denkbar, nämlich sagbar,⁷⁰ daß die Farben jene⁷¹ Eigenschaften nicht hätten & es müßte sich nach ihr alles sagen lassen, was dann der Fall⁷² wäre.⁷³

238 ⁷⁴„Die grammatischen Regeln sind willkürlich“ heißt: ⁷⁵Ich ⁷⁶nenne die Vorschriften⁷⁷ der Darstellung keine Konvention, die sich durch Sätze rechtfertigen läßt, Sätze, welche das Dargestellte beschreiben und zeigen, daß die Darstellung adäquat ist. Die Konventionen der Grammatik lassen sich nicht durch eine Beschreibung des Dargestellten rechtfertigen. Jede solche Beschreibung setzt schon die Regeln der Grammatik voraus. D.h., was in der zu rechtfertigenden Grammatik als Unsinn gilt, kann⁷⁸ in der Grammatik der rechtfertigenden Sätze auch nicht als Sinn gelten, u.u.

⁷⁹Wer etwas dagegen hat, daß man sagt, die Regeln der Grammatik seien Spielregeln, hat in dem Sinne Recht, daß das, was das Spiel zum Spiel macht die Konkurrenz von Spielern, der Zweck der Unterhaltung und Erholung, in der Grammatik abwesend ist, etc. Aber niemand wird leugnen, daß das Studium des Wesens der Spielregeln für das Studium der grammatischen Regeln nützlich sein muß, da (*irgend*) eine Ähnlichkeit⁸⁰ offenbar⁸¹ besteht. Es ist überhaupt besser, ohne ein gefaßtes Urteil oder Vorurteil über die Analogie zwischen Grammatik und Spiel, und nur getrieben von dem sicheren Instinkt, daß hier eine Verwandtschaft vorliegt, die Spielregeln zu betrachten. Und hier wieder soll man einfach berichten, was man sieht und nicht fürchten, daß man⁸² damit eine wichtige Anschauung untergräbt, oder auch, seine Zeit mit etwas Überflüssigem verliert.

239

Man sieht dann vor allem, wie der Begriff des Spiels und damit der Spielregel ein an den Rändern verschwimmender ist.

Ferner sieht man etwa Folgendes, wenn man die Regeln z.B. des Schachspiels betrachtet: Es gibt hier Sätze, die die Züge der einzelnen Figuren beschreiben; allgemeiner ausgedrückt, Regeln über Spielhandlungen. Dann aber gibt es doch die Sätze, die die Grundstellung beschreiben und solche, die das Schachbrett beschreiben.

⁸³Dieser Kalkül, die Zahlentheorie etwa, zeigt⁸⁴ nicht, welche wunderbaren⁸⁵ Eigenschaften⁸⁶ Gott den Zahlen gegeben hat; sondern, welche Eigenschaften er uns & den Dingen gegeben hat, daß dieser Kalkül *nützlich, interessant* &, mit unsern Schreibmaterialien, leicht *ausführbar*⁸⁷ ist.

68 (O): Grammatische

69 (V): Farbwörter gelten.

70 (V): denkbar, sagbar,

71 (V): diese

72 (V): was der Fall

73 (V): wäre, ~~wenn~~

74 (M): v

75 (M) ✓

76 (V): Ich ~~mus~~

77 (V): Regel

78 (V): kann ~~ieh~~

79 (M): ✓

80 (V): da ~~eine~~ Analogie81 (V): ~~zweifello~~s82 (V): man ~~ei~~

83 (M): v

84 (V): Dieser Kalkül zeigt

85 (O): wunderbare

86 (V): welche Eigenschaften

87 (V): *interessant*, &, mit unsern Schreibmaterialien, *ausführbar*

feature of the colours that would make the conventions necessary, for then it would be conceivable that the colours might not have that feature, and that could only be expressed by contravening the conventions.

Let's assume that someone wanted to justify a grammatical convention by saying, for example, that colours have such and such qualities and that therefore certain rules had to be valid⁴⁸ for the use of colour words. Then, in accordance with this grammar it would also be conceivable, i.e. sayable⁴⁹, that colours don't have those⁵⁰ qualities, and, in accordance with this grammar, everything that would then be the case⁵¹ would have to be sayable.

⁵²"The rules of grammar are arbitrary" means: ⁵³I don't call the regulations⁵⁴ for representing something a convention that can be justified by propositions, propositions that describe what is represented and show that a representation is adequate. The conventions of grammar can't be justified by a description of what is represented. Any description of that kind already presupposes the rules of grammar. That is, what counts as nonsense within the grammar that is to be justified can't⁵⁵ count as making sense in the grammar of the justifying propositions, and so on.

⁵⁶Anyone who objects to the statement that the rules of grammar are rules of a game is right, in the sense that what makes a game a game – the competition of players, the purpose of entertainment and recreation – is absent in grammar, etc. But nobody will deny that studying the nature of the rules of games must be useful for the study of grammatical rules, since there obviously⁵⁷ is (*some sort of*) similarity.⁵⁸ In general it is better to look at the rules of games without a preconceived judgement or prejudice as to the analogy between grammar and games, and without being driven solely by the infallible instinct that there is a relationship here. And here again one should simply report what one sees and not be afraid that in doing so one is undermining an important view, or wasting one's time with something superfluous.

More than anything else, one then sees how the concept of a game and therefore of a rule of a game is blurred at its edges.

Furthermore, one sees something like this when one looks at the rules, say, of chess: Here there are propositions that describe the moves of the individual pieces; more generally expressed, here there are rules for moves in the game. But then there are those propositions that describe the starting position and ones that describe the chess board.

⁵⁹This calculus, say the theory of numbers, does⁶⁰ not show what wonderful properties⁶¹ God has given to numbers, but what properties He has given to us and to things, with the result that this calculus is *useful, interesting and easily carried*⁶² out with our writing materials.

48 (V): rules are valid

49 (V): conceivable, sayable

50 (V): these

51 (V): would be the case, #

52 (M): v

53 (M): ✓

54 (V): rule

55 (V): † can't

56 (M): ✓

57 (V): unquestionably

58 (V): is an analogy.

59 (M): v

60 (V): This calculus does

61 (V): what properties

62 (V): and carried

Regel und Erfahrungssatz. Sagt eine Regel, daß Wörter tatsächlich so und so gebraucht werden?

¹Eine Regel verglichen mit einem *Weg*. Sagt ein Weg man solle auf *ihm* (& nicht auf dem Rasen) gehen? Sagt er aus die² Menschen gingen meistens so?

³Die Regel ist *eine* Anwendung der Satzform;⁴ sie geht nach verschiedenen Seiten in Befehl, Rat, Vorschlag, Erklärung eines Spiels, Erfahrungssatz u.a. über.

⁵Was ist eine Regel? Ist sie ein⁶ Erfahrungssatz – (z.B.)⁷ über den Gebrauch der Sprache? Ist eine Regel des Schachspiels ein Satz darüber, wie die Menschen seit dem Ereignis der Erfindung des Schachspiels es gespielt haben; d.h. etwa mit so geformten Figuren gezogen haben? Denn, wenn davon die Rede ist, daß die Menschen das Schachspiel so gespielt haben, so muß das Schachspiel so definiert sein, daß es Sinn hat, davon auszusagen, es sei anders gespielt worden. Sonst nämlich gehören die Regeln zur Definition des Schachspiels. Daß jemand der Regel . . . gemäß spielt, das ist eine Erfahrungstatsache; oder: „A spielt der Regel . . . gemäß“, „die meisten Menschen spielen der Regel . . . gemäß“, „niemand spielt der Regel . . . gemäß“ sind Erfahrungssätze. Die Regel ist kein Erfahrungssatz, sondern nur der Teil eines solchen Satzes.

Ist eine Regel ein Befehl? oder eine Bitte?⁸ & was ist eine Bitte? Schau wie der Satz wirklich im Verkehr gebraucht wird.

241 Die Regel setzt die Maßeinheit fest,⁹ und der Erfahrungssatz sagt, wie lang ein Gegenstand ist. (Und hier sieht man, wie logische Gleichnisse funktionieren, denn die Festsetzung der Maßeinheit ist wirklich eine grammatische Regel und die Angabe einer Länge in dieser Maßeinheit ein Satz, der von der Regel Gebrauch macht.)

¹⁰Wenn man die Regel dem Satz beifügt, so ändert sich der Sinn des Satzes nicht. Wenn die Definition des Meters ist, es sei die Länge des Pariser Urmeters,¹¹ so sagt der Satz „dieses Zimmer ist 4m lang“ dasselbe wie, „dieses Zimmer ist 4m lang,¹² und 1m = die Länge des Pariser Urmeters“.

1 (M): ¡ ///

2 (V): Sagt er die

3 (M): ¡ ///

4 (V): Satzform; ~~sie grenzt~~

5 (M): ✓

6 (V): Regel und Erfahrungssatz. Ist eine Regel ein

7 (V): Erfahrungssatz – etwa

8 (V): Bitte? ~~ist eine Bitte~~

9 (V): Die Regel ist die Festsetzung der Maßeinheit,

10 (M): ← ✓

11 (V): Wenn die Definition des Meters die Länge des Pariser Urmeters ~~ist~~,

12 (V): lang;

Rule and Empirical Proposition. Does a Rule Say that Words are Actually Used in Such and Such a Way?

¹A rule compared to a *path*. Does a path say that one is to walk on *it* (and not on the grass)? Does it state² that people usually go that way?

³A rule is *one* application of the form of a proposition;⁴ it takes different directions in a command, a piece of advice, a suggestion, an explanation of a game, an empirical proposition, among other propositional forms.

⁵What is a rule? Is it an⁶ empirical proposition – (e.g.),⁷ about the use of language? Is a rule of chess a proposition about how people have played since the game was invented; that is, say, how they've moved with pieces shaped in such and such a way? For if it is said that people played chess in a particular way, then the game of chess has to be defined so that it makes sense to say that it had been played differently. If this doesn't make sense, then the rules are part of the definition of the game of chess. That someone plays in accordance with the rule . . . is an empirical fact; or: "A plays in accordance with the rule . . .", "Most people play in accordance with the rule . . .", "Nobody plays in accordance with the rule . . ." are empirical propositions. A rule is not an empirical proposition, but only part of such a proposition.

Is a rule a command? Or a request?⁸ And what is a request? Look at how the sentence is actually used in communicating.

A rule establishes a unit⁹ of measurement, and an empirical proposition says how long an object is. (And here we see how logical similes work, for the establishment of a unit of measurement really is a grammatical rule, and an indication of length in terms of this unit of measurement is a proposition that makes use of that rule.)

¹⁰When one adds the rule to the proposition, the sense of the proposition doesn't change. If the definition of a metre is that it is the length¹¹ of the standard metre in Paris, then the proposition "This room is 4 m long" says the same thing as "This room is 4 m long,¹² and 1 m = the length of the standard metre in Paris".

1 (M): ∫ ///

2 (V): say

3 (M): ∫ ///

4 (V): proposition; ~~it borders~~

5 (M): ✓

6 (V): Rule and empirical proposition. Is a rule an

7 (V): empirical proposition – perhaps

8 (V): request? ~~is a request~~

9 (V): A rule is the establishment of a unit

10 (M): ← ✓

11 (V): metre ~~is~~ the length

12 (V): long_s

Die Legende zu einer Landkarte ist so eine Anweisung zum Gebrauch – oder zum Verständnis¹³ – einer Beschreibung.¹⁴

¹⁵Diese Legende sagt jedenfalls nichts über die Geographie des Landes aus. So wenig, wie der Satz „1 m ist die Länge des Pariser Urmeters“¹⁶ die Länge eines Gegenstandes angibt.¹⁷

¹⁸Ferner bezieht sich die Regel auf ihre Anwendung in der Beschreibung (der Wirklichkeit).¹⁹ Denn, was hat es für einen Sinn von einem Stab zu sagen „das ist das Urmeter“, wenn sich diese Aussage nicht auf Messungen mit dem Metermaß bezieht. Insofern könnten wir uns die Regel jedem Satz beigefügt denken.

Die Regel ist eine Art vorgezeichneter Route; ein vorgezeichneter Weg.

²⁰Die Regel möchte ich ein Instrument nennen.

²¹Wenn eine Regel ein Satz ist, dann wohl einer, der von den Wörtern der Sprache handelt. Aber was sagt so ein Satz von den Wörtern aus? Daß sie in dem und dem Zusammenhang gebraucht werden? Aber von wem und wann? Oder, daß jemand wünscht, daß sie so gebraucht werden? Und wer? – Vielmehr ist die Regel von allen solchen²² Aussagen ein Teil.

²³Die Regel „links gehen!“ oder einfach ein Pfeil. Wie, wenn ich mir in meinem Zimmer einen Pfeil an die Wand malte – wäre der auch der Ausdruck eines Gesetzes, wie es der Pfeil auf einem Bahnhof wohl sein könnte? Um ihn zu einem Gesetz zu machen, gehört wohl²⁴ noch der übrige Apparat, dessen einer Teil der Pfeil nur ist.

²⁵(Sraffa) Ein Ingenieur baut eine Brücke; er schlägt dazu in mehreren Handbüchern nach; in technischen Handbüchern und in juristischen. Aus dem einen erfährt er, daß die Brücke zusammenbrechen würde, wenn er diesen Teil schwächer machen würde als etc. etc.; aus den andern, daß er eingesperrt würde, wenn er sie so und so bauen würde.²⁶ – Stehn nun die beiden Bücher nicht auf gleicher Stufe? – Das kommt drauf an, was für eine Rolle sie in seinem Leben spielen. Das juristische Handbuch kann ja für ihn einfach ein Buch über die Naturgeschichte der ihn umgebenden Menschen sein. Vielleicht muß er auch ein Buch über das Leben der Biber nachschlagen, um zu erfahren, wie er die Brücke streichen muß, daß die Biber sie nicht annagen. – Gibt es aber nicht noch eine andere Weise, die Gesetze zu betrachten? Fühlen wir nicht sogar deutlich, daß wir sie nicht so betrachten? – Ist dies nicht die gleiche Frage, wie: – Ist ein Vertrag nur die Feststellung, daß es für die Parteien nützlich ist, so und so zu handeln? Fühlen wir uns nicht in manchen Fällen (wenn auch nicht in allen) auf andre Weise „durch den Vertrag gebunden“? – Kann man nun sagen: „Wer sich durch einen Vertrag oder ein Gesetz gebunden fühlt, stellt sich irrtümlicherweise das Gesetz als einen Menschen (oder Gott) vor, der ihn mit physischer Gewalt zwingt“? – Nein; denn, wenn er handelt, als ob ihn jemand zwänge, so ist doch seine Handlung jedenfalls Wirklichkeit und auch die Vorstellungsbilder, die er etwa dabei hat, sind nicht Irrtümer; und er braucht sich in nichts irren und kann doch handeln wie er handelt und

13 (V): oder Verständnis

14 (M): |[Ende|]

15 (M): (XXX

16 (V): die Länge des Urmeters ~~in Paris~~

17 (M):) (V): ~~beschreibt.~~

18 (M): ///

19 (V): Ferner muß sich die Regel auf die Anwendung in der Beschreibung (~~der~~ Wirklichkeit) beziehen.

20 (M): ♣ ← ///

21 (M): ///

22 (V): diesen

23 (M): ///

24 (V): doch

25 (M): XXX

26 (V): wollte.

In the same way the key to a map is an instruction in the use of, or for the understanding¹³ of – a description.¹⁴

¹⁵In any case, this key states nothing about the geography of a country. Any more than the proposition “The length of the standard metre in Paris¹⁶ is 1 m” indicates¹⁷ the length of an object.¹⁸

¹⁹Furthermore, the rule refers to its application in the description (of reality).²⁰ For what kind of sense does it make to say of a rod “This is the standard metre”, if this statement doesn’t refer to measurements with the metre stick? As far as that goes, we could imagine the rule conjoined to every proposition.

A rule is a kind of marked-out route; a marked-out path.

²¹I’m inclined to call a rule an instrument.

²²If a rule is a proposition, then most likely it is one about the words of a language. But what does such a proposition state about the words? That they are used in this or that context? But by whom and when? Or that someone wishes that they be used in such a way? Who? – Rather, a rule is a part of all such²³ statements.

²⁴The rule “Keep left!”, or simply an arrow. What if I painted an arrow on the wall of my room – would it too be the expression of a law, as an arrow in a railway station might well be? In order to turn it into a law, I undoubtedly need the rest of the apparatus, of which the arrow is only one part.

²⁵(Sraffa) An engineer is building a bridge. To do this, he checks in several handbooks; in technical handbooks and in legal ones. From the one he finds out that the bridge would collapse if he were to make this part weaker than etc., etc.; from the other that he would be locked up if he built²⁶ it in such and such a way. – Now are the two books not on the same level? – That depends on what kind of a role they play in his life. After all, for him the legal handbook can simply be a book about the natural history of the people around him. Maybe he also has to check in a book on the life of beavers in order to find out how he has to paint the bridge so that beavers won’t gnaw at it. – But isn’t there still another way of looking at laws? In fact don’t we even have the distinct feeling that this is *not* the way we look at them? – Isn’t this the same question as: – Is a contract merely a statement that it is useful for the parties to act in such and such a way? Don’t we in some cases (even if not in all) feel “bound by a contract” in a different way? – Now can one say: “Whoever feels bound by a contract or a law erroneously pictures the law as a person (or God) who constrains him with physical force”? – No; because even if he acts as if someone were constraining him, then still his action is real, and likewise the mental images that might occur to him in the process are not erroneous; he doesn’t have to err in any way, and he can still act the way he acts and also

13 (V): or understanding

14 (M): |[End]|

15 (M): (XXX

16 (V): standard metre ~~in Paris~~

17 (V): ~~describes~~

18 (M):)

19 (M): ////

20 (V): rule must refer to the application in the description (of reality).

21 (M): ♣ ← ///

22 (M): ///

23 (V): these

24 (M): ///

25 (M): XXX

26 (V): he wanted to build

sich auch vorstellen, was er sich etwa vorstellt. Die Worte „der Vertrag bindet mich“ sind zwar eine bildliche Darstellung und daher mit der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes „binden“ ein falscher Satz: aber, richtig aufgefaßt, sind sie wahr (oder können es sein) und unterscheiden einen Fall von dem, in welchem der Vertrag mir bloß sagt, was zu tun mir nützlich ist. Und wenn man etwas gegen die Worte einwendet „der Vertrag (oder das Gesetz) bindet mich“, so kann man nichts sagen gegen die Worte: „ich *fühle* mich durch den Vertrag gebunden“.

²⁷Die Regel – wie ich sie verstehe – ist wie ein Weg in einem Garten. Oder wie die vorgezeichneten Felder auf einem²⁸ Schachbrett, oder die Linien einer Tabelle. Von diesen Linien etc. wird man nicht sagen, daß sie uns etwas mitteilen (obwohl sie ein Teil einer Mitteilung sein können, ja auch selbst Mitteilungen). Ich lege in einer Abmachung mit jemandem eine Regel fest. In dieser Abmachung teile ich ihm etwa die Regel (einer künftigen Darstellung) mit. Ich sage ihm etwa: „der Plan, den ich Dir von meinem Haus zeichne, ist im Maßstab 1 : 10“. Das ist eigentlich ein Teil der Beschreibung des Hauses. Und wenn ich schreibe $\sim p$ & ($\sim p = p$) so ist das wirklich ähnlich, wie wenn ich dem Plan den Maßstab beifüge.

242v ²⁹Kann man „ \sim “ nicht in der selben³⁰ Bedeutung gebrauchen ob man nun definiert $\sim\sim p = p$ oder $\sim\sim p = \sim p$? Denn warum sollen wir nicht wie in vielen Wortsprachen eine doppelte Negation als Negation verwenden? Man könnte dann etwa unterscheiden zwischen $\sim(\sim p) = p$ & $\sim\sim p = \sim p$ aber eine Schreibweise $\sim(\sim p)$ braucht es gar nicht in unserer Sprache zu geben³¹ & die Schreibweise $\sim\sim p = \sim p$ multipliziert zwar unnötig Zeichen der Negation, aber mehr kann man ihr nicht zum Vorwurf machen. Wie ist mir aber dann die Bedeutung des Verneinungszeichens³² gegeben? Durch das Kopfschütteln, die abwehrende Bewegung? (Aber diese bestimmen keinen *Kalkül*.) Oder durch eine Reihe besonderer Erklärungen wie etwa die „der Fleck befindet sich nicht innerhalb dieser Figur heißt . . .“?

243 ³³Ich könnte auch so sagen: Ich will nur das mitteilen, was der Satz der Sprache mitteilt; und die Regel ist nichts als ein Hilfsmittel *dieser* Mitteilung (so wie ich sie, die Regel, verstehe). Schon deshalb kann³⁴ die Regel nicht selbst eine Mitteilung sein; denn sonst würde der Sinn des Satzes irgendwie zugleich den Sinn der Mitteilung über den Sprachgebrauch beinhalten.

³⁵Wir müssen uns vergegenwärtigen, wie wir in der Philosophie, d.h. beim Klären grammatischer Fragen, wirklich von Regeln reden; – damit wir auf der Erde bleiben und nicht nebelhafte Konstruktionen bauen.³⁶ Ich gebe z.B. Regeln wie: $(\exists x).\phi x : \forall : \phi a : \forall : \phi b = (\exists x).\phi x$ oder $\sim\sim p = p$, oder ich sage, daß es sinnlos ist von einem „rötlichen Grün“ zu reden, oder von „schwärzlichem“ Schwarz“, oder ich sage, daß „ $a = a$ “ sinnlos ist, oder beschreibe eine Notation die dieses Gebilde und „ $(\exists x).x = x$ “ vermeidet, oder sage, es habe keinen Sinn zu sagen, etwas „scheine rot zu scheinen“, oder es habe Sinn zu sagen, daß im Gesichtsraum eine krumme Linie aus geraden Stücken zusammengesetzt sei, oder es habe den gleichen Sinn, zu sagen „der Stein falle, weil er von der Erde angezogen werde“ und „der Stein *müsse* fallen, weil er von der Erde etc.“.

Ich biete dem Verwirrten eine Regel an und er nimmt sie an. Ich könnte auch sagen: ich biete ihm eine Notation an.

27 (M): XXX

28 (V): dem

29 (M): ✓

30 (V): gegenwärtigen

31 (V): nicht zu geben

32 (V): Bedeutung des Zeichens „~~nicht~~“ der Verneinung

33 (M): ✓

34 (V): ~~kann~~ // darf

35 (M): ////

36 (V): machen.

37 (O): „schwärzlichen

imagine what he imagines. The words “the contract binds me” are, to be sure, a pictorial representation, and are therefore a false proposition, given the usual meaning of the word “to bind”; but understood correctly, they are true (or can be true), and they distinguish the one case from another in which a contract merely tells me what it is useful for me to do. And even if one objects to the words “the contract (or the law) binds me”, one can’t object to the words: “I *feel* bound by the contract”.

²⁷A rule – as I understand it – is like a path in a garden. Or like the pre-established squares on a²⁸ chess board or the lines in a table. One doesn’t say of these lines, etc., that they communicate anything to us (even though they can be part of a communication, even communications themselves). In an agreement with someone I set down a rule. In this agreement I apprise him of the rule (for a future representation). I might say to him, for instance: “The blueprint of my house that I’m drawing for you is on a scale of 1 : 10”. Actually that is part of the description of the house. And if I write $\sim p$ & ($\sim\sim p = p$), then that really is similar to my appending the scale to the blueprint.

²⁹Can’t one use “ \sim ” with the same³⁰ meaning, whether one defines $\sim\sim p = p$ or $\sim\sim p = \sim p$? For why shouldn’t we use a double negation as a negation, as is done in many word-languages? Then one could differentiate, say, between $\sim(\sim p) = p$ and $\sim\sim p = \sim p$, but the symbolic form $\sim(\sim p)$ doesn’t even have to exist in our language,³¹ and although the symbolic form $\sim\sim p = \sim p$ multiplies negation signs unnecessarily, one cannot blame it for more. But how then is the meaning of the negation sign³² given to me? By a shaking of the head, a rebuffing movement? (But these don’t determine a *calculus*.) Or by a series of particular explanations, such as, “ ‘The spot is not located within this figure’ means . . . ”?

³³I could also put it this way: All I want to report is what a proposition of language reports; and a rule (as I understand it) is nothing but an aid for *this* report. For this reason alone a rule cannot³⁴ itself be a report; because otherwise the sense of the proposition would somehow also contain the sense of the report about the use of language.

³⁵We need to call to mind how we actually talk about rules in philosophy, i.e. when we are clarifying grammatical questions; so that we keep our feet on the ground and don’t construct³⁶ buildings in the mist. For example, I set up rules such as: $(\exists x).\phi x :V: \phi a :V: \phi b = (\exists x).\phi x$ or $\sim\sim p = p$, or I say that it makes no sense to speak about a “reddish green” or about a “blackish black”, or I say that “a = a” makes no sense, or I describe a notation that avoids this formation, as well as “ $(\exists x).x = x$ ”, or I say that it makes no sense to say that something “seems to seem red”, or that it makes sense to say that in the visual field a curved line is made up of straight pieces, or that it makes equally good sense to say “The stone falls because it is attracted by the earth” and “The stone *has to* fall because it . . . by the earth, etc.”.

I present a rule to someone who is confused and he accepts it. I could also say: I present him with a notation.

27 (M): XXX

28 (V): the

29 (M): ✓

30 (V): ~~current~~

31 (V): have to exist,

32 (V): sign “ \sim ” of negation

33 (M): ✓

34 (V): ~~cannot~~ // rule may not

35 (M): ////

36 (V): create

Wie schaut nun so eine Notation aus? Nun, in den meisten Fällen werde ich Sätze der alten Notation (etwa der Wortsprache) in die entsprechenden Sätze der neuen Schreibweise übersetzen; etwa indem ich schreibe:

alt:	neu:
$(\exists x, y).\phi(x, y)$	$(\exists x, y).\phi(x, y) :V: (\exists x).\phi(x, x)$
$(\exists x, y).\phi(x, y) \text{ \& } x \neq y$ ³⁸	$(\exists x, y).\phi(x, y)$
etc.	

³⁹Die Regel entspricht aber in gewissem Sinne dem, was man eine „Annahme“ genannt hat. Sie ist quasi ein Satzradikal (chemisch gesprochen). Und es ist charakteristisch für die Art unserer Untersuchung, daß wir uns nicht für die Sätze interessieren, die mit diesem Radikal gebildet werden (können). Im Mittelpunkt der Betrachtung steht die Regel; nicht, daß ich sie jemandem anbiete, nicht, daß jemand sie benützt, etc. Sie könnte, glaube ich, verglichen werden dem Plan eines Hauses, ich meine einer Zeichnung, die als Plan eines Hauses gebraucht werden kann, der aber kein existierendes Haus entspricht und von der auch nicht gesagt wird, daß ihr einmal eines entsprechen soll, etc.

⁴⁰Die Beschreibung einer neuen, etwa übersichtlicheren, Notation (denn auf die Übersichtlichkeit kommt es *uns* an) ist dann von der gleichen Art, wie die Beschreibung einer jener Sprachen, die die Kinder erfinden oder von einander lernen, worin z.B. jeder Vokal der gewöhnlichen Wörter⁴¹ verdoppelt und zwischen die Teile der Verdoppelung ein b gestellt wird. Hier sind wir ganz nah an's Spiel herangekommen. So eine Beschreibung oder ein Regelverzeichnis kann man als Definiens des Namens der Sprache oder des Spiels auffassen. Denken wir auch an die Beschreibung des Zeichnens, Konstruierens, irgend einer Figur, etwa eines Sternes (welches auch in Spielen eine Rolle spielt). Sie lautet etwa so: „Man zieht eine Gerade von einem Punkt A nach einem Punkt B, etc. etc.“. Diese Beschreibung könnte ich offenbar einfach⁴² durch eine Vorlage, d.h. Zeichnung, ersetzen.

Das, was hier irreführen scheint, ist ein Doppelsinn des Wortes „Beschreibung“, wenn man einmal von der Beschreibung eines wirklichen Hauses oder Baumes etc. spricht, einmal⁴³ von der Beschreibung einer Gestalt, Konstruktion, etc., einer Notation, eines Spiels. Worunter aber eben nicht ein Satz gemeint ist der sagt, daß ein solches Spiel irgendwo wirklich gespielt, oder eine solche Notation wirklich verwendet wird; vielmehr steht die Beschreibung statt der hier gebrauchten Wörter „ein solches Spiel“ und „eine solche Notation“.

Die Beschreibung einer Notation fängt (man) charakteristisch (erweise) oft mit den Worten an: „Wir *können* auch so schreiben: . . .“. Man könnte fragen: „was ist das für eine Mitteilung ‚wir können . . .‘?“ etc.⁴⁴ Man schreibt auch etwa: „übersichtlicher wird unsere Darstellung, wenn wir statt . . . schreiben: . . . ; und die Regeln geben . . .“; und hier stehen die Regeln in einem Satz.

⁴⁵Denken wir uns etwa ein Bild, einen Boxer in bestimmter Kampfstellung darstellend. Dieses Bild kann nun dazu gebraucht werden um jemandem mitzuteilen, wie er stehen, sich halten soll; oder, wie er sich nicht halten soll; oder, wie ein bestimmter Mann dort und dort gestanden ist;⁴⁶ etc. etc. Man könnte dieses Bild ein Satzradikal nennen.

38 (O): .&. $x \neq$

39 (M): ✓ / / /

40 (M): ✓

41 (V): Sprache

42 (V): auch

43 (V): spricht, ein andermal

44 (V): ‚wir können . . .‘ ? etc.

45 (M): ✓

46 (V): hat;

Now what does such a notation look like? Well, in most cases I'll translate propositions expressed in the old notation (say in a word-language) into corresponding propositions expressed in the new way of writing; for example by writing:

Old:		New:
$(\exists x, y).\phi(x, y)$	$(\exists x, y).\phi(x, y) :V: (\exists x).\phi(x, x)$
$(\exists x, y).\phi(x, y) \&. x \neq y$	$(\exists x, y).\phi(x, y)$
etc.		

³⁷But in a certain sense a rule corresponds to what has been called an “assumption”. It is as it were a propositional radical (in the chemical sense of that term). And it is characteristic of the nature of our investigation that we are not interested in the propositions that can be formed with this radical. It is the rule that stands at the centre of our examination; not the fact that I offer it to someone, not the fact that someone uses it, etc. I believe that it could be compared to the blueprint for a house, i.e. to a drawing that can be used as a blueprint for a house, but to which no existing house corresponds, and about which no one is saying that some day a house will correspond to it, etc.

³⁸The description of a new notation, say one that is more easily surveyed (for it is surveyability that is *our* concern), is like the description of one of those languages that children invent or learn from each other, in which for example each vowel of our ordinary words³⁹ is doubled and a “b” is inserted between the two parts of the doubling. Here we’ve come very close to a game. One can take such a description or list of rules as the definiens of the name of a language or a game. Let’s also think of describing the drawing or construction of some figure (which also plays a part in games), for example a star. The description might run something like this: “You draw a straight line from point A to point B, etc., etc.”. Obviously I could also just⁴⁰ replace this description with a model, i.e. a drawing.

What seems to lead us astray here is the ambiguity of the word “description”. Sometimes we speak of the description of a real house or tree, etc., and sometimes⁴¹ of the description of a shape, a structure, etc., of a notation, a game. By which, however, we do *not* mean a proposition that says that such a game is actually played somewhere, or that such a notation is actually used; rather, the description takes the place of the words we used above: “such a game” and “such a notation”.

Characteristically, one often begins the description of a notation with the words: “We *can* also write it like this: . . .”. It can be asked: “What kind of a report is ‘We can . . .?’” etc. One might also write: “Our presentation becomes clearer if instead of . . . we write: . . . ; and set up these rules . . .”; and here the rules occur in propositional form.

⁴²Let’s think of a picture, for instance, that represents a boxer in a certain fighting stance. Now this picture can be used to inform someone how he is to stand, to carry himself; or how he is not to carry himself; or how a particular man stood in a certain place; etc., etc. One could call this picture a propositional radical.

37 (M): ✓ ///

38 (M): ✓

39 (V): vowel in our ordinary language

40 (V): Obviously I could also

41 (V): and at another time

42 (M): ✓

⁴⁷„Regel“ ist in demselben Sinne ein Begriff mit verschwommenen Rändern, wie „Blatt“ oder „Stiel“ oder „Tisch“, etc.

⁴⁸Wenn man eine Notation beschreibt, sagt man etwa: „ich werde⁴⁹ in diesem Buch statt ‚p oder q‘ ‚p \vee q‘ schreiben“, und das ist natürlich ein kompletter Satz. Das aber, was ich „Regel“ nennen will, und etwa „p oder q . = . p \vee q“ geschrieben wird, ist keiner. – Was ich „Regel“ nenne, soll nichts von einer bestimmten (oder auch unbestimmten) Zeit oder einem Ort der Anwendung enthalten, sich auf keine bestimmten (oder unbestimmten) Personen beziehen; sondern nur Instrument der Darstellung sein.

Wir sagen nun: „wir gebrauchen die Wörter ‚rot‘ und ‚grün‘ in solcher Weise, daß es als sinnlos gilt (kontradiktorisch ist) zu sagen, am selben Ort sei zu gleicher Zeit rot und grün“. Und dies ist natürlich ein Satz, Erfahrungssatz über unsere tatsächliche Sprache.

245v ⁵⁰Eine Regel, könnte man sagen, ist kein Befehl, sondern quasi ein⁵¹ Vorschlag.

Man könnte sich die Regeln eines Spiels auch in der Form gegeben denken: „Willst Du nicht folgendes Spiel spielen: . . .“

246 ⁵²Die Stellung der Spielregeln zu den Sätzen. Eine Regel verhält sich zu einem Erfahrungssatz ähnlich, wie die Zeichnung, die die charakteristischen Merkmale eines Wohnhausplanes hat, zu der Beschreibung, welche sich einer solchen Zeichnung bedient, und welche sagt, daß so ein Haus dort und dort stehe.⁵³

⁵⁴Der Respekt, den man vor den Regeln (z.B.⁵⁵ des Schachspiels) hat, warum wir ihre Autorität – sozusagen – nicht in Frage ziehen,⁵⁶ kommt⁵⁷ daher, daß die Spiele, die von ihnen⁵⁸ beschrieben⁵⁹ werden,⁶⁰ uns in vielerlei Hinsicht⁶¹ gemäß sind. Denken wir uns aber, ich beschreibe⁶² ein Spiel, ich will es etwa „Abracadabra“ nennen,⁶³ indem ich⁶⁴ die Regel gebe:⁶⁵ „Man lege einen Feldstein in eine viereckige Kiste, nagle die Kiste zu und werfe mit einem andern Stein nach ihr“ – gewiß hat dieses Gebilde auch das Recht, eine Regel

247 genannt zu werden. Man wird nur fragen: „was soll das alles? wozu sollen wir das machen?“ Aber auf solche Fragen geben ja auch die Schachregeln keine Antwort. Aber in dem Fall der eben gegebenen Regel⁶⁶ fällt das Wort auf „man lege . . . und werfe“,⁶⁷ nämlich die imperative Form;⁶⁸ man möchte fragen: warum soll ich . . . legen etc., oder in welchem Fall? Was muß mein Zweck sein, damit ich das tun soll? Das heißt, der Imperativ scheint uns hier unsinnig. Aber er ist es ebensowenig, wie in einer gewöhnlichen Spielregel. Nur sieht

47 (M): ///

48 (M): ////

49 (V): will

50 (M): ////

51 (V): sondern ein

52 (M): XXX

53 (V): existiere.

54 (M): ///

55 (V): (z. B. ~~enen~~)

56 (V₁): Der Respekt, den man vor den Regeln des Schachspiels – ~~etwa~~ // (z.B.) // – hat, ich meine, daß man sie annimmt ohne sich über sie zu wundern, // sich nicht über sie . . . (V₂): Der Respekt, den man vor den Regeln, // – des Schach z.B. – ~~daß~~ hat, – daß ~~man~~ wir sie annehmen, uns nicht über sie wundern – ,

57 (V): entspringt

58 (V): von den Regeln

59 (O): beschreiben

60 (V): die Spiele, die diese Regeln charakterisieren, // beschreiben,

61 (V): Beziehung // Weise

62 (V): erfände

63 (V): ein Spiel, es soll etwa „Abracadabra“ heißen,

64 (V): ich ~~dafür~~

65 (V): ein Spiel, das ich etwa „Abracadabra“ nenne und gebe dafür die Regel:

66 (V): Fall jener Regel

67 (V): fällt das Wort „man lege . . . und werfe“ auf,

68 (V): nämlich der Imperativ;

⁴³“Rule” is a concept with blurred edges in the same sense as “leaf” or “stem” or “table”, etc.

⁴⁴In describing a notation one might say: “In this book I shall⁴⁵ write ‘ $p \vee q$ ’ instead of ‘ p or q ’”, and of course that is a complete sentence. But what I want to call a “rule” that might be written “ p or q . = . $p \vee q$ ” is not a complete sentence. – What I am calling a “rule” must not contain anything about a particular (or even general) time or place for its application, and must not refer to particular people (or people in general); it is to serve only as an instrument of representation.

We say: “We use the words ‘red’ and ‘green’ in such a way that it is considered senseless (is contradictory) to say that there is red and green in the same place at the same time”. And of course this is a proposition, an empirical proposition, about our actual language.

⁴⁶One could say that a rule is not a command, but as it were a⁴⁷ suggestion.

One could also imagine the rules of a game given this way: “Don’t you want to play the following game: . . . ?”

⁴⁸The status of the rules for a game relative to propositions. A rule relates to an empirical proposition very much like a drawing that has the characteristic features of a blueprint of a house to the description that uses such a drawing, and that says that there is such a house⁴⁹ in such and such a place.

⁵⁰The respect that one has for the rules (e.g.⁵¹ of chess), why – in a manner of speaking – we don’t question their authority⁵², comes⁵³ from the fact that the games they⁵⁴ describe⁵⁵ are suited to us in many different respects.⁵⁶ But let’s imagine that I were to describe⁵⁷ a game I want to call, say, “Abracadabra”⁵⁸, by setting up this rule:⁵⁹ “Put a fieldstone into a rectangular crate, nail the crate shut and then throw another stone at it” – certainly this concoction also has the right to be called a rule. The only thing is, someone will ask: “What’s all this good for? Why should we do that?” But neither are such questions answered by the rules of chess. But in the case of the rule just mentioned⁶⁰ the words “Put . . . and throw” catch one’s attention, specifically their imperative form,⁶¹ one is inclined to ask: “Why should I put . . . etc., or when? What’s the point of doing that?” That is, the imperative strikes us here as nonsensical. But it isn’t, any more so than in a normal rule of a game. It’s just that

43 (M): ///

44 (M): ////

45 (V): I want to

46 (M): ////

47 (V): but a

48 (M): XXX

49 (V): that such a house exists

50 (M): ///

51 (V): (e.g. ~~these~~

52 (V₁): The respect that one has for the rules of chess – ~~perhaps~~ // (for example) // – I mean that one accepts them without being surprised about them //

accepts them and is not surprised about them

(V₂): The respect that one has for rules, // – of

chess, for example – ~~that~~ has, – that ~~one~~ we accept them, and are not surprised about them –

53 (V): derives

54 (V): the rules

55 (V): games that these rules characterize // describe

56 (V): ways.

57 (V): invent

58 (V): a game – let it be called “Abracadabra”

59 (V): game that I call, say, “Abracadabra” and I give this rule for the game:

60 (V): of this rule

61 (V): specifically the imperative;

62 (V): It’s just that here

man in diesem Fall⁶⁹ klar, daß man es nicht mit einem Befehl⁷⁰ zu tun hat. Höchstens mit der Definition von „Abracadabra“,⁷¹ nämlich: „Abracadabra spielen“⁷² heißt, einen Feldstein in eine Kiste legen, etc.

246v ⁷³Kaufe Dir in einer Spielwarenhandlung ein Spiel. Du erhältst eine Schachtel darin die Implemente des Spiels & ein Regelverzeichnis. Was sind die Regeln dieses Verzeichnisses für⁷⁴ Sätze? Wird Dir vom Erzeuger des Spiels befohlen so & so zu handeln, oder wird es Dir angeraten?⁷⁵ Oder wird Dir mitgeteilt daß die & die Menschen, oder alle Menschen, so handeln?⁷⁶ Nun, sieh doch nur nach wie das Regelverzeichnis gebraucht wird!⁷⁷ Die meisten Leute die das Spiel kaufen lesen die Regeln & spielen nach ihnen. –

„Wenn der Satz von den Spielfiguren handelt so ist er also ein Erfahrungssatz!“ – So ist also auch dies ein Erfahrungssatz: „Alle Wohlgerüche Arabiens . . .“⁷⁸

Dieser Satz *kann* die Rolle eines Erfahrungssatzes spielen & die Sätze des Regelverzeichnisses könnten die Rolle von Befehlen, von Ratschlägen oder von Erfahrungssätzen spielen, (sie) *tun* es aber nicht.

69 (V): man hier

70 (V): einem ~~kompletten Satz~~

71 (O): „Abracadabra;

72 (V): „Abracadabra“ spielen“

73 (M): v

74 (V): die Regeln für

75 (V): befohlen so zu handeln? Oder angeraten?

76 (V): so ~~gehandelt haben?~~

77 (V): sieh doch nach wie . . . gebraucht wird.

78 (E): Shakespeare, *Macbeth*, 5. Akt, 1. Aufzug.

in this case⁶² one sees clearly that one is not dealing with a command⁶³, but at most with the definition of “Abracadabra” – namely, “‘Playing Abracadabra’ means putting a field stone into a crate, etc.”.

⁶⁴Buy a game in a toy store. You get a box and in it the implements of the game and a list of rules. What kinds of propositions are the rules on this list?⁶⁵ Are you told by the manufacturer of the game to act in such and such a way, or⁶⁶ is this suggested to you? Or are you informed that such and such people, or all people, act⁶⁷ in this way? Well, just check and see how the list of rules is used! Most people who buy the game read the rules and play in accordance with them. –

“If the proposition is about the pieces of the game, then it’s an empirical proposition!” – So is this too an empirical proposition: “All the perfumes of Arabia . . .”⁶⁸?

This proposition *can* play the role of an empirical proposition, and the propositions listing the rules could play the roles of commands, pieces of advice or empirical propositions, but (they) don’t *do* so.

63 (V): a ~~complete sentence~~

64 (M): v

65 (V): the rules?

66 (V): to act thus? Or

67 (V): people ~~have~~ acted

68 (E): Shakespeare, *Macbeth*, Act V, Scene 1.

Die strikten grammatischen
Spielregeln und der schwankende
Sprachgebrauch.
Die Logik normativ.
Inwiefern reden wir von idealen
Fällen, einer idealen Sprache?¹
(„Logik des luftleeren Raums“.)

²Was heißt es, zu wissen, was eine Pflanze ist?

Was heißt es, es zu wissen und es nicht sagen zu können?

„Du weißt es und kannst hellenisch reden, also mußt Du es doch sagen können.“³ Müßigkeit einer Definition, etwa der, des Begriffs „Pflanze“. Aber ist die Definition kein Erfordernis der Exaktheit? „Der Boden war ganz mit Pflanzen bedeckt“:⁴ damit meinen wir nicht Bacillen. Ja, wir denken dabei vielleicht an grüne Pflanzen einer bestimmten Größenordnung. ⁵Wer uns sagen würde, wir wissen nicht, was wir reden, ehe wir eine⁶ Definition der Pflanze gegeben haben, den würden⁷ wir mit Recht für verrückt halten. Ja, wir könnten auch mit einer solchen Definition uns in den gewöhnlichen Fällen nicht besser verständigen. Ja, es scheint sogar, in gewissem Sinne schlechter, weil gerade das Undefinierte in diesem Fall zu unserer Sprache zu gehören scheint.

⁸Eine⁹ richtige Erklärung könnte in so einem Falle durch ein gemaltes Bild gegeben werden und mit den Worten¹⁰ „so ähnlich hat der Boden ausgesehen“. Denken wir uns aber nun wir wollten¹¹ die Erklärung¹² exakt machen indem wir sagen: „der Boden hat genau so ausgesehen“. Also¹³ genau diese Gräser & Blätter in diesen Lagen waren dort? Das ist es offenbar nicht was *ich* meinte. Welche exakte Erklärung immer mir Einer gäbe, ich könnte keine anerkennen.

1 (O): Sprache.

2 (M): ✓

3 (E): Vgl. Platon, *Charmides*, 159a.

4 (V): bedeckt“;

5 (M): ///

6 (V): keine

7 (O): haben, würden

8 (M): ✓

9 (V): Denken wir Eine

10 (O): und den Worten (V): werden zusammen mit den Worten

11 (V): nun wir es wollte jemand

12 (O): Erklärung

13 (V): ausgesehen“. ~~Nun~~ Also

The Strict Grammatical Rules
of a Game and the Fluctuating
Use of Language.
Logic as Normative.
To what Extent do we Talk about
Ideal Cases, an Ideal Language?
("The Logic of a Vacuum.")

¹What does it mean to know what a plant is?

What does it mean to know it and not be able to say it?

"You know it and you can speak Greek, so surely you must be able to say it."² The uselessness of a definition, say of the concept "plant". But doesn't precision require a definition? "The ground was all covered with plants": here we don't mean bacilli. Indeed, in this context we might think of green plants of a particular size. ³We'd rightly consider someone insane who told us that we don't know what we're talking about until we've given a definition of a plant. Under ordinary circumstances we couldn't communicate any better with such a definition. Indeed, it even seems worse, in a certain sense, because precisely what is undefined seems in this case to belong to our language.

⁴In⁵ such a case a correct explanation could be given using a painting and⁶ the words "That's more or less what the ground looked like". But now suppose we⁷ wanted to make the explanation exact, by saying: "The ground looked exactly like this." So precisely these grasses and leaves were there in those positions? That is obviously not what I meant. No matter which exact explanation I'm given, I couldn't accept it.

1 (M): ✓

2 (E): Cf. Plato, *Charmides*, 159a.

3 (M): ///

4 (M): ✓

5 (V): ~~We think~~ In

6 (V): painting together with

7 (V): someone

248v ¹⁴Ist eine scharfe Photographie immer & für alle Zwecke besser¹⁵ als eine unscharfe, verschwommene? Was, wenn Einer¹⁶ sagen würde: „ein unscharfes Bild ist eigentlich gar kein Bild“?!

249 ¹⁷Denken wir uns in dem Satz einer Erzählung „der Boden war ganz mit Gräsern und Kräutern bedeckt“ die Wörter „Gräser“ und „Kräuter“ durch Definitionen ersetzt. Es ist klar, daß diese Definitionen lange und komplizierte Ausdrücke sein werden;¹⁸ und nun ist die Frage, ob wir denn wirklich mit dem Satz das gemeint haben, was jetzt in dem ungleich viel komplizierteren steht. Wir würden – glaube ich – sagen, daß wir an alles das gar nicht gedacht hätten.

¹⁹Kann man nun aber auf eine solche Sprache die Idee des Kalküls anwenden? Und ist das nicht so, als wollte man in einem Bild, worin alle Farbflächen ineinander verlaufen, von Farbgrößen reden? Oder liegt die Sache so: Denken wir uns ein Spiel, etwa das Tennis, in dessen Regeln nichts über die Höhe gesagt ist, die ein Ball im Flug nicht übersteigen darf. Und nun sagte Einer: Das Spiel ist ja gar nicht geregelt, denn, wenn Einer den Ball so hoch wirft, daß er nicht wieder auf die Erde zurückfällt, oder so weit, daß er um die Erde herumfliegt, so wissen wir nicht, ob dieser Ball als „out“ oder „in“ gelten soll. Man würde ihm – glaube ich – antworten, wenn ein solcher Fall einträte, so werde man Regeln für ihn geben, jetzt sei es nicht nötig.

²⁰So können doch grammatische Regeln über den Gebrauch des Wortes „Pflanze“ gegeben werden und wir können also auf Fragen von der Art „folgt aus diesem Sachverhalt, daß dort eine Pflanze steht“ Bescheid geben. Auf andere solche Fragen aber sind wir nicht gerüstet und können antworten: Ein solcher Fall ist noch nie vorgekommen und es wäre für uns müßig, für ihn vorzusorgen. (Wenn es etwa gelänge, ein Lebewesen halb maschinell und halb auf organischem Weg zu erzeugen, und nun gefragt würde: ist das nun noch ein Tier (oder eine Pflanze).)

250 Wenn etwa beim Preisschießen für gewisse Grenzfälle keine Bestimmung getroffen wäre, ob dieser Schuß noch als Treffer ins Schwarze gelten soll (oder nicht). Nehmen wir nun aber an, ein solcher Schuß komme bei unserem Preisschießen gar nicht vor; könnte man dann dennoch sagen, die ganze Preisverteilung gelte nichts, weil für diesen Fall nicht vorgesorgt²¹ war?

²²Ich mache mich doch anheischig, das Regelverzeichnis unserer Sprache aufzustellen: Was soll ich nun in einem Fall wie dem des Begriffes „Pflanze“, tun?

²³Soll ich sagen, daß für diesen und diesen Fall keine Regel aufgestellt ist? Gewiß, wenn es sich so verhält. Soll ich aber solches sagen wie, es gibt²⁴ kein Regelverzeichnis unserer Sprache und das ganze Unternehmen, eins aufzustellen, ist Unsinn? – Aber es ist ja klar, daß es nicht unsinnig ist, denn wir stellen ja mit Erfolg Regeln auf, und wir müssen uns nur enthalten, Dogmen aufzustellen. (Was ist das Wesen eines Dogmas? Ist es nicht die Behauptung eines naturnotwendigen Satzes über alle möglichen Regeln?)²⁵

14 (M): ✓

15 (V): immer besser

16 (V): man

17 (M): ✓

18 (V): müssen;

19 (M): ///

20 (M): /// – vorzusorgen.

21 (V): vorgesehen

22 (M): ///

23 (M): /// – aufzustellen.

24 (O): aber solche sagen, es gibt

25 (V): Dogmas? Besteht es nicht darin, naturnotwendige Sätze über alle möglichen Regeln zu behaupten?)

⁸Is a sharp photograph always and for all purposes better⁹ than an out-of-focus, blurry one? What if someone¹⁰ were to say: “An out-of-focus picture really isn’t a picture at all”?!

¹¹Let’s imagine that in this sentence of a story, “The ground was all covered with grass and herbs”, the words “grass” and “herbs” are replaced by definitions. It is clear that these definitions will be¹² long and complicated expressions; and now the question is whether we really did mean by this sentence what is now contained in the immeasurably more complicated one. We would say – I believe – that we hadn’t even thought of all that.

¹³So can one now apply the idea of a calculus to such a language? And wouldn’t that be like trying to talk about colour boundaries in a picture in which all the patches of colour bleed into each other? Or is it like this: Let’s think of a game, say tennis, whose rules say nothing about the maximum height for a ball’s trajectory. And now imagine that someone were to say: This game isn’t regulated at all, for if someone throws the ball so high that it doesn’t return to earth, or so far that it flies around the earth, then we don’t know whether this ball is to count as “out” or “in”. We’d answer him – I believe – that if such a case were to come about we’d set up rules for it, but that for now it isn’t necessary.

¹⁴Thus we can give grammatical rules for the use of the word “plant”, and so we can answer questions of this kind: “Does it follow from *this* state of affairs that there is a plant over there?”. But we aren’t prepared for other such questions, and can answer: Such a case has never happened, and it would be pointless for us to prepare for it. (Say if someone succeeded in creating a living being that was half-machine and half-organic, and then the question were: Now is that still an animal (or a plant)?)

If, say at a shooting match, no regulation had been made for certain borderline cases, whether this shot is to count as hitting the bull’s eye (or not). But now let’s assume that at our match such a shot never occurs; then could one say that the entire distribution of prizes was invalid, because no provisions had been made¹⁵ for that case?

¹⁶I’m undertaking the establishment of the list of rules for our language: Now what am I to do in a case like that of the concept “plant”?

¹⁷Should I say that for this or that case no rule has been established? Certainly, if that’s the way it is. But should I say such things as: There is no list of rules for our language and the whole venture of setting one up is nonsense? – But it’s clear that this isn’t nonsensical, for after all, we do successfully set up rules, and we just have to refrain from setting up dogmas. (What’s the nature of a dogma? Isn’t it the assertion that there’s a naturally necessary proposition for every possible rule?¹⁸)

8 (M): ✓

9 (V): purposes always better

10 (V): one

11 (M): ✓

12 (V): will have to be

13 (M): ///

14 (M): /// – for it.

15 (V): because nothing had been planned

16 (M): ///

17 (M): /// – dogmas.

18 (V): dogma? Doesn’t it consist in asserting that there are naturally necessary propositions for all possible rules?

249v ²⁶Ich mache mich nicht anheischig ein Regelverzeichnis aufzustellen das alle unsere Sprachhandlungen regelt; sowenig ein Jurist es versucht für sämtliche Handlungen der Menschen Gesetze zu geben.


²⁷Was ist eine exakte Definition im Gegensatz zu einer unexakten? Nun etwa; eine Def. in der nicht das Wort „ungefähr“, „beiläufig“ &²⁸ ähnliche vorkommen.

250 ²⁹„Ich weiß, was eine Pflanze ist, kann es aber nicht sagen.“ Hat dieses Wissen die Multiplizität eines Satzes, der nur nicht ausgesprochen wurde? So daß, wenn der Satz ausgesprochen würde, ich ihn als den Ausdruck meines Wissens anerkennen würde? – Ist es nicht vielmehr wahr, daß jede exakte Definition als Ausdruck unseres Verstehens abgelehnt werden müßte? D.h., würden wir nicht von so einer sagen müssen, sie bestimme zwar einen, dem unseren verwandten, Begriff, aber nicht diesen selbst? Und die Verwandtschaft sei etwa die, zweier Bilder, deren eines aus unscharf begrenzten Farbflächen, das andere aus ähnlich geformten und verteilten, aber scharf begrenzten, bestünde. Die Verwandtschaft wäre dann ebenso unlegbar, wie die Verschiedenheit.

251

³⁰Die Frage ist nun: kannst Du bei dem ersten Bild auch von Flecken reden? Gewiß, nur in einem anderen, aber verwandten, Sinn.

³¹Das heißt: die unscharfen Grenzen gehören zu meinem Begriff der Pflanze, so wie er jetzt ist, d.h. so, wie ich dieses Wort jetzt gebrauche, und es charakterisiert diesen Begriff, daß ich z.B. sage: ich habe darüber keine Bestimmung getroffen, ob dieses Ding eine Pflanze heißen soll oder nicht.

³²Es verhält sich doch mit dem Begriff „Pflanze“ ähnlich, wie mit dem der Eiförmigkeit, wie wir sie im gewöhnlichen Leben meinen. Die Grenzen dieses Begriffs sind nicht scharf bestimmt und wir würden z.B. ein Osterei von dieser Form  nicht als solches gelten lassen und doch nicht sagen können, bei welchem Verhältnis der Länge und Breite etwas anfängt, ein Osterei zu sein. Ja, wenn Einer nun ein solches Verhältnis angäbe, *was es auch sei*, so könnten wir es nicht als die richtige Begrenzung unseres Begriffs anerkennen. Sondern wir müßten entweder sagen: nein, das nenne ich kein Osterei, es ist zu schlank, oder zu dick etc., oder: ja, das ist *auch* ein Osterei, aber der Grenzfall ist es nicht gerade. Diesen gibt es eben nicht in unserm Kalkül und wer einen Grenzfall einführt, führt einen andern Kalkül ein.

252 ³³Wenn man sagt „N. existiert nicht“, so kann das verschiedenerlei bedeuten. Es kann heißen, daß ein Mann, der, als er lebte, diesen Namen trug, nicht, oder nicht zu einer gewissen Zeit, in einem gewissen Land existiert hat; aber auch, daß spätere Geschichtsschreiber den Charakter, den wir so (etwa „Moses“) nennen, erfunden haben, daß die und die Ereignisse nie stattgefunden haben und ihr Held also nie gelebt hat. ³⁴„Moses hat nicht existiert“ – das³⁵ kann heißen: Es hat nicht *einen* Menschen gegeben der alle die Taten die von Moses berichtet werden getan hat. Es hat keinen Mann mit Namen „Moses“ gegeben der die Israeliten durch die Wüste³⁶ geführt hat. Es hat so einen Mann gegeben aber er hat nicht „Moses“ geheißten.

251v

³⁷Russell würde sagen daß wir den Namen Moses durch verschiedene Beschreibungen definieren können („der Mann, welcher ‚Moses‘ hieß und zu dieser Zeit an diesem Ort lebte“, oder

26 (M): ✓ ///

27 (M): ✓

28 (V): „beiläufig“ ~~ed~~

29 (M): ✓ ///

30 (M): ///

31 (M): ///

32 (M): ✓

33 (M): ✓

34 (M): /// – geheißten.

35 (V): existiert“; das

36 (V): Israeliten ~~aus Ägypten~~

37 (M): /// – erhält


¹⁹I am not undertaking the establishment of a list of rules that regulates all of our speech acts; any more than a jurist tries to make laws for all human actions.

²⁰What is an exact definition, as opposed to an inexact one? Well, for instance: a definition in which the words “about”, “approximately” and so forth do not occur.

²¹“I know what a plant is, but I can’t say it.” Does this knowledge have the multiplicity of a sentence that just didn’t get expressed? So that if the sentence were expressed, I would acknowledge it as the expression of my knowledge? – Isn’t it true, rather, that every exact definition would have to be rejected as an expression of our understanding? That is, wouldn’t we have to say of such a definition that although it does determine a concept related to ours, it doesn’t determine our concept? And that the connection was, say, like two pictures, one of which consisted of colour patches with blurred borderlines, and the other of ones that were similarly shaped and distributed, but clearly demarcated. Then the connection would be just as undeniable as the difference.

²²Now the question is: Can you talk about patches in the first picture as well? Certainly, but only in another though related sense.

²³That means: The blurred borderlines are part of my concept of a plant as it now stands, i.e. as I now use this word, and it is characteristic of this concept that I say, for example: I haven’t determined whether this thing is to be called a plant or not.

²⁴After all, the concept “plant” is similar to that of “ovoid”, as we understand it in everyday life. The boundaries of this concept aren’t sharply determined, and we wouldn’t acknowledge an Easter egg that had this shape , for example, as being an Easter egg, and yet we couldn’t say at what ratio of length and width something begins to be one. Indeed, if someone were to state such a ratio, *whatever it might be*, we could not acknowledge it as the correct delimitation of our concept. Rather, we would either have to say: No, I don’t call that an Easter egg, it is too narrow or too fat, etc., or: Yes, that’s an Easter egg *too*, but it isn’t exactly a borderline case. The borderline case simply doesn’t exist in our calculus, and whoever introduces a borderline case introduces a different calculus.

²⁵If someone says “N doesn’t exist”, this can mean a variety of things. It can mean that a man who went by this name when he was alive didn’t live in a certain country or didn’t live there at a certain time; but also that later historians invented the character that we call by that name (say “Moses”), that such and such events never took place and that therefore their hero never lived. ²⁶“Moses didn’t exist” – that can mean: There wasn’t any *one* person who did all of the deeds that are reported of Moses. There was no man by the name of “Moses” who led the Israelites through the desert.²⁷ There was such a man, but his name wasn’t “Moses”.

²⁸Russell would say that we can define the name Moses by different descriptions (“the man whose name was ‘Moses’ and who lived at that time in that place”, or “the man – whatever he was

19 (M): ✓ ///

20 (M): ✓

21 (M): ✓ ///

22 (M): ///

23 (M): ///

24 (M): ✓

25 (M): ✓

26 (M): /// – wasn’t “Moses”.

27 (V): Israelites ~~out of Egypt~~.

28 (M): /// – another definition

„der Mann – wie immer er damals genannt wurde – welcher die Israeliten durch die Wüste führte“, oder „der Mann, der als kleines Kind von der Königstochter aus dem Nil gefischt wurde“, etc. etc.). Jenachdem wir die eine oder andere Def. annehmen erhält³⁸ der Satz „Moses hat existiert“ einen andern Sinn und ebenso jeder andere Satz, der von Moses handelt. ³⁹Man könnte⁴⁰ auch immer, wenn uns jemand sagte „N existiert nicht“, fragen: „was meinst Du? willst Du sagen, daß . . . , oder daß . . . etc.?“ – Wenn ich nun sage: „N ist gestorben“ so kann es mit „N“ *etwa* folgende Bewandnis haben:⁴¹ Ich glaube, daß ein Mensch N gelebt hat: den ich 1.) dort und dort gesehen habe, der 2.) so und so ausschaut, 3.) das und das getan hat und 4.) in der bürgerlichen Welt den Namen „N“ führt. ⁴²Gefragt, was ich unter „N“ verstehe, würde ich alle diese Dinge, oder einige von ihnen, und bei verschiedenen Gelegenheiten verschiedene, aufzählen. Meine Definition von „N“ wäre also: der Mann, von dem alles das stimmt. Wenn aber nun einiges davon sich als falsch erwiese, – wäre der Satz „N⁴³ ist gestorben“ nun als falsch anzusehen? auch, wenn nur etwas vielleicht ganz Nebensächliches, was ich von dem Menschen glaubte, nicht stimmen würde; – wo aber⁴⁴ fängt das Nebensächliche⁴⁵ an? Das kommt nun darauf hinaus, daß wir den Namen „N“ in gewissem Sinne ohne feste Bedeutung gebrauchen, oder: daß wir bereit sind, die Spielregeln nach Bedarf zu verändern (make the rules as we go along). Das erinnert an das, was ich früher einmal über die Benützung der Begriffswörter, z.B. des Wortes „Blatt“ oder „Pflanze“, geschrieben habe. – Und hier erinnere ich mich daran, daß Ramsey einmal betont hat, die Logik sei eine „normative Wissenschaft“. ⁴⁶Wenn man damit meint, sie stelle ein Ideal auf, dem sich die Wirklichkeit nur nähere, so muß gesagt werden, daß dann dieses „Ideal“ uns nur als ein Instrument der annähernden Beschreibung der Wirklichkeit interessiert. ^{252v} „Die Logik ist eine normative Wissenschaft“ sollte doch wohl heißen⁴⁷ sie stelle Ideale auf⁴⁸ denen wir nachstreben sollen. Aber so ist es ja nicht. Die Logik stellt exacte Kalküle auf. ²⁵³ ⁴⁹Es ist allerdings möglich, einen Kalkül genau zu beschreiben und zwar zu dem Zweck, um dadurch eine Gruppe anderer Kalküle beiläufig zu charakterisieren. Wollte z.B. jemand wissen, was ein Brettspiel ist, so könnte ich ihm zur Erklärung das Damespiel genau beschreiben und dann sagen: siehst Du, so ungefähr funktioniert jedes Brettspiel. – War es nun nicht ein Fehler von mir (denn so scheint es mir jetzt) anzunehmen, daß der, der die Sprache gebraucht, immer *ein bestimmtes Spiel* spiele? Denn, war das nicht der Sinn meiner Bemerkung, daß alles an einem Satz – wie beiläufig immer er ausgedrückt sein mag – „in Ordnung ist“? Aber wollte ich

38 (V): nie gelebt hat. D.h. also: kein Mensch hat Moses geheißt und diese Taten vollbracht; oder: das Ding, das Dir als Herr N vorgestellt wurde, war eine Puppe; etc. Denken wir uns, es sagte uns Einer, er habe Moses auf der Straße gesehen. Wir würden ihn dann fragen: „wie meinst Du das: Du hast ihn gesehen? Wie wußtest Du denn, daß er es war?“ und nun könnte der Andre sagen: „er hat es mir gesagt“, oder „er sah so aus, wie ich mir Moses vorstelle“, oder „er hatte diese und diese Merkmale“, etc. Ich will doch wohl das sagen, was Russell dadurch ausdrückt, daß der Name Moses durch verschiedene Beschreibungen definiert sein kann („der Mann, welcher ‚Moses‘ hieß und zu dieser Zeit an diesem Ort lebte“, oder „der Mann – wie immer er damals genannt wurde – welcher die

Israeliten durch die Wüste führte“, oder „der Mann, der als kleines Kind von der Königstochter aus dem Nil gefischt wurde“, etc. etc.). Und je nachdem wir die eine oder andere Definition annehmen, bekommt

39 (M): | – daß . . . etc.?”

40 (V): würde

41 (V): so ~~hat~~ es mit „N“ *gewöhnlich etwa* folgende Bewandnis:

42 (M): | – as we go along).

43 (V): „N“

44 (V): würde; – und wo

45 (V): Hauptsächliche

46 (M): /// – interessiert.

47 (V): Wissenschaft“ *heißt eigentlich*

48 (V): auf ~~nach~~

49 (M): ///

then called – who led the Israelites through the desert” or “the man who as a baby was fished out of the Nile by the pharaoh’s daughter”, etc., etc.). Depending on whether we accept one or another definition,²⁹ the sentence “Moses existed” acquires a different sense, and so too does every other sentence about Moses.³⁰ In addition, every time someone tells us “N doesn’t exist” we could³¹ ask: “What do you mean? Do you want to say that . . . , or that . . . etc.?” – Now if I say: “N has died”, then, *for example*, the situation with “N” can be as follows³²: I believe that a person N used to live: 1. whom I saw in such and such a place, 2. who has such and such an appearance, 3. who has done this and that, and 4. who is called “N” in bourgeois society.³³ If I am asked what I understand by “N” I’d enumerate all of these things, or some of them, and different ones on different occasions. So my definition of “N” would be: the man of whom all of this is correct. But if some of these things now turned out to be false – would the proposition “N³⁴ has died” now have to be viewed as false? Even if only something possibly quite trivial that I believed about this person were incorrect? – But where³⁵ does the trivial³⁶ begin? What this amounts to is that, in a certain sense, we use the name “N” without a fixed meaning, or that we are ready to alter the rules of the game as we need (make up the rules as we go along). This brings to mind what I once wrote about the use of concept-words, for example, of the word “leaf” or “plant”. – And here I recall that Ramsey once emphasized that logic is a “normative discipline”.³⁷ If what’s meant by this is that logic establishes an ideal to which reality can only approximate, then it must be said that this “ideal” interests us only as an instrument for the approximate description of reality. “Logic is a normative discipline” presumably is supposed to mean³⁸ that it sets up ideals towards³⁹ which we are supposed to strive. But that’s not the way it is. Logic sets up exact calculi.⁴⁰ Of course it *is* possible to describe a calculus exactly: for the specific purpose of giving a rough characterization of a different group of calculi. If for instance someone wanted to know what a board game was, then I could explain by describing draughts to him in detail and then say: “See, that’s more or less how every board game works”. – Now wasn’t it a mistake of mine (for that’s what it strikes me as now) to assume that whoever uses language always plays *a particular game*? For wasn’t that the sense of my remark that everything about a proposition – no matter how off-the-cuff it is – “is in order”? But wasn’t what I wanted to say: Everything has to be in order when someone utters a

29 (V): never lived. That is: There was never a human Moses who accomplished these deeds; or: the object that was introduced to you as Mr N was a doll; etc. Let’s imagine that someone were to tell us that he had seen Moses on the street. Then we would ask him: “What do you mean: did you see him? How did you know that it was he?” And then the other person could say: “He told me so”, or “He looked the way I imagine Moses”, or “He had such and such characteristics”, etc. What I want to say is what Russell expresses by saying that the name “Moses” can be defined with various descriptions (“the man whose name was ‘Moses’ and who lived at that time in that place”, or “the man – whatever he was called then – who led

the Israelites through the desert”, or “the man who as a baby was fished out of the Nile by the pharaoh’s daughter”, etc., etc.). And depending on whether we accept one or another definition,

30 (M): | – etc.?”

31 (V): would

32 (V): with “N” ~~is usually~~ as follows

33 (M): | – go along).

34 (V): “N”

35 (V): incorrect; – and where

36 (V): essential

37 (M): /// – reality.

38 (V): discipline” ~~actually means~~

39 (V): ideals ~~according to~~

40 (M): ///

nicht sagen: alles müsse in Ordnung sein, wenn Einer einen Satz sage und ihn anwende? Aber daran ist doch weder etwas in Ordnung noch in Unordnung. – In ⁵⁰Ordnung wäre es, wenn man sagen könnte: auch dieser Mann spielt ein Spiel nach einem bestimmten, festen Regelverzeichnis.⁵¹

Denn ich habe zur Feststellung der Regel, nach der er handelt, zwei Wege angegeben.⁵² Der eine, der hypothetische, bestand in der Beobachtung seiner Handlungen und die Regel war dann von der Art eines naturwissenschaftlichen Satzes. Der andere war, ihn zu fragen, nach welcher Regel er vorgehe. Wie aber, wenn der erste Weg kein klares Resultat ergibt und die Frage keine Regel zu Tage fördert, wie es im Fall „N⁵³ ist gestorben“ geschieht. Denn, wenn wir den, der das sagte, fragen „was ist N?“; so wird er zwar „N“ durch eine Beschreibung erklären, wird aber bereit sein, diese Beschreibung zu widerrufen und abzuändern, wenn wir ihm den einen oder andern Satz entziehen.⁵⁴ Wie soll ich also die Regel bestimmen,⁵⁵ nach der er spielt? er weiß sie selbst nicht. Ich könnte eine Regel nur nach dem bestimmen, was er auf die Frage „wer ist N“ in diesem Fall gerade antwortet.

253v ⁵⁶Unsre Untersuchung trachte nicht die exacte⁵⁷ Bedeutung der Wörter zu *finden*;⁵⁸ wohl aber *geben* wir den Wörtern im Verlauf unsrer Untersuchung oft exacte Bedeutungen.

254 ⁵⁹Steckt uns da nicht die Analogie der Sprache mit dem Spiel ein Licht auf? Wir können uns doch sehr wohl denken, daß sich Menschen auf einer Wiese damit unterhielten, mit einem Ball zu spielen; und zwar so, daß sie verschiedene bestehende Spiele der Reihe nach angingen, nicht zu Ende spielten und etwa dazwischen sogar planlos den Ball würfen, auffingen, fallen ließen, etc. Nun sagte Einer: die ganze Zeit hindurch spielen die Leute ein Ballspiel und richten sich daher bei jedem Wurf nach bestimmten⁶⁰ Regeln. – Aber – wird man einwenden – der den Satz „N ist gestorben“ gesagt hat, hat doch nicht planlos Worte aneinander gereiht (und darin besteht es ja, daß er „etwas mit seinen Worten gemeint hat“). – Aber man kann wohl sagen: er sagt den Satz planlos, was sich eben in der beschriebenen Unsicherheit zeigt. Freilich ist der Satz von irgendwo hergenommen und wenn man will, so spielt er nun auch ein Spiel mit sehr primitiven Regeln; denn es bleibt ja wahr, daß ich auf die Frage „wer ist N“ *eine Antwort* bekam, oder eine Reihe von Antworten, die nicht gänzlich regellos waren. – Wir können sagen: Untersuchen wir die Sprache auf ihre Regeln hin. Hat sie dort und da keine Regeln, so ist *das* das Resultat unsrer Untersuchung.⁶¹

255 Wenn aber der Träger dem Namen abhanden kommen, oder nie existiert haben kann, so mußte man beim Gebrauch des Namens von vornherein damit rechnen. Das mußte in seiner Bedeutung liegen. ((Es sei denn, daß wir diese Bedeutung geändert haben, oder, daß das Wort keine *bestimmte* Bedeutung hatte; denn welches ist die Bedeutung, wenn er sie nicht angeben kann? Nun, wir werden sein tatsächliches Verhalten durch ein „Schwanken zwischen mehreren Bedeutungen“ beschreiben können. Es ist wohl wesentlich, daß ich ihn fragen kann: was hast Du eigentlich gemeint. Und als Antwort wird er mir vieles sagen, und sich vielleicht⁶² an mich wenden, daß ich ihm das Regelverzeichnis einrichte, das seinem Zweck

50 (V): Unordnung, – in	(O): Unordnung. –	56 (M): ✓
	in	57 (V): <i>eigentliche</i>
51 (V): Regelverzeichnis. Und setzt das nicht	wieder voraus, daß dieses	58 (V): <i>finden; se</i>
		59 (M): ✓
52 (O): angeben.		60 (V): <i>gewissen</i>
53 (V): „N“		61 (R): √ S. 250v
54 (V): widerlegen.		62 (V): etwa
55 (V): auffassen,		

sentence and uses it? But there is nothing either in order or in disorder about this. – It⁴¹ is in order if one can say: This man too is playing a game in accordance with a particular, fixed set of rules.⁴²

For I have indicated two ways of ascertaining the rule according to which he acts. One of them, the hypothetical, consisted in observing his actions, and then the rule was of the same kind as a proposition of science. The other was to ask him which rule he was following. But what if the first approach leads to no clear result, and the question as well turns up no rule, as happens in the case of “N⁴³ has died”. For if we ask the person who said that, “Who is N?” then, to be sure, he’ll explain “N” by describing him, but he’ll be ready to recant this description and to change it if we deprive him of this⁴⁴ or that proposition. So how should I determine⁴⁵ the rule in accordance with which he is playing? He doesn’t know it himself. I could only ascertain the rule based on what he happens to answer when he is asked “Who is N?”.

⁴⁶Our investigation shouldn’t endeavour to *discover* the exact⁴⁷ meaning of words; but frequently, in the course of our investigation, we *give* exact meanings to words.

⁴⁸Doesn’t the analogy of language to a game enlighten us here? We can very well imagine that people in a meadow might entertain themselves by playing with a ball; and that they might do this in such a way that they’d begin various existing games one after the other without finishing them, and in between would even throw, catch, drop the ball, etc., aimlessly. Now someone might say: These people are playing a ball game the entire time, and that is why at each throw they comply with specific⁴⁹ rules. – But – it will be objected – whoever spoke the sentence “N has died” didn’t string words together aimlessly (and that’s what “having meant something by his words” consists in). – But one *can* say: He utters the sentence aimlessly, which is shown precisely in the uncertainty described above. To be sure, the sentence was taken from somewhere, and if you like, now he’s also playing a game with very primitive rules; for it remains true that I got *an answer* to the question “Who is N?”, or a series of answers that were not entirely erratic. – We can say: Let’s investigate language with regard to its rules. If here and there it doesn’t have any rules, then *that* is the result of our investigation.⁵⁰

But if it’s possible that a name can lose its bearer or that that bearer never existed, then this had to be taken into consideration when it was first used. It had to be contained within its meaning. (Unless we changed this meaning or the word had no *particular* meaning; for what is the meaning if the speaker can’t state it? Well, we’ll be able to describe his actual behaviour as “fluctuating between several meanings”. It’s without a doubt essential that I can ask him: What did you actually mean? And in answering me he’ll tell me a lot of things, and maybe ask me to set up a list of rules for him that suits his purpose. Then the expression “So what you really wanted to say, was . . .” will often come up in our conversation (and once again, this expression can be completely misunderstood – it isn’t a description of

41 (V): about this, – this

42 (V): rules. ~~And doesn’t this in turn presuppose that this~~

43 (V): “N”

44 (V): we refute this

45 (V): understand

46 (M): ✓

47 (V): essential

48 (M): ✓

49 (V): certain

50 (R): ∀ p. 250v

entspricht. Es wird sich dann in unserm Gespräch oft die Redeweise finden „Du wolltest also eigentlich sagen . . .“ (und diese kann wieder ganz mißverstanden werden – sie ist keine Beschreibung des damaligen Geisteszustands des Sprechenden; als ob das, „was er sagen wollte“ irgendwo in seinem Geist ausgedrückt gewesen wäre).⁶³

Hier⁶⁴ ist eine Gefahr: Es scheint nämlich dann oft, als erreichten wir endlich etwas,⁶⁵ was wir mit unserer gewöhnlichen Sprache gar nicht mehr ausdrücken können. Das ist aber das sicherste Zeichen (dafür), daß wir fehl gegangen sind; aus unserm Spiel herausgetreten sind. – Was versteht man unter „allen Regeln des Tennisspiels“? Alle Regeln, die in einem bestimmten Buche stehen, oder alle die der Spieler im Kopf hat, oder alle die je ausgesprochen wurden, oder gar: alle die sich angeben lassen?! – Daher wollen wir lieber nicht so vag von „allen Regeln“ reden, sondern nur von bestimmten Regeln, oder allen Regeln eines Verzeichnisses, etc. Und das gleiche gilt von den Regeln über die Verwendung eines Wortes. Wenn Einer mich, z.B., etwas fragt, so will ich, wenn ich ihm antworte, wissen, ob diese Antwort in seinem Spiel als Antwort auf seine Frage gilt; ob in seinem Spiel dieser Satz aus dem, was er gesagt hat, folgt.⁶⁶

256 Für uns ist es genügend, daß es eine Frage gibt: „wie meinst Du das?“ und daß als Antwort auf diese Frage das *zuerst* gegebene Zeichen durch ein neues ersetzt wird. – Der Einwand dagegen ist, daß mir *eine* Erklärung ja nichts zum Verständnis hilft, wenn sie nicht die letzte ist, und daß sie nie⁶⁷ die letzte ist. Ich kann zwar erklären: unter „Moses“ verstehe ich den Mann, wenn es einen solchen gegeben hat, der die Israeliten aus Ägypten geführt hat, wie immer er damals genannt worden sein mag und was immer er sonst getan oder nicht getan haben mag –, aber ähnliche Fragen ergeben sich nun in Bezug auf die Wörter dieser Erklärung⁶⁸ (was nennst Du „Ägypten“? wen, „die Israeliten“? etc.). Ja, diese Fragen kommen auch nicht zu einem Ende, wenn wir etwa bei Wörtern⁶⁹ wie „rot“, „dunkel“, „süß“, angelangt wären. Unrichtig war es nur, zu sagen, daß mir deshalb eine dieser Erklärungen nichts hilft. Im Gegenteil, sie ist es gerade, was ich brauche, ja alles, was ich brauchen, und auch geben kann. Als ich nach einer Erklärung fragte, war es gerade das was ich brauchte. Und wenn ich auf eine solche Erklärung hin sage „jetzt versteh⁷⁰ ich, was Du meinst“, so kann man nicht einwenden, das könne ich ja doch nie verstehen; sondern seine Erklärung hat mir eben das gegeben, was ich Verständnis nenne; sie hat *die* Schwierigkeit beseitigt, *die ich hatte*. Was uns quälte, ist, glaube ich, ganz in dem Pseudoproblem ausgedrückt: Das Schachspiel ist doch durch die Gesamtheit der Schachregeln konstituiert, – was macht dann das Rücken einer Figur im Spiel zu einem Schachzug, da doch dabei in keiner Weise alle Regeln des Schachspiels beteiligt sind.)

255v ⁷¹Es ist nicht unsere Aufgabe unsere Sprache zu verbessern,⁷² exakter zu machen, oder etwa (gar) zu versuchen an ihre Stelle eine „ideal exakte“ zu setzen.⁷³ Wir haben⁷⁴ von einer solchen gar keinen Begriff. Damit meine ich nicht, daß wir für unsere Zwecke nicht auf präzisieren⁷⁵ Ausdruck dringen.⁷⁶

63 (M): ✓ (R): [Siehe Notizbuch: was geschieht, wenn man sagt ich kann nicht gut ausdrücken was ich denke.]

64 (V): Aber hier

65 (V): Es scheint nämlich dann (leicht), als landeten wir am Schlusse bei etwas,

66 (V): dieser Satz aus jenem folgt.

67 (V): ~~nicht~~

68 (V): Wörter *dieses* Satzes

69 (V): Worten

70 (V): weiß

71 (M): ✓

72 (V): Sprache wesentlich zu verbessern,

73 (V): ~~Unsere Aufgabe ist es nicht eine Sprache zu konstruieren deren sämtliche~~

74 (V): Ich habe

75 (V): ~~exa~~

76 (V): dringen. /// Wer die *eine* Verkehrsregelung an Stellen starken Verkehrs verbessern oder strenger gestalten will

the speaker's mental state at that time; as if "what he wanted to say" had been expressed somewhere in his mind).⁵¹

Here⁵² there is a danger: It frequently seems as if we were finally reaching something⁵³ that we can no longer express with our ordinary language. But that is the surest sign that we have gone astray, have stepped outside our game. – What is to be understood by "all the rules of tennis"? All rules that are in a particular book, or all that are in a player's head, or all that have ever been uttered, or even: all that can be listed?! – Therefore we'd better not speak so loosely about "all the rules", but only about certain rules, or all the rules in a list, etc. And the same goes for the rules for the use of a word. If, for example, someone asks me something, I want to know, when I answer him, whether in his game my answer counts as an answer to his question; whether in his game my proposition follows from what he has said.⁵⁴

For us it is sufficient that there is a question: "How do you mean that?" and that, as an answer the first sign that was given is replaced by a new one. – The objection to this is that, after all, a *single* explanation is no help to my understanding unless it is the final one, and that it never is⁵⁵ the final one. To be sure, I can explain: By "Moses" I understand the man, if there was such a man, who led the Israelites out of Egypt, whatever he might have been called at that time and whatever else he might or might not have done. – But now similar questions arise with respect to the words in this explanation⁵⁶ (What do you call "Egypt"?, Whom "the Israelites"?, etc.). Indeed these questions don't come to an end even when we get down to words like, say, "red", "dark", "sweet". The only thing that was wrong was to say that that is why a single explanation doesn't help me. On the contrary, this single explanation is precisely what I need. Indeed, it is all that I can need – and all that I can give. When I asked for an explanation, that was exactly what I needed. And if I say, in answer to such an explanation, "Now I understand⁵⁷ what you mean", it can't be objected that I can never understand that; rather, his explanation gave me precisely what I call "understanding"; it removed *the difficulty that I had*. I believe that what was torturing us is completely expressed in this pseudo-problem: Chess is, after all, constituted by the totality of its rules – so what makes moving one piece in the game into a chess move, since this in no way involves all of the rules of chess?))

⁵⁸Our task is not to improve our language,⁵⁹ to make it more exact, or possibly even to try to replace it with an "ideally exact" one.⁶⁰ We have⁶¹ absolutely no concept of such a language. But by this I don't mean that, for our purposes, we don't push for more precise expressions.⁶²

51 (M): ✓ (R): [Cf. Notebook: what is going on when someone says I can't easily express what I'm thinking.]

52 (V): But here

53 (V): danger: it (easily) seems as if we were ending up with something

54 (V): from that one.

55 (V): that it is ~~not~~

56 (V): in *this* proposition

57 (V): know

58 (M): ✓

59 (V): our language essentially,

60 (V): ~~Our task isn't to construct a language all of whose~~

61 (V): I have

62 (V): expressions.

/// Whoever wants to improve or strengthen traffic regulations // ~~a traffic regulation~~ // in places where there is heavy traffic

⁷⁷Die Verkehrsregelung in den Straßen erlaubt & verbietet gewisse Verkehrshandlungen.⁷⁸ Aber sie versucht nicht *sämtliche* Bewegungen der Fußgänger & Fahrzeuge durch Vorschriften zu regeln.⁷⁹ Und es wäre unsinnig, von einer idealen Verkehrsordnung zu reden die das täte. Wir wüßten nicht wie wir uns dieses Ideal zu denken hätten.⁸⁰ Wünscht einer die Verkehrsordnung in irgendwelchen Punkten strenger zu gestalten so bedeutet das nicht daß er sich so einem Ideal zu nähern wünscht.

⁸¹Was wir Regeln nennen bilden wir nach Analogie von bestehenden Regeln.

⁸²Wir wissen alle was es heißt⁸³ daß eine Taschenuhr auf die genaue Stunde gestellt wird,⁸⁴ oder gerichtet wird damit⁸⁵ sie genau geht. Wie aber wenn man fragte: ist diese Genauigkeit eine ideale Genauigkeit oder⁸⁶ wie weit nähert sie sich ihr?

256v Wir können freilich von Zeitmessungen⁸⁷ reden bei denen es eine andere & in gewissem Sinne größere Genauigkeit gibt. Bei denen die Worte die Uhr auf die genaue Stunde stellen eine andere Bedeutung haben. Wo die Uhr ablesen ein anderer Prozess ist etc. Wenn ich nun jemandem sage Du solltest pünktlicher zum Mittagessen kommen, Du weißt daß es genau um 2h anfängt – ist⁸⁸ die Genauigkeit von der⁸⁹ hier die Rede ist eine unvollkommene im Vergleich zu jener andern. Und gibt es⁹⁰ *ein* Ideal der Genauigkeit.

257 ⁹¹Was bedeutet „undefinierbar“? Dieses Wort ist offenbar irreführend, denn es erweckt den Anschein, als könnten wir hier etwas versuchen, was sich dann als unausführbar erweise. Als wäre also das Undefinierbare etwas, was sich nicht weiter definieren ließe, wie sich ein zu großes Gewicht nicht heben läßt. Wir könnten sagen: „Wie denn ,undefinierbar“?! Könnten wir denn *versuchen*, es zu definieren?“

⁹²Ist „rot“ undefinierbar. Undefinierbar darunter stellt man sich etwas vor wie unanalysierbar & zwar so als wäre der betreffende Gegenstand unanalysierbar (wie ein chem. Element). Dann wäre die Logik also doch eine Art *sehr* allgemeiner Naturwissenschaft. Aber die Unmöglichkeit der Analyse entspricht einer von uns festgesetzten Form der Darstellung.⁹³

⁹⁴Nun könnte man freilich sagen: die Definition ist ja etwas Willkürliches, d.h., wie ich ein Wort definiere, so ist es definiert. Aber darauf kann geantwortet werden: Es kommt darauf an, es so zu definieren, wie wir das Wort meinen. Also so, daß wir zur Definition des Wortes „Tisch“, z.B., sagen: ja, das ist es, was ich mit dem Wort meine. – Ja hat Dich nun aber die Definition dahin gebracht, das mit dem Wort zu meinen oder willst Du sagen, daß Du das schon immer gemeint hast? Und wenn das Letztere, so hast Du also immer *das* gemeint, was die Definition sagt (im Gegensatz zu etwas Anderem, was sie auch sagen könnte). D.h.: die Definition ist auch eine Beschreibung dessen, was Du schon früher gemeint hast. Du warst also auch früher schon im Besitz einer Übersetzung dieser Definition; sie hat sozusagen nur laut gesagt, was Du schon im Stillen wußtest. Sie hat also auch wesentlich

77 (M): ✓

78 (V): ~~Handlungen~~.

79 (V): *sämtliche* Handlungen der ~~gehenden & fahrenden~~ Fußgänger & Fahrzeuge durch Regeln zu leiten.

80 (V): nicht was wir unter diesem Ideal vorstellen sollten.

81 (M): ///

82 (M): ✓

83 (V): heißt ~~daß~~ *der*

84 (V): heißt eine Uhr auf die genaue Stunde ~~zu stellen~~,

85 (V): ~~daß~~

86 (V): &

87 (O): Zeitmessen

88 (O): anfängt ist

89 (V): der ~~ich~~

90 (V): es ~~zeta~~ *wa*

91 (M): ✓ ✓

92 (M): /// ✓

93 (V): Analyse ~~ist eine logische entspringt aus der~~ *von uns* festgesetzten Darstellungsform.

94 (M): /// ✓

⁶³Traffic regulations allow and forbid certain movements of traffic⁶⁴ in the streets. But they don't attempt to regulate *all* movements of pedestrians and vehicles with ordinances.⁶⁵ And it would be nonsensical to speak of an ideal set of traffic rules that would do that. We wouldn't know how to imagine⁶⁶ this ideal. If someone wants to strengthen traffic regulations in some respects this doesn't mean that he wants to approximate to such an ideal.

⁶⁷What we call rules we form in analogy to existing rules.

⁶⁸All of us know what it means that a pocket watch is set⁶⁹ to the exact hour or that it is adjusted so that it runs accurately. But what if one were to ask: Is this accuracy an ideal accuracy, or⁷⁰ how closely does it approximate to one?

To be sure, we can talk about time-measurements of different and in some sense greater accuracy. Where the words "setting a watch to the exact hour" have a different meaning. Where reading the clock is a different process, etc. Now if I tell someone "You should be more punctual in arriving for lunch, you know that it starts exactly at 2 o'clock", is that accuracy imperfect as compared to the other kind? And is there *one* ideal of accuracy?

⁷¹What does "indefinable" mean? This word is obviously misleading, for it gives the impression that we could attempt something here that would later prove impossible to carry out. As if therefore the indefinable were something that couldn't be further defined, as a weight that's too heavy can't be lifted. We could say: "'Indefinable' in what way?! Could we *try* to define it?"

⁷²Is "red" indefinable? By "indefinable" one imagines something like "unanalysable" – as if the object in question were unanalysable (like a chemical element). But then logic would be a kind of very general natural science. But the impossibility of analysis corresponds to a form of representation that we have set down.⁷³

⁷⁴Now of course one could say: A definition *is* something arbitrary, i.e. a word is defined as I define it. But this can be answered: What matters is to define a word the way we mean it. That is, in such a way that when we come upon the definition of the word "table", for instance, we say: Yes, that's what I mean by that word. – Fine, but did the definition get you to mean that by the word or do you want to say that you've meant that from the very start? And if the latter, then you've always meant *what* the definition says (as opposed to something else that it might say as well). That is: the definition is also a description of what you already meant. So at an earlier point as well you were already in possession of a translation of this definition; it merely said aloud, as it were, what you already knew in your

63 (M): ✓

64 (V): certain ~~actions~~

65 (V): to guide *all* movements of the ~~walking and driving~~ pedestrians & vehicles with rules.

66 (V): know what we should imagine by

67 (M): ///

68 (M): ✓

69 (V): means ~~to set~~ a pocket watch

70 (V): and

71 (M): ✓ ✓

72 (M): /// ✓

73 (V): of analysis ~~is a logical one~~ originates from the form of representation ~~that we~~ have set down.

74 (M): /// ✓

nichts zergliedert. (Vergleiche: Begriff der 3 Teilung des Winkels vor & nach der Betrachtung die die Unmöglichkeit der 3 Teilung zeigt.)

- 256v ⁹⁵Gibt es ein komplettes Regelverzeichnis für die Verwendung eines Wortes?
Gibt es ein komplettes Regelverzeichnis für die Verwendung einer Figur im Schachspiel?
- 257 ⁹⁶Denken wir uns Jemand, der alle⁹⁷ Formen in diesem Zimmer beschreibt, indem er sie mit ebenflächigen geometrischen Formen vergleicht. Gibt es in diesem Zimmer nur solche Formen? Nein. – Muß der, der die Formen unter dem Gesichtspunkt der ebenflächigen Körper beschreibt, behaupten, es gäbe nur solche Formen im Zimmer? Auch nicht. Kann man sagen, daß das einseitig ist, weil er alle Formen durchgängig nach diesem Schema auffaßt? Und sollte es ihn an⁹⁸ dieser Auffassung irre⁹⁹ machen, wenn er bemerkt, daß auch runde Körper vorhanden sind? Nein. Es wäre auch irreführend, den ebenflächigen Körper ein „Ideal“ zu nennen, dem sich die Wirklichkeit nur mehr oder weniger nähert. Aber die Geometrie der ebenflächigen Körper könnte man mit Bezug auf diese Darstellung¹⁰⁰ eine normative Wissenschaft nennen. (Eine, die das Darstellungsmittel darstellt; gleichsam eine, die die Meßgläser eicht.)
- 256v ¹⁰¹Man kann fragen: Wenn wir nicht eine ideale¹⁰² Exactheit anstreben, im Gegensatz zu der alltäglichen, wozu¹⁰³ hantieren¹⁰⁴ wir an¹⁰⁵ der Grammatik unserer Sprache überhaupt herum. Und die Antwort ist:¹⁰⁶ Wir suchen uns von philos. Beunruhigungen zu befreien¹⁰⁷ & das tun wir indem wir Unterscheidungen welche die Grammatik der gewöhnlichen Sprache verschleiert, hervorheben.
- 257v Sozusagen Regeln die mit verblaßter Tinte geschrieben sind, stark nachziehen und anderes mehr. Dadurch kann es allerdings den Anschein haben als reformierten wir die Sprache.
- 258 ¹⁰⁸Ich habe ein Bild mit verschwommenen Farben und komplizierten Übergängen. Ich stelle ein einfaches mit klargeschiedenen Farben, aber mit dem ersten verwandtes, daneben. Ich sage nicht, daß das erste eigentlich das zweite¹⁰⁹ sei; aber ich lade den Andern ein, das einfache anzusehen, und verspreche mir davon, daß gewisse Beunruhigungen für ihn verschwinden werden.
- 257v ¹¹⁰Wer etwa . . . einführte könnte im Interesse der Chemie die Sprache verbessern . . .
- ¹¹¹So eine Reform für gewisse praktische¹¹² Zwecke ist wohl denkbar die Verbesserung unserer Terminologie zur Vermeidung von Mißverständnissen. (Wenn zwei Mitglieder einer Familie „Paul“ heißen, so ist es manchmal zweckmäßig den einen von ihnen bei einem andern Namen zu nennen.) Aber das sind nicht die Fälle mit denen wir es zu tun haben. Die Konfusionen mit denen wir's zu tun haben¹¹³ entstehen, gleichsam, wenn die Sprache feiert, nicht wenn sie arbeitet. (Man könnte sagen: wenn¹¹⁴ sie leer läuft.)
- 258 ¹¹⁵Behandle die deutlichen Fälle in der Philosophie, nicht die undeutlichen. Diese werden sich lösen, wenn jene gelöst sind.

95 (M): ✓

96 (M): ///

97 (V): die

98 (V): in

99 (V): irre~~ff~~

100 (V): Darstellungsweise

101 (M): ✓

102 (O): idealen

103 (V): Wenn wir nicht nach einer idealen Exaktheit streben, wozu

104 (V): arbeiten

105 (V): mit

106 (V): Antwort ist: ~~Unsere Aufgabe ist es gewisse Beunruhigungen zu beseitigen und wir suchen nach dem erlösenden Wort~~

107 (V): Wir suchen philos. Beunruhigungen zu ~~beseitigen~~

108 (M): ///

109 (V): andere

110 (M): XXX

111 (M): ✓

112 (V): für praktische

113 (V): Konfusionen die uns beschäftigen

114 (V): sagen, wenn

115 (M): ////

heart. So, essentially it didn't analyse anything either. (Compare: The concept of the trisection of an angle before and after the investigation that shows the impossibility of trisection.)

⁷⁵Is there a complete list of rules for the use of a word?

Is there a complete list of rules for the use of a chess piece in a game of chess?

⁷⁶Let's imagine someone who describes all the⁷⁷ shapes in this room by comparing them to plane geometric shapes. Are there only such shapes in this room? No. – Does the person who describes the shapes from the viewpoint of plane figures have to claim that there are only such shapes in the room? No again. Can one say that this procedure is one-sided, because he is viewing all shapes uniformly, according to this schema? And should his also noticing the presence of round objects make him question this view? No. It would also be misleading to call the plane figures an "ideal" that reality more or less closely approximates. But with respect to this representation,⁷⁸ one could call the geometry of plane shapes a normative science. (One that represents the means of representation; one that calibrates the measuring beakers, as it were.)

⁷⁹One can ask: If we're not striving for an ideal accuracy as opposed to the everyday kind, why⁸⁰ are we fiddling around with⁸¹ the grammar of our language at all? And the answer is: We're trying to free ourselves from philosophical⁸² anxieties, and we do this by emphasizing distinctions that the grammar of everyday language obscures. By retracing in bold the rules that are written in faded ink, as it were, and other such things. This can indeed make it seem as if we were reforming language.

⁸³I have a picture with blurred colours and complicated transitions. Next to it I place a simple one, with clearly separated colours, but related to it. I don't say that the first is actually the second⁸⁴; but I invite someone to look at the simple one, and expect that in doing this certain worries he has will disappear.

⁸⁵Whoever introduced, say . . . , could improve language in the interest of chemistry

⁸⁶Such a reform for certain practical⁸⁷ purposes is conceivable, to be sure – the improvement of our terminology to avoid misunderstandings. (If two members of a family are called "Paul" then sometimes it's practical to call one of them by another name.) But those are not the cases we're dealing with. The confusions that concern us⁸⁸ come about, as it were, when language is on holiday, not when it's working. (One could say: when⁸⁹ it is idling.)

⁹⁰Deal with the clear cases in philosophy, not the ones that are unclear. They will be solved when the former are.

75 (M): ✓

76 (M): ///

77 (V): who describes the

78 (V): this mode of representation,

79 (M): ✓

80 (V): If we're not striving for an ideal precision, why

81 (V): we belabouring

82 (V₁): answer is: ~~it is our task to get rid of certain~~

~~anxieties and we search for the liberating word~~

(V₂): We're trying to ~~get rid of~~ philosophical

83 (M): ///

84 (V): the other

85 (M): XXX

86 (M): ✓

87 (V): for practical

88 (V): that are occupying us

89 (V): say, when

90 (M): ///

Die Tendenz mit der Untersuchung eines Satzes da anzufangen, wo seine Anwendung ganz nebelhaft und unsicher ist (der Satz der Identität ist ein gutes Beispiel), anstatt diese Fälle vorläufig beiseite zu lassen und den Satz dort anzugehen, wo wir mit gesundem Menschenverstand über ihn reden können, diese Tendenz ist für die aussichtslose Methode der meisten Menschen, die philosophieren, bezeichnend.

¹¹⁶Ich betrachte die Sprache und Grammatik *als* Kalkül d.h. als Vorgang nach festgesetzten Regeln.¹¹⁷

257v ¹¹⁸Wir wollen nicht das Regelsystem in unerhörter Weise verfeinern oder vervollständigen.¹¹⁹

Wir wollen Verwirrungen & Beunruhigungen beseitigen die aus der Schwierigkeit herrühren, das System¹²⁰ zu übersehen.¹²¹

¹²²Es ist als wäre dieses Regelsystem in einem Buch niedergelegt; wir zögen aber dieses Buch in praktischen Fällen beinahe nie zu Rate. Hie & da aber wären wir versucht¹²³ darin zu lesen. Dann aber verwirrt es uns gänzlich. Vieles¹²⁴ darin ist so vergilbt daß wir es kaum lesen können anderes steht klar¹²⁵ da, ist aber ohne die nötigen Qualifikationen falsch & irreführend.

258 ¹²⁶Untersuchen wir unsere¹²⁷ Sprache *auf ihre Regeln hin*.

¹²⁸Gibt es so etwas, wie eine komplette Grammatik, z.B., des Wortes „nicht“?

259 ¹²⁹Es ist von der größten Bedeutung, daß wir uns zu einem Kalkül der Logik immer ein Beispiel denken, auf welches der Kalkül wirklich angewandt wird, und nicht Beispiele, von denen wir sagen, sie seien eigentlich nicht die idealen, diese aber hätten wir noch nicht. Das ist das Zeichen einer ganz falschen Auffassung.¹³⁰ Kann ich den Kalkül überhaupt verwenden, dann ist dies¹³¹ auch die ideale Verwendung und *die* Verwendung, um die es sich handelt. Man geniert sich nämlich einerseits, das Beispiel als das eigentliche anzuerkennen, weil man in ihm noch eine Komplikation erkennt, auf die der Kalkül sich nicht bezieht.¹³² Aber es ist das Urbild¹³³ des Kalküls und er davon hergenommen, & dies ist kein Fehler, keine¹³⁴ Unvollkommenheit des Kalküls. Der Fehler liegt darin seine Anwendung in neblhafter Ferne zu versprechen.¹³⁵

116 (M): ///

117 (V): Grammatik unter dem Gesichtspunkt des Kalküls, // unter der Form des Kalküls, // d.h. des Operierens nach festgelegten Regeln.

118 (M): ✓

119 (V): komplettieren.

120 (V): ~~Regel~~system

121 (V): die aus der Unübersichtlichkeit des Regelsystems herrühren.

122 (M): ///

123 (V): verleitet

124 (V): gänzlich, ~~den~~ Vieles

125 (V): ~~klar~~

126 (M): ///

127 (V): die

128 (M): ///

129 (M): ✓

130 (E): In MS 115 (S. 55–56) folgt auf diesen Satz: „(Russell und ich haben, in verschiedener Weise an ihr laboriert. Vergleiche was ich

in der ‚Logisch-philosophischen Abhandlung‘ über Elementarsätze und Gegenstände sage.)“

131 (V): das

132 (V): weil man in ihm eine Komplikation sieht für die der Kalkül nicht aufkommt.

133 (V): bezieht; andererseits ist es doch das Urbild // bezieht; aber es ist das Urbild

134 (V): oder

135 (V₁): hergenommen, und auf eine geträumte Anwendung kann man nicht warten. Man muß sich also eingestehen, welches das eigentliche Urbild des Kalküls ist. (V₂): ✓ Das ist aber kein Eingeständnis – als habe man damit einen Fehler gemacht // begangen //, den Kalkül von *daher* genommen zu haben, sondern der Fehler liegt darin, ihn jetzt in neblhafter Weise anzuwenden, oder eine Anwendung zu versprechen. // oder eine Anwendung in nebuloser Ferne zu versprechen.

The tendency to start investigating a proposition at the point where its application is completely nebulous and uncertain (the law of identity is a good example), instead of leaving these cases aside for the moment and approaching the proposition at the point where we can use our common sense to talk about it – this tendency is typical of the futile methods most people use who do philosophy.

⁹¹I view language and grammar *as* a calculus, i.e. as a process that follows⁹² fixed rules.

⁹³We don't want to refine the system of rules in fantastic ways, nor do we want to complete it.

We want to remove the confusions and anxieties that stem from the difficulty of seeing the system⁹⁴ all at a glance.

⁹⁵This is the way it seems to be: this system of rules has been set down in a book; but we almost never consult this book in practical cases. Every now and then, though, we're tempted to read⁹⁶ in it. And then it completely confuses us. Much⁹⁷ in it is so yellowed that we can barely read it, other things are clearly⁹⁸ visible, but without the necessary qualifications they are false and misleading.

⁹⁹Let's examine our language *with respect to its rules*.

¹⁰⁰Is there such a thing as a complete grammar, e.g., of the word "not"?

¹⁰¹It is of the utmost importance that for a logical calculus we always think of an example to which the calculus is actually applied, and not of examples of which we say: "These really aren't the ideal ones – we don't have those yet". That is the sign of a totally false view.¹⁰² If I can use the calculus at all then this¹⁰³ is also the ideal use and *the* use that is at issue. For on the one hand we're embarrassed to acknowledge our example as the proper one because we recognize a complication in it to which the calculus doesn't apply.¹⁰⁴ But it *is* the archetype¹⁰⁵ for the calculus and the latter is derived from it, and this is no mistake, no imperfection¹⁰⁶ in the calculus. The mistake lies in promising its use in the nebulous future.¹⁰⁷

91 (M): ///

92 (V): grammar from the point of view of a calculus, // in the form of a calculus, // i.e. as operating according to

93 (M): ✓

94 (V): stem from the inability to see the system of rules

95 (M): ///

96 (V): we're misled into reading

97 (V): us; ~~for~~ much

98 (V): ~~clearly~~

99 (M): ///

100 (M): ///

101 (M): ✓

102 (E): In MS 115 (pp. 55–56), this sentence is followed by: "(Russell and I have in different ways laboured under it. Compare what I say in the *Tractatus* about elementary propositions and objects.)"

103 (V): that

104 (V): because one sees a complication in it for which the calculus doesn't account.

105 (V): apply; on the other hand it is, after all, the archetype // apply; but it is the archetype

106 (V): no mistake or imperfection

107 (V₁): from it, and one cannot wait for an application one dreams up. Therefore one has to admit to oneself which application is the actual archetype of the calculus. (V₂): ✓ But it isn't an admission – as if one had made // committed // an error in having derived the calculus from *that*; rather the mistake lies in applying it now in a nebulous way, or in promising a use. // or in promising a use in the nebulous future.

¹³⁶(So könnte Spengler besser verstanden werden, wenn er sagte: ich *vergleiche* verschiedene Kulturperioden dem Leben von Familien; innerhalb der Familie gibt es eine Familienähnlichkeit, während es auch zwischen den Mitgliedern verschiedener Familien eine Ähnlichkeit gibt; die Familienähnlichkeit unterscheidet sich von der andern Ähnlichkeit so und so etc. Ich meine: das Vergleichsobjekt, der Gegenstand, von welchem diese Betrachtungsweise abgezogen ist, muß uns angegeben werden, damit nicht in die Diskussion immer Ungerechtigkeiten einfließen. Denn nun wird alles¹³⁷ das vom Objekt der Betrachtung behauptet was für das Urbild stimmt¹³⁸: und behauptet „es *müsse immer* . . .“.¹³⁹

258v
259
260 ¹⁴⁰Das kommt nun daher, daß man den Merkmalen des Urbilds einen Halt in der Betrachtung geben will. Da man aber Urbild und Objekt vermischt, dem Objekt dogmatisch beilegen muß, was nur das Urbild charakterisieren soll.¹⁴¹ Andererseits glaubt man, die Betrachtung habe nicht die¹⁴² Allgemeinheit, die man ihr geben will, wenn sie nur für den einen besondern Fall wirklich stimmt. Aber das Urbild soll ja eben als solches hingestellt werden; so, daß es die ganze Betrachtung charakterisiert, ihre Form bestimmt. Es steht also an der Spitze und ist dadurch ausgezeichnet aber nicht dadurch, daß alles, was nur von ihm gilt, von allen Objekten der Betrachtung ausgesagt wird.¹⁴³

259v Der Syllogismus¹⁴⁴ ist ein Kalkül der auf Sätze angewandt werden *kann*.¹⁴⁵ (Wie das Einmaleins auf Pflaumen.)¹⁴⁶

Der Syllogismus wartet nicht auf eine zukünftige exacte¹⁴⁷ Anwendung.
Fragen wir uns: Was ist¹⁴⁸ die *praktische* Anwendung des Syllogismus.

260 ¹⁴⁹Wie seltsam, wenn sich die Logik mit einer „idealen“ Sprache befaßte, und nicht mit *unserer*, denn woher sollten wir diese ideale Sprache nehmen? Und was sollte diese ideale Sprache ausdrücken? Doch wohl das, was wir jetzt in unserer gewöhnlichen Sprache ausdrücken; dann muß die Logik also diese untersuchen. Oder etwas anderes: aber wie soll ich dann überhaupt wissen, was das ist. – Die logische Analyse ist die Analyse von etwas, was wir haben, nicht von etwas, was wir nicht haben. Sie ist also die Analyse der Sätze *wie sie sind*. (Es wäre seltsam, wenn die menschliche Gesellschaft bis jetzt gesprochen hätte, ohne einen richtigen Satz zusammenzubringen.)

136 (M): ✓

137 (V): alles ~~was~~

259 138 (V): Denn da wird dann alles, was für das Urbild der Betrachtung stimmt // gilt //, auch von dem Objekt, worauf wir die Betrachtung anwenden, behauptet // ausgesagt

139 (M): Schenkersche Betrachtungsweise der Musik

140 (M): ///

141 (V): muß.

142 (V): Betrachtung ermangle ja der

143 (M): [dieser ~~Satz~~ Absatz vom Typisten falsch kopiert.] (E): Der Typist hat an dieser Stelle einen Teil des letzten Satzes ausgelassen. Um dem Satz Sinn zu verleihen, hat Wittgenstein hier eine handschriftliche

Ergänzung eingesetzt. Im Manuskript (MS 111, S. 120), das dieser Stelle als Grundlage dient, heißt es: „Es steht also an der Spitze und ist dadurch allgemein gültig, daß es die Form der Betrachtung bestimmt, nicht dadurch, daß alles was nur von ihm gilt von allen Objekten der Betrachtung ausgesagt wird.“

144 (O): Syllogismus

145 (V): Die Aristotelische Logik // Der Syllogismus // ist ein Spiel, das // Kalkül, der // sich auf Sätze anwenden *läßt*. 260

146 (M): [Gehört an eine andere Stelle] 260

147 (V): eine exacte

148 (V): Was ist

149 (M): ///

¹⁰⁸(Spengler could be better understood if he were to say: I am *comparing* different cultural periods to the lives of families; within families there are family resemblances, though there also are resemblances between the members of different families; family resemblances differ from these other resemblances in such and such a way, etc. I mean: The object of comparison, the object from which this way of looking at things is derived, has to be given to us, so that injustices won't constantly flow into the discussion. For everything that holds true for the archetype is now being claimed for the object under examination¹⁰⁹: and it is claimed that "it *always has to . . .*".¹¹⁰

¹¹¹This comes from wanting to give the characteristics of the archetype a foothold in the investigation. We conflate the archetype and the object, and then we have to dogmatically attribute to the object what should¹¹² be ascribed only to the archetype. On the other hand, we think the investigation doesn't have¹¹³ the generality we want to give it, if it really holds true only for the one particular case. But the archetype should be presented as precisely that; in such a way that it characterizes the whole investigation, determining its form. So it stands at the apex of the investigation and for that reason is superior, but not because everything that holds true only of it is predicated of all of the objects being investigated.¹¹⁴

The syllogism is a calculus that *can* be applied to propositions.¹¹⁵ (As the multiplication tables to plums.)¹¹⁶

A syllogism doesn't wait for an exact application in the future.¹¹⁷

Let's ask ourselves: What is¹¹⁸ the *practical* application of a syllogism?

¹¹⁹How strange if logic were to occupy itself with an "ideal" language and not with *ours*. For where should we get this ideal language from? And what should this ideal language express? Presumably, what we now express in our everyday language; so logic has to investigate that. Or investigate something else: But in that case, how am I to have any idea what that is? – Logical analysis is the analysis of something that we have, not of something we don't have. Therefore it is the analysis of propositions *as they are*. (It would be strange if humans had been speaking all this time without managing to utter a single correct sentence.)

108 (M): ✓

109 (V): For in that case everything that is correct // is valid // for the archetype that governs the examination is also claimed // predicated // of the object we're examining

110 (M): Schenker's way of looking at music.

111 (M): ///

112 (V): what has to

113 (V): investigation indeed lacks

114 (M): [This ~~sentence~~ paragraph was falsely copied by the typist] (E): The person who typed TS 212, from which this remark is taken, left a phrase out of the last sentence. Wittgenstein inserted the handwritten phrase ("superior, but not because") in TS 213 to give sense to

the sentence. The original sentence (in MS 111, p. 120) read: "So it stands at the apex of the investigation and for that reason is generally valid in that it determines the form of the investigation, but not because everything that holds true only of it is predicated of all of the objects being investigated."

115 (V): Aristotelian logic // The syllogism // is a game that // is a calculus that // *can* be applied to propositions.

116 (M): [Belongs somewhere else.]

117 (V): an exact application.

118 (V): What is

119 (M): ///

¹⁵⁰Nicht das ist wahr, daß, was wir sagen, ¹⁵¹nur für eine „ideale Sprache“ gilt (oder Geltung hätte); wohl aber kann man sagen, daß wir eine ideale Sprache konstruieren, in die aber dann alles übersetzbar ist, was in unidealen ¹⁵²Sprachen gesagt werden kann.

262 ¹⁵³Wenn Einer von einer idealen Sprache redet, so müßte man fragen: in ¹⁵⁴welcher Beziehung „ideal“?

¹⁵⁵(Es gibt keine Logik für den luftleeren Raum. Insofern es keine Hypothese in der Logik gibt.)

150 (M): ///

151 (V): was ich sage,

152 (V): in den anderen

153 (M): /// ✓

154 (E): Hier steht ein Hinweis eines Lesers auf irrtümliches Auslassen von S. 261 bei der Seitenzählung.

155 (M): /// ✓

¹²⁰It isn't true that what we are¹²¹ saying is valid (or would have validity) only for an "ideal language"; but it *can* be said that we are constructing an ideal language; but one into which whatever can be said in non-ideal¹²² languages can then be translated.

¹²³If someone talks about an ideal language, one ought to ask: "ideal" in what respect?

¹²⁴(There is no logic for a vacuum. In so far as there is no hypothesis in logic.)

120 (M): ///
121 (V): what I am
122 (V): in other

123 (M): /// ✓
124 (M): /// ✓

Wortarten werden nur durch ihre Grammatik unterschieden.

¹Es gibt nicht zwei Wortarten, die ich grammatisch (ganz) gleich behandeln kann, die aber doch zwei Wortarten sind. Sondern die Regeln, die von ihnen handeln, machen die Wortarten aus: dieselben Regeln, dieselbe Wortart. Das hängt damit zusammen, daß, wenn sich ein Zeichen ganz so benimmt wie ein anderes, die beiden dasselbe Zeichen sind.

²Verschiedenen Arten von Schachfiguren wie Läufer, Rössel etc. entsprechen verschiedene Wortarten.

³Ich komme hier auf jene Methode der Zeichenerklärung, über die sich Frege so lustig gemacht hat. Man könnte nämlich die Wörter „Rössel“, „Läufer“, etc. dadurch erklären, daß man die Regeln angibt, die von diesen Figuren handeln.

⁴Genau dasselbe gilt in jeder Geometrie von den Ausdrücken „Punkt“ und „Gerade“ etc. Was ein Punkt ist und was eine Gerade, sieht man nur daran, welche Plätze das eine und das andere in dem System von Regeln einnimmt. Denken wir uns etwa ein System von Buchstaben von solcher Art, daß alle erlaubten Zeichen Gruppen von 3 Buchstaben sind, und zwar derart, daß ein Buchstabe, der an einer Außenstelle stehen darf, nicht in der Mittelstelle stehen darf und umgekehrt. Diese Regel würde zwischen zwei „Wortarten“ unterscheiden und wir könnten das dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir für die Außenglieder große, für die Innenglieder kleine Buchstaben verwenden. – Andererseits aber hat die Unterscheidung zweier Wortarten keinerlei Sinn, wenn sie *nicht* auf die obige Art syntaktisch unterschieden sind, d.h. wenn sie nicht auch ohne die verschiedene Art der Bezeichnung, bloß durch die von ihnen geltenden Regeln, als verschieden zu erkennen wären. (Zwei Rössel könnten einander in keiner Hinsicht ähnlich sehen und wären, wenn man die für sie geltenden Spielregeln kennt, doch als solche gekennzeichnet.) Damit hängt es unmittelbar zusammen, daß das Einführen neuer Gattungsnamen in die Philosophie der Logik uns um kein Haar weiterbringt, solange nicht die syntaktischen Regeln gegeben sind, die den Unterschied machen.

Das Wort „ein gewisser“ und seine Grammatik. Ein Beispiel, wie man Worte häuft, um eine Bedeutung zu sichern, statt auf die Spielregeln zu achten. (Als wollte man dem Schachkönig ein wirkliches Gesicht anmalen, um ihm die richtige Wirkung zu sichern.)

1 (M): ///

2 (M): ///

3 (M): ///

4 (M): ///

Kinds of Words are Distinguished only by their Grammar.

¹There is no such thing as two kinds of words that I can treat (completely) equally in terms of grammar, and still have two kinds. Rather, the rules about kinds of words constitute them: the same rules, the same type of word. This is connected to the fact that if one sign behaves exactly like another, the two are the same sign.

²Different kinds of words correspond to different kinds of chess pieces, such as bishop, knight, etc.

³Here I am touching on the way of explaining signs that Frege ridiculed so much. For one could explain the words “knight”, “bishop”, etc. by citing the rules that apply to these pieces.

⁴Exactly the same thing holds for the expressions “point” and “straight line”, etc., in a geometry. One sees what a point is, and what a straight line, only by the positions each occupies in a system of rules. Let’s imagine, for instance, a system of letters in which all allowable signs are groups of three letters and, more precisely, are arranged so that a letter that is allowed on the outside is not allowed in the middle and vice versa. This rule would differentiate between two “kinds of words”, and we could express this by using capital letters for the outside parts and lower-case letters for the inside parts. – But on the other hand distinguishing between two kinds of words makes no sense whatsoever if they are *not* distinguished syntactically as described above, i.e. if they aren’t recognizable as different even without the different names given to them, but simply by the rules that apply to them. (Two knights might bear no resemblance to each other and still be designated as knights if one knows the rules of the game that apply to them.) Directly connected with this is the fact that introducing new names for categories into the philosophy of logic doesn’t get us a hair’s breadth further, so long as the syntactical rules that make the difference aren’t given.

The expression “a certain” and its grammar. An example of how one amasses words in order to safeguard a meaning, instead of paying attention to the rules of the game. (As if one were to paint a real face on a chess-king to ensure that he has the right effect.)

1 (M): ///

2 (M): ///

3 (M): ///

4 (M): ///

265 **Sage mir, was Du mit einem Satz
anfängst, wie Du ihn verifizierst, etc.,
und ich werde ihn verstehen.**

Die einzige Funktion des Satzes scheint es, auf dem Gedankenklavier zu spielen; die Musik die er darauf hervorbringt, – das Gedankengebilde, – das ist¹ der Gegenstand unsrer Untersuchung. Die Anwendung, die Tauschkraft des Satzes² im Verkehr, mag uns wohl³ manchmal einen Wink geben: *aber⁴ das ist nicht der Sinn des Satzes.*

Untersuche seine Nützlichkeit!

264v ⁵Die Frage „wie kann man das wissen“ fragt (in einer Bedeutung) nach einem logischen Zusammenhang, wenn sie nach einer logischen Möglichkeit fragt.

⁶Wie weiß man wenn es regnet. Wir sehen & fühlen etwa⁷ den Regen. Die Bedeutung des Wortes „Regen“ wurde uns durch solche⁸ Erfahrungen erklärt. „Was ist Regen“ & „wie sieht Regen aus“ sind logisch verwandte Fragen. Die Erfahrung habe⁹ nun gelehrt daß ein plötzliches¹⁰ Fallen des Barometers eintritt, wenn es regnet. Dann kann ich nun aus dem Fallen des Barometers entnehmen daß es regnet. Ich nenne es ein Symptom dafür daß es regnet. Ob ein Phänomen ein Symptom des Regens ist lehrt die Erfahrung. Was als Kriterium dafür gilt¹¹ daß¹² es regnet ist Sache der Abmachung (Definition).

265 ¹³Die Beschreibung¹⁴ der Verifikation eines Satzes ist ein Beitrag zu seiner Grammatik.

264v ¹⁵Man kann nicht die Möglichkeit der Evidenz mit der Sprache überschreiten. D.h. eigentlich: die Möglichkeit der Evidenz für einen Satz ist eine Angelegenheit der Grammatik.

265 ¹⁶Die Frage nach der Verifikation ist nur eine besondere¹⁷ Form der Frage „Was tut man mit diesem Satz?“¹⁸

1 (V): spielen; was er darauf hervorruft, das ist

2 (V): Untersuchung. Seine Anwendung, seine Tauschkraft

3 (V): zwar

4 (V): geben, *aber*

5 (M): ✓

6 (M): ✓

7 (V): sehen etwa

8 (V): diese

9 (V): habe ~~mich~~

10 (V): daß ein gewisses Phänomen etwa das plötzliche

11 (V): Was ein Kriterium dafür ist

12 (O): das

13 (M): ✓

14 (V): Angabe

15 (M): ✗

16 (M): ✓

17 (V): ~~andere~~

18 (V): der Frage „wie meinst Du das?“

60

Tell me What you do with a Proposition, How you Verify it, etc., and I Shall Understand It.

It seems that the only function of a proposition is to play on the thought-piano; the music that it produces on it – the mental construct – is¹ the object of our investigation. The use, the exchange value a proposition has in commerce², might at times give us a hint, *but that is not the sense of a proposition.*

Examine its usefulness!

³(In one sense,) when it asks about a logical possibility the question “How can one know that?” is asking about a logical connection.

⁴How does one know when it’s raining? We might see and feel the⁵ rain. The meaning of the word “rain” was explained to us via such⁶ experiences. “What is rain?” and “What does rain look like?” are logically related questions. Now suppose experience has taught me that⁷ the barometer suddenly falls whenever it rains. Then I can deduce from the falling of the barometer that it’s raining. I call this a symptom that it’s raining. Experience teaches whether a phenomenon is a symptom of rain. What counts as a⁸ criterion for rain is a matter of agreement (definition).

⁹The description¹⁰ of how a proposition is verified is a contribution to its grammar.

¹¹In language, one cannot transcend the possibility of evidence. What this really means is: The possibility of evidence for a proposition is a matter of grammar.

¹²The question about verification is only a particular¹³ form of the question “What does one do with this proposition?”¹⁴

1 (V): thought-piano; what it produces on it is

2 (V): Its use, its exchange value in commerce

3 (M): ✓

4 (M): ✓

5 (V): might see the

6 (V): these

7 (V): taught me that a certain phenomenon, for instance that

8 (V): What is a

9 (M): ✓

10 (V): statement

11 (M): ✓

12 (M): ✓

13 (V): only ~~another~~

14 (V): question “How do you mean that?”

Wie sich die Sprache von der Beschreibung der Verifikation entfernt. Wie sie abstrakt wird! Man muß wieder entdecken, daß man die Zeit mit der Uhr mißt. – Und erkennt dabei nicht einmal, daß man eine grammatische Entdeckung gemacht hat.

266 ¹⁹Wie ein Satz verifiziert wird, das sagt er. Vergleiche die Allgemeinheit in der Arithmetik mit der Allgemeinheit von nicht arithmetischen Sätzen. Sie wird anders verifiziert und ist darum eine Andere. Die Verifikation ist nicht bloß ein Anzeichen²⁰ der Wahrheit, sondern sie bestimmt den Sinn des Satzes. (Einstein: wie eine Größe gemessen wird, das ist sie.)

265 ²¹Was ist ein Sessel?
Wie sieht der Sessel aus?
Sind das etwa von einander unabhängige Fragen?

264v ²²Man ist vielleicht geneigt zu denken: der Sessel steht da oder nicht;²³ wie ich das weiß ist eine andere Sache; wie mich die Kunde davon erreicht hat. Aber fragen wir also so? Was nenne ich denn also eine Kunde daß ein Sessel dort steht? (Oder habe ich auch von²⁴ dieser Kunde nur Kunde?) Und was kennzeichnet denn diese Kunde als Kunde von etwas?²⁵ Leitet uns da nicht unser sprachlicher

265v Ausdruck irre? Ist das eben nicht ein irreleitendes Bild: „mein Auge gibt mir Kunde davon daß dort ein Sessel steht“?

²⁶„Der Sessel existiert unabhängig davon ob ihn jemand wahrnimmt²⁷.“ Ist das ein Erfahrungssatz oder eine verschleierte Festsetzung²⁸ der Grammatik? ²⁹Soll es sagen die Erfahrung habe gelehrt daß ein Sessel nicht verschwindet wenn man sich von ihm wendet?

³⁰Folgt nun, daraus, daß ich einen Mann dorten sehe, daß einer sich dort befindet?

Wir müssen³¹ hier nur stark schematisierte Fälle betrachten da die wirklichen zu mannigfaltig sind.

³²Ob unsere Sinne uns belügen, davon rede ich nicht, sondern nur davon, daß wir ihre Sprache verstehen.

³³Die Frage nach der Verifikation ist eine Frage nach der Methode.

266 ³⁴Welches ist die „wirkliche Lage“ des Körpers, den ich unter Wasser sehe, was die „wirkliche Farbe“ des Tisches. Welches nennst Du „die wirkliche Lage“. Du selbst kannst es entscheiden.³⁵ Hier macht eben die Frage nach der Verifikation den Sinn dieser Ausdrücke³⁶ klar.

³⁷Eigentlich hat ja schon Russell durch seine „theory of descriptions“ gezeigt, daß man sich nicht eine Kenntnis der Dinge von hinten herum erschleichen kann, und daß es nur *scheinen* kann, als wüßten wir von den Dingen mehr, als sie uns auf geradem Weg geoffenbart haben. Aber er hat durch die Idee der „indirect knowledge“ wieder alles verschleiert.

19 (M): ///

20 (V): ist nicht ein bloßes Anzeichen // Anzeigen

21 (M): ✓

22 (M): ✓

23 (V): denken // glauben // : es regnet oder nicht;

24 (V): ich von

25 (V): Und was macht denn diese Kunde zur Kunde?

26 (M): ✓

27 (V): sieht

28 (V): oder ein Satz

29 (V): Grammatik? Sag

30 (M): XXX

31 (V): können

32 (M): ✓

33 (M): ✓

34 (M): ✓ ✓

35 (V): kannst entscheiden.

36 (V): den Sinn der Worte

37 (M): ✓

How language distances itself from a description of verification. How abstract it gets! We have to rediscover that we measure time with a clock. – And in the process we don't even notice that we've made a grammatical discovery.

¹⁵How a proposition is verified, that's what it says. Compare generality in arithmetic with the generality of non-arithmetical propositions. The latter is verified differently and is therefore a different generality. Verification isn't merely an¹⁶ indication of the truth; it determines the sense of the proposition. (Einstein: How a quantity is measured, that's what it is.)

¹⁷What is a chair?

What does a chair look like?

Are those really independent questions?

¹⁸Perhaps one is inclined to think: the chair is either there or it isn't;¹⁹ how I know this is another matter: how this bit of news reached me. But is this the way we ask questions? What *do* I call news that a *chair* is there? (Or do I only have news about that news?) And what characterizes this news as²⁰ news about something? Isn't our linguistic expression misleading us here? Isn't this really a misleading image: "My eye gives me the news that there's a chair there"?

²¹"A chair exists independently of whether someone perceives²² it." Is that an empirical proposition, or a veiled regulation of²³ grammar? Is it supposed to mean "Experience has taught us that a chair doesn't vanish when we turn away from it"?

²⁴Now does it follow from my seeing a man over there that one is there?

Here we have to look²⁵ at heavily schematized cases since the real ones are too manifold.

²⁶I'm not talking about whether our senses lie to us, only about our *understanding* their language.

²⁷The question about verification is a question about method.

²⁸What is the "*real position*" of the body that I see under water, what is the "*real colour*" of the table? What do you *call* "the real position"? You can decide this yourself.²⁹ Here it is precisely the question about verification that clarifies the sense of these expressions.³⁰

³¹Actually Russell has already shown in his "theory of descriptions" that one cannot gain knowledge of things surreptitiously, as through a back door, and that it can only *seem* that we knew more about things than they have revealed to us straightforwardly. But with the idea of "indirect knowledge" he obscured everything again.

15 (M): ///

16 (V): isn't a mere

17 (M): ✓

18 (M): ✓

19 (V): think // believe // : either it's raining or it isn't;

20 (V): And what makes this news into

21 (M): ✓

22 (V): sees

23 (V): or a proposition of

24 (M): XXX

25 (V): we ~~can~~ look

26 (M): ✓

27 (M): ✓

28 (M): ∫ ✓

29 (V): decide yourself.

30 (V): of the words.

31 (M): ∫

³⁸Es ist gut sich zu sagen: Aus derselben Quelle fließt nur *Eines*.³⁹

⁴⁰Welche Sätze aus ihm folgen und aus welchen Sätzen er folgt, das macht seinen Sinn aus.⁴¹ Daher auch die Frage nach seiner Verifikation eine Frage nach seinem Sinn ist.

⁴²Betrachten wir den Satz:⁴³ „es wird niemals Menschen mit 2 Köpfen geben“. Dieser Satz scheint irgendwie ins Unendliche, Unverifizierbare zu reichen und sein Sinn von jeder Verifikation unabhängig zu sein. Aber wenn wir seinen Sinn erforschen wollen, so meldet sich ganz richtig die Frage: Können wir die Wahrheit eines solchen Satzes je wissen, und wie können wir sie wissen; und welche Gründe können wir haben, was der Satz sagt anzunehmen oder abzulehnen? Nun wird man vielleicht sagen: es ist ja nach dem Sinn gefragt worden; und nicht danach, ob und wie man ihn wissen kann. Aber die Antwort auf die Frage „wie kann man diesen Satz wissen?“ ist nicht eine psychologische, sondern sie lehrt Zusammenhänge im Kalkül.⁴⁴ Und die Gründe, die möglich sind den Satz anzunehmen, sind nicht persönliche Angelegenheiten, sondern Teile des Kalküls, zu dem der Satz gehört.

Wenn ich frage: wie kann ich den Satz „jemand ist im Nebenzimmer“ verifizieren, oder wie kann ich herausfinden, daß jemand im Nebenzimmer ist, so ist etwa eine Antwort: „indem ich ins Nebenzimmer gehe und nachsehe“.⁴⁵ Wenn nun gefragt wird „wie kann ich ins Nebenzimmer kommen, wenn die Türe versperrt ist“, so ist dieses „kann“ ein anderes als das erste: Die erste Frage nach der Möglichkeit (der logischen) hatte eine Erklärung über den Satzalkül zur Antwort,⁴⁶ die zweite Frage war eine nach der physikalischen Möglichkeit und hatte einen Erfahrungssatz zur Antwort: daß man, etwa, die Mauer nicht durchbrechen könne, weil sie zu stark sei, dagegen die Tür mit einem Sperrhaken öffnen könne. Beide Fragen nun sind in gewissem Sinn, aber nicht im gleichen, Fragen nach der Möglichkeit der Verifikation. Und, indem man die erste Art mit der zweiten verwechselt, glaubt man, die Frage nach der Verifikation sei für den Sinn ohne Belang. Die Gründe für die Annahme eines Satzes sind nicht zu verwechseln mit den Ursachen der Annahme. Jene gehören zum Kalkül des Satzes.

266v So kann ja auch der Satz der Komet . . . bewege sich in einer Parabel nicht verifiziert werden. Aber können wir ihn nicht verwenden?

Denke darüber nach, was wir mit so einem Satz machen.⁴⁷ Wie er unsre Beobachtungen leitet.

267 ⁴⁸Die Ursachen, warum wir einen Satz glauben, wären für die⁴⁹ Frage, was es denn ist, was wir glauben, allerdings irrelevant, aber nicht so die Gründe, die ja mit dem Satz grammatisch verwandt sind und uns sagen, wer er ist.

38 (M): /

39 (R): [Gehört in einen größeren Zusammenhang wohl zur Mathematik]

40 (M): XXX

41 (E): Aus dem Zusammenhang dieser Bemerkung in MS 113, S. 81 geht hervor, daß „seinen Sinn“ „den Sinn des Satzes“ bedeutet.

42 (M): ✓

43 (V): Wende das auf einen Satz an, wie etwa

267 44 (V): sondern sagt, aus welchem andern Satz er folgt, gehört also zur Grammatik des erstern. // sondern sie sagt, mit welchen andern Sätzen er in bestimmtem Zusammenhang des Kalküls steht //

sondern sie stellt einen Zusammenhang des Kalküls mit andern Sätzen her. // sondern sie gibt // macht // erklärt // den Zusammenhang eines Kalküls mit andern Sätzen // sondern sie erklärt seinen Zusammenhang mit andern Sätzen des Kalküls // Zusammenhang im Kalkül mit andern Sätzen. // sondern sie stellt seinen Zusammenhang mit andern Sätzen des Kalküls her.

45 (V): und ihn sehe“.

46 (V): Antwort, ~~daß nämlich dieser Satz aus jenem folgt;~~

47 (V): machen?

48 (M): ✓

49 (V): bei der

³²It is good to say to oneself: only *one thing* flows from the same spring.³³

³⁴Which propositions follow from it and from which propositions it follows, constitute its sense.³⁵ Which is why the question about its verification is also a question about its sense.

³⁶Let's look at the proposition:³⁷ "There will never be people with two heads". This proposition seems somehow to reach into the infinite, the unverifiable, and its sense seems to be independent of any verification. But if we want to explore its sense, then quite properly the question arises: Can we ever know the truth of such a proposition, and *how* can we know it; and what reasons can we have to accept or reject what the proposition says? Now someone might say: After all, the question has been raised about its sense, and not about whether and how one can know it. But the answer to the question "How can one know this proposition?" is not a psychological one; rather, it teaches us connections in a calculus.³⁸ And the possible reasons for accepting the proposition are not personal matters, but parts of the calculus to which the proposition belongs.

If I ask: How *can* I verify the proposition "Someone is in the room next door"?, or How can I find out whether someone is in the room next door?, then an answer might be: "By going into the room next door and checking".³⁹ But if the question is raised: "How *can* I get into the room next door if the door is locked?", this "can" is different from the first. The first question, about (logical) possibility, was answered by an explanation of the sentence-calculus,⁴⁰ the second question was about physical possibility, and was answered by an empirical proposition: say, that the wall could not be broken through because it was too thick, but that the door could be opened with a skeleton key. Now in a certain – but not the same – sense, both questions are questions about the possibility of verification. And, confusing the first kind of question with the second, we believe that the question about verification is irrelevant to sense. The reasons for accepting a proposition are not to be confused with the causes for accepting it. The former belong to the calculus of the proposition.

So too the proposition that comet . . . travels in a parabola can't be verified. But can't we use it? Think about what we do with such a proposition.⁴¹ How it guides our observations.

⁴²The causes for believing a proposition are indeed irrelevant to the question *what* it is that we believe, but not so the reasons, which are grammatically related to the proposition, and tell us *who* it is.

32 (M): /

33 (M): [Belongs in a larger context, probably to mathematics]

34 (M): XXX

35 (E): This remark has been separated from the sentences preceding it in its source (MS 113, p. 81), where it is clear that "its sense" refers to "the sense of a proposition".

36 (M): ✓

37 (V): Apply that to a proposition such as:

38 (V): rather it says from which other proposition it follows, and thus belongs to the grammar of the first proposition. // rather it says with which

other propositions it stands in the particular connection of a calculus. // rather it establishes // gives // makes // explains // a // the // connection of a // of the // calculus with other propositions. // rather it explains its connection with other propositions of a calculus. // rather it explains its connection in a calculus with other propositions. // rather it establishes a connection with other propositions of a calculus.

39 (V): and I see him".

40 (V): sentence-calculus, ~~i.e. that this proposition follows from that~~

41 (V): proposition²

42 (M): ✓

266v Wenn Du erfahren⁵⁰ willst, wie⁵¹ ein Mensch seinen Tag verbringt; frage nach seinem Beruf. Hat jeder Mensch einen Beruf?⁵² Ist es klar was alles „Beruf“ zu nennen ist?

267v Die Lagrangeschen Gleichungen, die Keplerschen Gesetze, ein Satz aus der Naturgeschichte,⁵³ der Satz „dort geht Herr N.N.“, sie haben⁵⁴ alle verschiedene Art der Verwendung, wenn auch Verwandtschaft zwischen ihnen besteht. Es sind eben alles Instrumente zu verschiedenartigen (wenn auch bis zu einem gewissen Grade verwandten) Zwecken.⁵⁵

Und hier kann man ermessen welche unheilvolle Wirkung die Präokkupation⁵⁶ mit dem „Sinn“ des Satzes, dem „Gedanken“, den er ausdrückt, gehabt hat. Denn so werden charakteristische Vorstellungen die sich mit den Worten des Satzes⁵⁷ verbinden für maßgebende angesehen,⁵⁸ auch,⁵⁹ wo sie es gar nicht sind & alles auf die Technik seiner Verwendung ankommt.⁶⁰ – Und man kann sagen der Satz habe einen anderen Sinn wenn er ein anderes Bild macht. Und wenn ich mir erlauben darf Freges Grundgedanken⁶¹ in seiner Theorie vom Sinn & der Bedeutung⁶² zu erraten so würde ich nun fortfahren: die *Bedeutung* des Satzes, im Sinne Freges, sei seine *Verwendung*.⁶³

268 ⁶⁴Und der Sinn des Satzes ist ja nicht etwas, was wir wie die Struktur der Materie erforschen und was vielleicht zum Teil unerforschlich ist. So daß wir später erst noch einmal daraufkommen könnten, daß dieser Satz von andern Wesen, als wir sind, auf eine andere Art gewußt werden kann. So daß er *dieser* Satz mit *diesem* Sinn bliebe, dieser Sinn aber Eigenschaften hätte, die wir jetzt nicht ahnen. Der Satz, oder sein Sinn, ist nicht das pneumatische Wesen, was sein Eigenleben hat und nun Abenteuer besteht, von denen wir nichts zu wissen brauchen. Wir hätten ihm quasi Geist von unserm Geist eingehaucht – seinen Sinn – aber nun hat er sein Eigenleben – wie unser Kind – und wir können ihn (nur) erforschen und mehr oder weniger verstehen.⁶⁵

⁶⁶Der Instinkt leitet⁶⁷ Einen richtig, der zur Frage führt: Wie kann man so etwas wissen; was für einen Grund können wir haben, das anzunehmen; aus welchen Erfahrungen würden wir so einen Satz ableiten; etc.

⁶⁸Der Sinn ist keine Seele des Satzes. Er muß, soweit wir an ihm interessiert sind, sich gänzlich ausmessen lassen, sich ganz in Zeichen erschließen.⁶⁹

⁷⁰Wenn man nun fragt: hat es Sinn zu sagen „es wird *nie* das und das geben“?⁷¹ – Nun, welche Evidenz gibt es dafür; und was folgt daraus? – Denn, wenn es keine Evidenz dafür gibt – nicht, daß wir noch nicht im Stande waren sie zu kriegen⁷² sondern, daß keine⁷³ im Kalkül *vorgesehen* wurde, – dann ist damit der Charakter dieses Satzes bestimmt. Wie

50 (V): wissen

51 (V): ~~was~~

52 (V): Beruf?

53 (V): Naturgeschichte, ~~eder~~

54 (V): NN“ haben

55 (V): zu verschiedenartigen Zwecken.

56 (O): Preokkupation

57 (V): mit dem Satz

58 (V): werden den Satz begleitenden Empfindungen & Bilder für wichtig angesehen, // werden charakteristische Vorstellungen die mit dem Satz // mit den Worten des Satzes // verbunden sind für das Wichtige angesehen,

59 (V): auch ~~der~~,

60 (V): wo sie es nicht sind.

61 (V): Gedanken

62 (V): von Sinn & Bedeutung ~~der Sätze~~

63 (V): *Anwendung*.

64 (M): ✓

65 (M): Mathematik

66 (M): ✓

67 (V): führt

68 (M): ///

69 (V): offenbaren.

70 (M): ✓

71 (V): geben?⁶⁴

72 (O): kriegen

73 (V): zu kriegen – sondern, wenn keine

If you want to find out⁴³ how⁴⁴ someone passes the day, ask about his job. And does every person have a job? Is it clear what all is to be called “a job”?

Lagrange’s equations, Kepler’s laws, a proposition from natural history,⁴⁵ the proposition “Mr N N is walking over there”, all have different kinds of use, even though there is a relationship between them. They are all simply instruments for varied purposes (although these purposes are related, up to a point).⁴⁶

And here one can appreciate what a disastrous effect the preoccupation with the “sense” of a proposition, with the “thought” that it expresses, has had. For as a result of this, characteristic mental images that attach themselves to the words of a sentence⁴⁷ are seen as decisive⁴⁸ even when they aren’t, and when everything depends on the technique for using the sentence.⁴⁹ – And one can say that the proposition has a different sense if it creates a different image. And if I might take the liberty of guessing at Frege’s basic idea⁵⁰ in his theory of sense and meaning,⁵¹ I would now continue: that the *meaning* of a proposition, in Frege’s sense, is its *use*.⁵²

⁵³And the sense of a proposition isn’t something that we explore, like the structure of matter, and that is perhaps partially unexplorable. So that only later could we discover that this proposition can be known in a different way by beings different from us. So that it would remain *this* proposition with *this* sense, but that its sense would have qualities that at this point we don’t dream of. The proposition, or its sense, is not a kind of breathing organism that has a life of its own, and that carries out various exploits, about which we need to know nothing. As if in a manner of speaking we had breathed a soul into it from our soul – its sense – but now it has its own life – like our child – and all we can do is explore it and more or less understand it.⁵⁴

⁵⁵That instinct is guiding⁵⁶ us rightly that leads to the questions: How can one know something like that? What reason can we have to assume that? From what experiences would we deduce such a proposition?, etc.

⁵⁷Sense is not the soul of a proposition. So far as we are interested in it, it must be completely measurable, must disclose⁵⁸ itself completely in signs.

⁵⁹What if one asks: Does it make sense to say “There will *never* be this or that”? – Well, what evidence is there for this; and what follows from it? – For if there is no evidence for it – and not because we haven’t been able to gather it yet, but because none was *provided for* in the calculus – then this determines the character of that proposition. Just as the nature

43 (V): to know

44 (V): find out ~~what~~

45 (V): history, ~~or~~

46 (V): for varied purposes.

47 (V): to a sentence

48 (V): of this, sensations and images that accompany the proposition are seen as important // of this, characteristic mental images that are connected to the proposition // to the words of the proposition // are seen as what’s important

49 (V): even when they aren’t.

50 (V): Frege’s idea

51 (V): and meaning ~~of propositions,~~

52 (V): *application*.

53 (M): ✓

54 (M): Mathematics

55 (M): ✓

56 (V): leading

57 (M): ///

58 (V): reveal

59 (M): ✓

das Wesen einer Zahlenart dadurch, daß kein Vergleich zwischen ihr und gewissen Rationalzahlen möglich ist.

269 ⁷⁴Übrigens: Eine Zahl, die heute auf bewußte Weise mittels des Fermat'schen Satzes definiert ist, wird dadurch nicht geändert, daß der Beweis dieses Satzes, oder des Gegenteils, gefunden wird. Denn der Kalkül dieser Zahl weiß von dieser Lösung des Problems nichts (und wird auch dann nichts von ihr wissen).

⁷⁵„Ich werde nie einen Menschen mit 2 Köpfen sehen“; man glaubt, durch diesen Satz irgendwie in die Unendlichkeit zu reichen. Quasi, zum mindesten eine Eisenbahn dorthin gelegt zu haben, wenn wir auch noch nicht die ganze Strecke bereist haben.

Es liegt da die Idee zu Grunde, daß⁷⁶ das Wort „nie“ die Unendlichkeit schon⁷⁷ mitbringe, da das eben seine Bedeutung ist.⁷⁸

Es kommt darauf an: Was fange ich mit diesem⁷⁹ Satze an;⁸⁰ denn, auf die Frage „was bedeutet⁸¹ er?“ kommt ja wieder ein Satz zur Antwort, und der führt mich solange nicht weiter, als ich aus der Erklärung nichts über die Züge erfahre, die ich mit den Figuren machen darf. (Als ich, sozusagen, nur immer wieder die gleiche Spielstellung⁸² vor mir sehe und keine anderen, die ich aus ihr bilden kann.) So höre ich z.B., daß keine Erfahrung diesen Satz beweisen kann und das beruhigt mich über seine unendliche Bedeutung.

268v ⁸³Aus keiner Evidenz folgt, daß dieser Satz wahr ist. Ja, aber ich kann doch *glauben*, daß es
269 so ist wie⁸⁴ er sagt!⁸⁵ Aber welcher Art ist⁸⁶ das: „glauben, daß das der Fall ist⁸⁷“? Reicht etwa dieser Glaube in die Unendlichkeit; fliegt er der Verifikation voran? – Was heißt es, diesen Satz⁸⁸ glauben:⁸⁹ Ihn⁹⁰ mit bestimmten Gefühlen sagen? sich so & so verhalten, so & so zu
268v handeln?⁹¹ – Und diese Handlungen⁹² interessieren uns nur, sofern sie zeigen was wir mit dem Satz anfangen wie wir ihn im Kalkül gebrauchen.⁹³

269 ⁹⁴Um den Sinn einer Frage zu verstehen, bedenken wir: Wie sieht denn die Antwort auf diese Frage aus.

270 ⁹⁵Auf die Frage „ist A mein Ahne“ kann ich mir nur die Antwort denken „A findet sich in meiner Ahnengalerie“ oder „A findet sich nicht in meiner Ahnengalerie“ (wo ich unter Ahnengalerie die Gesamtheit aller Arten von Nachrichten über meine Vorfahren verstehe). Dann konnte aber auch die Frage nur dasselbe heißen wie: „Findet sich A in meiner

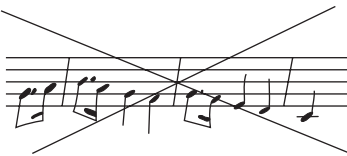
74 (M): ///

75 (M): ✓

76 (V): daß ~~z.B.~~

77 (V): bereits

78 (M):



79 (V): mit so einem

80 (V): Was kann ich mit so einem Satz tun // anfangen;

81 (V): sagt

82 (V): Konfiguration

83 (M): ✓

84 (V): daß es sich so verhält wie

85 (V): aber ich kann doch *glauben*, daß er // was er sagt // wahr ist! // daß das der Fall ist, was er sagt! 269

86 (V): Aber was heißt

87 (V): daß was er sagt ~~sich~~ so verhält

88 (V): es das

89 (V): glauben?

90 (V): glauben: Diesen Satz

91 (V): sagen? ist es ein bestimmtes Benehmen? ~~denn etwas andres kann es doch nicht sein~~

92 (V): Diese Vorgänge

93 (V): handeln? – Und dann interessiert es uns nur insofern, // ~~Das alles interessiert uns alles nur insofern es~~ // Alles das interessiert uns nur insofern 268v

als es // ein Kalkulieren mit dem Satz ist. 269

94 (M): ///

95 (M): XXX

of a kind of number is determined by the fact that no comparison can be made between it and certain rational numbers.

⁶⁰By the way: A number that today has been defined in the well-known way via Fermat's theorem is not changed by the discovery of a proof of this theorem or of its opposite. That is because the calculus for this number knows nothing about such a solution to this problem (and won't know anything about it when it happens, either).

⁶¹"I shall never see a person with two heads"; we think that somehow this proposition allows us to reach into infinity. At least to have built a railway there, in a manner of speaking, even if we haven't yet travelled to the end of the line.

At the bottom of this is the idea that⁶² the word "never" is already accompanied by infinity, since that is its very meaning.⁶³

It depends on: what I do with this proposition.⁶⁴ For in answer to the question "What does it mean⁶⁵?", yet another proposition is forthcoming, and it doesn't get me any further so long as the explanation doesn't tell me anything about the moves I'm allowed to make with the pieces. (So long, so to speak, as all that I see in front of me is the same configuration of the game⁶⁶ over and over, and no others that I can develop out of it.) Thus I hear, for instance, that no experience can prove this proposition, and that reassures me about its infinite meaning.

⁶⁷No evidence shows that this proposition is true. Yes, but surely I can *believe* that things are as it says!⁶⁸ But what is the nature of⁶⁹: "believing that that is the case"⁷⁰? Does this belief perhaps extend into infinity; does it fly ahead of its verification? – What does it mean to believe that proposition⁷¹, to utter it⁷² with certain feelings? To behave in such and such a way, to act in such and such a way?⁷³ Such actions⁷⁴ interest us only in so far as they show what we are doing with the proposition, how we are using it in the calculus.⁷⁵

⁷⁶To understand the sense of a question, we think: What *does* the answer to this question look like?

⁷⁷As an answer to the question "Is A my ancestor?" all I can imagine is: "A is in my gallery of ancestral portraits" or "A is not in my gallery of ancestral portraits" (by "gallery of ancestral portraits" I understand the totality of all kinds of information about my ancestors). But then all the question means is the same thing as: "Is A in my gallery of ancestral portraits?".

60 (M): ///

61 (M): ✓

62 (V): that ~~for example~~

63 (M):



64 (V): with such a proposition. // on: what I can do with such a proposition.

65 (V): say

66 (V): configuration

67 (M): ✓

68 (V): Yes, but after all I can *believe* that it // what it says // is true! // *believe* that what it says is the case!

69 (V): But what does this mean

70 (V): "believing that what it says behaves this way"

71 (V): to believe that

72 (V): To utter this proposition

73 (V): feelings? Is this a particular form of behaviour? ~~For surely it can't be something else.~~

74 (V): These processes

75 (V): such a way? – And then it only interests us in so far as it // ~~All of that interests us only in so far as it~~ // is a calculating with the proposition

76 (M): ///

77 (M): XXX

Ahnengalerie“. (Eine Ahnengalerie hat ein Ende: das ist ein Satz der Syntax.) Wenn mir ein Gott offenbarte, A sei mein Ahne, aber nicht, der wievielte, so könnte auch diese Offenbarung für mich nur den Sinn haben, ich werde A unter meinen Ahnen finden, wenn ich nur lang genug suche; da ich aber die Zahl N von Ahnen durchsuchen werde, so muß die Offenbarung bedeuten, A sei unter jenen N Ahnen.

(A gallery of ancestral portraits has an end: that is a syntactical proposition.) If a god revealed to me that A is my ancestor, but not how many generations ago, then all that even this revelation could mean is that I shall find A among my ancestors if only I look long enough; but since I am going to search through N number of ancestors, the revelation must mean that A is among those N ancestors.

Intention und Abbildung.

Intention and Depiction.

272 Wenn ich mich abbildend nach
 einer Vorlage richte, also *weiß*,
 daß ich jetzt den Stift so bewege,
weil die Vorlage *so* verläuft, ist hier
 eine mir unmittelbar bewußte
 Kausalität im Spiel?

¹Wenn ich, den Regeln folgend, statt „↑“ „a“ schreibe, so ist es, als wäre hier eine Kausalität im Spiel, die nicht hypothetisch, sondern unmittelbar erlebt, wäre. (Natürlich ist nichts dergleichen der Fall.)

271v Die Verwechslung von Grund & Ursache.

Der Gegenstand meines Hasses ist nicht die Ursache meines Hasses.

272 ²Wenn ich mich aber nun ärgere, *weil* jemand zur Türe hereinkommt, kann ich mich hier im Nexus irren, oder erlebe ich ihn wie den Ärger?

In einem gewissen Sinne kann ich mich irren, denn ich kann mir sagen „Ich weiß nicht, warum mich sein Kommen heute so ärgert“. Das heißt, über die Ursache meines Ärgers läßt sich streiten. – Andererseits nicht darüber, daß der Gedanke an sein Kommen – wie man sagt – unlustbetont ist.

Wie aber in dem Fall: Ich sehe den Menschen und der Haß gegen ihn steigt bei seinem Anblick in mir gegen ihn auf. – Könnte man fragen: wie weiß ich, daß ich *ihn* hasse, daß *er* die Ursache meines Hasses ist. Und wie weiß ich, daß sein Anblick diesen Haß neu erweckt?

273 Auf die erste Frage: – „ich hasse ihn“ heißt nicht „ich hasse und er ist die Ursache meines Hasses“. Sondern er, beziehungsweise sein Gesichtsbild – etc. – kommt in meinem Haß vor, ist ein Bestandteil meines Hasses. (Auch hier tut’s die Vertretung nicht, denn was garantiert mir dafür, daß das Vertretene existiert.) Im zweiten Fall kommt eben unmittelbar die Erscheinung des Menschen in meinem Haß vor, oder, wenn nicht, dann ist seine Erscheinung wirklich nur die hypothetische Ursache meines Gefühls und ich kann mich darin irren, daß *sie* es ist, die das Gefühl hervorruft.

1 (M): ✓ (R): ∇ S. 281/4 ✓

2 (R): [Zu: Grund, Ursache, Motiv.]

If in Copying I am Guided by
a Model and thus *Know* that I am
Now Moving my Pencil in such
a Way *because* the Model Goes *that*
Way, is a Causality Involved Here of
which I am Immediately Aware?

¹If, following the rules, I write “a” instead of “↑” then it is as if a causality were involved here that is not hypothetical, but experienced immediately. (Of course, nothing of the sort is the case.)

The confusion of reason and cause.

The object of my hatred is not the cause of my hatred.

²But if I am annoyed *because* someone is coming in, can I be wrong about this causal connection, or do I experience this connection in the same way I do the annoyance?

In a certain sense I can be wrong, for I can say to myself “I don’t know why his coming is annoying me so much today”. That is, the cause of my annoyance is debatable. – On the other hand it is not debatable that the thought of his coming is tinged with aversion – as one says.

But how about in this case: I see the person and my hatred for him starts to well up. – Could one ask: How do I know that I hate *him*, that *he* is the cause of my hatred? And how do I know that seeing him awakens this hatred anew? With regard to the first question: – “I hate him” does not mean “I hate, and he is the cause of my hatred”. Rather he, or alternatively, the image of him – etc. – occur within my hatred, are components of my hatred. (The proxy doesn’t work here either, for what guarantee do I have that the thing it stands for exists?) As for the second question, the appearance of the person simply occurs immediately within my hatred or, if it doesn’t, then his appearance is really only the hypothetical cause of my feeling, and I can be wrong in thinking that *it* is what elicits the feeling.

1 (M): ✓ (R): ∇ p. 281/4 ✓

2 (R): [To: Reason, Cause, Motive.]

³„Ganz ebenso muß es sich auch mit dem Handeln *nach* einem Zeichenausdruck verhalten. Der Zeichenausdruck muß in diesem Vorgang involviert sein, während er nicht involviert ist, wenn er bloß die Ursache meines Handelns ist.“

Wenn der Satz „ich hasse ihn“ so aufgefaßt wird: ich hasse und er ist die Ursache; dann ist die Frage möglich „bist Du sicher, daß Du *ihn* haßt, ist es nicht vielleicht ein Anderer oder etwas Anderes“ und das ist offener Unsinn.

3 (M): ///

³“It must be exactly the same so far as acting *in accordance with* any symbolization is concerned. The symbolization must be involved in that kind of process, whereas if it is merely the cause of my action, it is not involved.”

If the proposition “I hate him” is understood as: “I hate and he is the cause”, then the question can arise, “Are you sure that you hate *him*, mightn’t it be somebody or something else?”, and that is obvious nonsense.

3 (M): ///

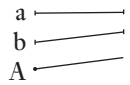
Wenn wir „nach einer bestimmten Regel abbilden“, ist diese Regel in dem Vorgang des Kopierens (Abbildens) enthalten, also aus ihm eindeutig abzulesen? Verkörpert der Vorgang des Abbildens sozusagen diese Regel?

Denken wir,¹ daß jemand eine Strecke absichtlich im Maßstab 1 : 1 kopiert. Ist dann in dem Vorgang des Kopierens schon das Verständnis der allgemeinen Regel² enthalten? ³D.h. ist die Weise, in der mein Bleistift von der Strecke geführt wird, eben dieses allgemeine Gesetz? Mein Stift wurde von mir quasi ganz voraussetzungslos gehalten und *nur* von der Länge der Vorlage beeinflusst.⁴

Ich würde⁵ sagen: Wäre die Vorlage länger gewesen, so wäre ich mit meinem Bleistift noch weitergefahren und wenn kürzer, weniger weit. Aber war, gleichsam, der Geist, der sich hierin ausspricht, schon im Nachziehen des einen Strichs enthalten?

275 Ich kann mir vornehmen: Ich gehe solange, bis ich ihn finde (ich will etwa jemand auf einer Straße treffen). Und nun gehe ich die Straße entlang und treffe ihn an einem bestimmten Punkt und bleibe stehen. War in dem Vorgang des Gehens, oder irgend einem andern gleichzeitigen, die Befolgung der allgemeinen Regel, die ich mir vorgesetzt hatte, enthalten? Oder war der Vorgang nur *in Übereinstimmung* mit dieser Regel, aber auch mit anderen entgegengesetzten Regeln?

Ich gebe jemandem den Befehl von A eine Linie parallel zu a zu ziehen. Er versucht (beabsichtigt) es zu tun, aber mit dem Erfolg, daß die Linie parallel zu b wird.⁶ War nun der Vorgang des Kopierens derselbe, als hätte er beabsichtigt, parallel zu b zu ziehen und seine Absicht ausgeführt? Ich glaube offenbar, nein. Er hat sich von der Linie a führen lassen.



1 (V): wir ~~uns den einfachen Fall~~,

2 (V): Verständnis des Nachzeichnens irgend-einer Strecke im Maßstab 1 : 1

3 (M): /// – Gesetz?

4 (V): geführt.

5 (V): würde ~~dann~~

6 (F): MS 109, S. 238.

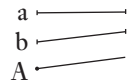
If We “Depict in Accordance with
a Particular Rule”, is this Rule
Contained in the Process of Copying
(Depicting), and can it Therefore
be Read out of it Unambiguously?
Does the Process of Depicting
Embody this Rule, as it Were?

Let's imagine¹ that someone intentionally copies a line segment on a scale of 1 : 1. Is an understanding of the general rule² already contained in the process of copying? ³That is, is the way my pencil is guided by the line segment precisely this general law? I held my pencil completely neutrally, as it were, and it was *only* influenced⁴ by the length of the original line.

I would⁵ say: If the drawing had been longer I would have moved my pencil further, and if it had been shorter I would have moved it less far. But was the spirit, so to speak, that is expressed in this contained in my copying of the line?

I can resolve: I'll walk until I find him (say I want to meet someone on a street). And now I go down the street and meet him at a certain point and stop. Was the observance of the general rule to which I had resolved myself contained in the process of walking, or in some other simultaneous process? Or was the process just *in accordance* with this rule, and with differing rules as well?

I order someone to draw a line parallel to a, starting at A. ⁶He tries (intends) to do this, but with the result that the line turns out parallel to b. Now was the process of copying the same as if he had intended to draw a line parallel to b and had carried out his intention? I think: obviously not. He let himself be guided by the line a.



1 (V): imagine ~~the simple case~~
2 (V): understanding of copying some line segment
on a scale of 1 : 1
3 (M): /// – law?

4 (V): led
5 (V): would ~~then~~
6 (F): MS 109, p. 238.

Wer liest, macht das, was er abliest abhängig von dem, was da steht.⁷

⁸Was hätte übrigens eine⁹ allgemeine Regel überhaupt auszudrücken, wenn nicht das?¹⁰

Die Frage ist nun: wenn ich (nun) auf diese Weise eine Vorlage nachgezeichnet habe, ist es dann möglich, den Vorgang des Nachzeichnens, wie er war, auch nach einer anderen allgemeinen Regel richtig zu beschreiben? Oder kann ich so eine Beschreibung zurückweisen¹¹ mit den Worten: „nein, ich habe mich wirklich nur von *dieser* (allgemeinen) Regel leiten lassen (und nicht von jener anderen, die hier¹² allerdings auch dasselbe Resultat ergeben hätte)“.

276 Wenn ich absichtlich eine gewisse Form nachzeichne,¹³ so hat der Vorgang des Kopierens mit der Wirklichkeit an einer bestimmten Stelle diese Form gemein. Sie ist eine Fassade des Vorgangs des Kopierens. Eine Fassade, die an dem kopierten Gegenstand anliegt und sich dort mit ihm deckt.

Man könnte dann sagen: wenn auch mein Bleistift die Vorlage nicht trifft, die Absicht trifft sie immer.

Es ist nur die Absicht, die an das Modell heranreicht. Und das ist dadurch ausgedrückt, daß der Ausdruck der Absicht die Beschreibung des Modells und den Ausdruck der Projektionsregel enthält. Was ich tatsächlich spiele, ist gleichgültig; die Erfahrung wird es lehren und die Beschreibung des Gespielten muß nichts mit der Beschreibung des Notenbildes gemein haben. Wenn ich dagegen meine Absicht beschreiben will, so muß es heißen, daß ich dieses Notenbild auf die Weise in Tönen abzubilden beabsichtige. Und nur das kann der Ausdruck dafür sein, daß die Absicht an die Vorlage heranreicht und eine allgemeine Regel enthält.

¹⁴Wenn ich einen Apparat machte, der nach Noten spielen könnte, der also auf das Notenbild in der Weise reagierte, daß er die entsprechenden Tasten einer Klaviatur drückte, und wenn dieser Apparat bis jetzt immer klaglos funktioniert hätte, so wäre doch weder er, noch sein Funktionieren der Ausdruck einer allgemeinen Regel. Ferner, dieses Funktionieren ist, wie immer er funktioniert, an sich weder richtig noch falsch; d.h. weder der Notenvorlage entsprechend, noch ihr nichtentsprechend. Kein Mechanismus, welcher Art immer, kann eine solche Regel etablieren. Man kann nur sagen: der Mechanismus arbeitet bis jetzt dieser Regel gemäß (was natürlich heißt, daß er auch anderen Regeln *gemäß* arbeitet). Das Funktionieren des Apparates bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt würde gewisse Regeln von¹⁵ seiner Beschreibung ausschließen, aber nie eine Regel eindeutig bestimmen.

277 ¹⁶Wir können wohl eine Maschine zur Illustration der Koordination zweier Vorgänge, der Abbildung des einen in dem andern, verwenden, aber nur die Maschine *wie sie funktionieren soll*, also die Maschine in ganz bestimmter Weise als Ausdruck aufgefaßt, also als Teil der Sprache.

¹⁷Nur in diesem Sinne bildet z.B. das Pianola die Loch-Schrift auf dem Streifen in die Tonfolge ab. Oder der Musterwebstuhl die Sprache der gelochten Karten in das Muster des gewebten Stoffes.

7 (V): steht. Aber ~~die Abhängigkeit kann nur durch eine Regel ausgedrückt werden.~~

8 (M): ///

9 (V): die

10 (V): wenn das nicht?

11 (V): ablehnen

12 (V): die in diesem Falle

13 (V): ~~nachzieh~~,

14 (M): ///

15 (V): zu

16 (M): ///

17 (M): ///

Whoever reads makes what he gathers from it dependent on what is there.⁷

⁸By the way, what should a⁹ general rule express anyway, if not that?

Now the question is: If I have (now) copied a drawing in this way, is it possible to correctly describe the process of copying, as it took place, in accordance with another general rule as well? Or can I reject¹⁰ such a description, saying: “No, I really only let myself be guided by *this* (general) rule (and not by that other one which, to be sure, would also have had the same result here¹¹)”.

If I intentionally copy a particular shape, at a certain point the process of copying has this shape in common with reality. The shape is a facet of the copying process. A facet that is contiguous with the copied object and that coincides with it at these points of contact.

Then one could say: Even if my pencil doesn’t capture the original, my intention always does.

Only intention can measure up to the original. And that is shown by the fact that the expression of intention contains the description of the original as well as the expression of the rule of projection. What I am actually playing is irrelevant; experience will teach me that, and the description of what is being played doesn’t have to have anything in common with the description of the layout of the notes. If on the other hand I want to describe my intention, then I have to say that what I intend to depict in sounds is this layout of notes in this way. And that’s the only way of expressing the fact that the intention comes right up to the original, and that it contains a general rule.

¹²If I built an apparatus that could play written music, i.e. that reacted to the depiction of the notes in such a way that it depressed the respective keys of a keyboard, and if this apparatus had always worked trouble-free until now, still, neither it nor its functioning would be the expression of a general rule. Furthermore this functioning, however it works, is inherently neither true nor false; that is, it neither corresponds nor fails to correspond to the notes on the page. No mechanism, whatever its kind, can establish such a rule. One can only say: Up until now the mechanism has been working in accordance with this rule (which means of course that it also works *in accordance with* other rules). The functioning of the apparatus up to the present point in time would exclude certain rules from¹³ its description, but it would never determine a rule unambiguously.

¹⁴To be sure, we can use a machine to illustrate the coordination of two processes – the depiction of the one by the other. But only a machine *as it is supposed to work*, i.e. a machine understood in a very particular way as an expression, i.e. as a part of language.

¹⁵Only in this sense does the pianola, for example, copy the perforations on the strip into a sequence of sounds. Or does the pattern loom copy the language on the punch cards into the pattern of the woven material.

7 (V): is there. But ~~the dependency can only be expressed by a rule.~~

8 (M): ///

9 (V): the

10 (V): decline

11 (V): result in this case

12 (M): ///

13 (V): of

14 (M): ///

15 (M): ///

276v In dem Ausdruck der Absicht muß ich die Vorlage beschreiben; in der Beschreibung des Abbildes nicht. (Und das ist der Kern des ganzen Problems, & seine Lösung.)

277 Das Wort „psychischer Vorgang“, „mental process“, ist an vieler Verwirrung schuld. Wenn wir sagen, der Gedanke, die Intention sind psychische Vorgänge, so stellen wir uns darunter etwas ähnliches oder analoges vor, wie unter dem Wort chemischer Vorgang, oder physiologischer Vorgang. – Und soweit das richtig ist, haben wir mit dem Gedanken und der Intention nichts zu tun.

¹⁸„Wenn man kopiert, d.h. überhaupt abbildet, sich von einer Vorlage leiten läßt, so ist das Charakteristische daran, daß nur die Vorlage mir bewußt wird, dagegen nicht die Projektionsart (Nach Noten spielen). Ich bin mir bewußt, daß mich die Vorlage einmal so, einmal so lenkt, aber das *Wie* dieser Übertragung nehme ich sozusagen hin; ich bemerke es weiter nicht. Und zwar, weil ich es nicht mit einem Anderen vergleiche. Ich befolge die Projektionsregel, aber ich drücke sie nicht aus und sie fällt sozusagen aus der Betrachtung heraus, weil sie mit nichts verglichen wird. Wenn ich sie beschreibe, so setzt das voraus, daß ich sie mit anderen Regeln vergleiche.“

276v Was ist das Kriterium der Absicht? Kommt diese Frage in die Betrachtung dieser Seite hinein?

277, 278 ¹⁹„Ja, in gewissem Sinne ist alles, was beim Nachbilden der Vorlage geschieht, daß diese Vorlage an uns vorüberzieht und wir sie besser oder weniger gut treffen. D.h. es ist das Ende der Kopiermaschine, das unserer Vorlage entlangläuft, was wir beobachten; die ganze übrige Maschine nehmen wir als gegeben hin. Wir merken sozusagen nur, was sich ändert, nicht, was gleichbleibt. Der Abbildungsweise haben wir durch eine Einstellung (die gleichbleibt) (ein für allemal) Rechnung getragen. – Und was wir *spüren*, ist nur das Modell.“

²⁰„Darum, wenn wir falsch nach Noten singen oder spielen – so verschieden diese Abbildung der Art nach von ihrem Vorbild ist – nennen wir es²¹ einen Verstoß gegen das Vorbild.“²²

18 (R): Zu § 63 Diese Bemerkung gehört ~~nicht~~ zu der, daß die Rechtfertigungen der Abbildung irgendwo aufhören. etc.

19 (R): Zu § 63

20 (R): Zu § 63

21 (V): ist – ~~führen~~ // fühlen // wir es als

22 (V): gegen das *Modell*.“ // gegen die Vorlage.“

In an expression of intent I have to describe the original; I don’t have to do this in the description of the depiction. (And that is the core of the whole problem, and its solution.)

The words “psychological process”, “mental process”, are responsible for a lot of confusion. If we say that thought, intention, are psychological processes then we imagine something similar or analogous to the words “chemical process” or “physiological process”. – And in so far as this is correct we are in no way dealing with thought and intention.

¹⁶“When one copies, i.e. in any way makes a likeness, allows oneself to be guided by an original, then what’s characteristic of this is that I am only aware of the original, but not of the mode of projection (reading music). I am conscious that the original guides me now this way, now that, but *how* this transference takes place I take for granted, as it were; I don’t take any further notice of it. And this is because I don’t compare it to anything else. I’m following the projection rule, but I’m not expressing it, and it drops out of consideration, so to speak, because it isn’t compared to anything. If I describe it, that presupposes that I’m comparing it to other rules.”

What is the criterion of intent? Does this question enter into the considerations on this page?

¹⁷“Indeed, in a certain sense, all that happens in copying an original is that it marches past us and that we capture it more or less well. That is, what we observe is the tail end of the copying machine that runs alongside our original; all the rest of the machine we accept as given. We only notice what changes, as it were, not what stays the same. We have accounted (once and for all) for the mode of depiction by an approach (that remains the same). – And the only thing we *sense* is the original.”

¹⁸“Therefore if in following the written music we sing or play incorrectly – no matter how much this rendition differs in kind from the score – we call this an¹⁹ offence against the score.”²⁰

16 (R): To § 63 This remark belongs ~~does not belong~~ to the remark that justifications for making a likeness come to an end at some point etc.

17 (R): To § 63

18 (R): To § 63

19 (V): we feel it as an

20 (V): against the *model*.”

Wie rechtfertigt man das Resultat der Abbildung mit der allgemeinen Regel der Abbildung?

¹Ich kann 5^2 mittels x^2 rechtfertigen, wenn ich dabei x^2 einem x^3 oder einem andern Zeichen des Systems entgegenstelle.

²Die Schwierigkeit ist offenbar, das nicht zu rechtfertigen versuchen, was keine Rechtfertigung zuläßt.³

⁴Wenn man fragt: „warum schreibst Du 5^2 ?“ und ich antworte „es steht doch da, ich soll quadrieren“, so ist das eine Rechtfertigung – und eine *volle* – . Eine Rechtfertigung verlangen, in dem Sinne, in dem dies keine ist, ist sinnlos.

Ich hätte jemandem alle möglichen Erklärungen⁵ dafür gegeben, was der Befehl „quadriere diese Zahlen“ heißt. (Und diese Erklärungen sind doch sämtlich Zeichen.) Er quadriere darauf, und nun frage ich ihn „warum tust Du *das* auf diese Erklärung hin?“ Dann hätte es keinen Sinn mir zu antworten: „Du hast mir doch gesagt: (es folgt die Wiederholung der Erklärungen)“. Eine andre Art der Antwort ist aber auf diese Frage auch nicht möglich und die Frage heißt eben nichts. Sie müßte sinnvoll lauten: „Warum tust Du *das* und nicht jenes auf diese Erklärungen hin (ich habe Dir doch gesagt . . .)“.

⁶Wenn man nun fragen würde: Wie lange vor der Anwendung der Regel muß die Disposition „ x^2 “ gedauert haben? Eine Sekunde, oder zwei? Diese Frage klingt natürlich, und mit Recht, wie eine Persiflage. Wir fühlen, daß es darauf gar nicht ankommen kann. Aber diese Art der Frage taucht immer wieder auf.

⁷Wenn man nach einer Regel einen Tatbestand abbildet, so ist *dieser* dabei die *Vorlage*. Ich brauche keine weitere Vorlage, die mir zeigt, wie die Abbildung vor sich zu gehen hat, wie also die erste Vorlage zu benützen ist, denn sonst brauchte ich auch eine Vorlage, um mir die Anwendung der zweiten zu zeigen, u.s.f. ad infinitum. D.h. eine weitere Vorlage nützt mir⁸ nichts, ich muß ja doch einmal ohne Vorlage handeln.

1 (M): ///

2 (M): ///

3 (V): verträgt.

4 (M): ✓

5 (V): alle mögliche Erklärung

6 (M): ///

7 (M): ✓ ///

8 (O): mich

How Does one Use a General Rule of Representation to Justify the Result of Representation?

¹I can justify 5^2 by means of x^2 if in so doing I contrast x^2 with x^3 , or another sign in the system.

²The difficulty is obviously not to try to justify what admits of no³ justification.

⁴If one asks: “Why do you write 5^2 ?” and I answer “It says I’m to square”, then that is a justification – and a *complete* one – . To demand a justification in the sense in which this isn’t one is senseless.

Say I have given someone all possible explanations⁵ for what the command “Square these numbers” means. (And after all, these explanations are all signs.) Then he squares them, and now I ask him, “Why, in response to this explanation, did you do *that*?”. Then it wouldn’t make any sense for him to answer: “But you told me: (a repetition of the explanations follows)”. But no different kind of answer to this question is possible, and the question just doesn’t mean anything. To be meaningful, it would have to ask: “Why did you do *this* and not that in response to these explanations? (I told you, after all . . .)”.

⁶Now suppose one were to ask: How long must the disposition “ x^2 ” have lasted before the rule was applied? One second, or two? This question naturally, and justifiably, sounds like a parody. We feel that it can’t possibly be relevant. Yet this kind of question pops up again and again.

⁷If one portrays a state of affairs in accordance with a rule then *this state of affairs* is the *model*. I don’t need any further model to show me how the depiction is to proceed, i.e. how the first model is to be used, because then I would also need a model in order to show me the application of the second one, and so forth *ad infinitum*. In other words, an additional model doesn’t do me any good, for at some point I’m going to have to act without a model.

1 (M): ///

2 (M): ///

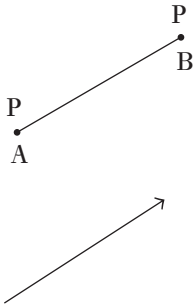
3 (V): what tolerates no

4 (M): ✓

5 (V): someone every possible explanation

6 (M): ///

7 (M): ✓ ///



⁹Wenn ich mich mit¹⁰ der Bewegung des Punktes P von A nach B nach dem Pfeil richte, so ist das¹¹ nur dadurch beschrieben, daß ich das System von Pfeilen beschreibe, dem dieser angehört. – Ich könnte nun wohl sagen: Ist das genug? muß ich nicht auch die Regel angeben, nach der die Übersetzung geschieht, z.B. hier, daß ich mich parallel zum Pfeil bewegen soll? Aber diese Übersetzungsregel könnte¹² ich mir in Gestalt etwa des Zeichens „| |“ (im Gegensatz etwa zu „|–“) dem Pfeile zugesetzt denken; aber dann würde das Zeichen „↗ | |“ auf keiner andern Stufe stehen wie „↗“ und ich könnte doch jetzt nur das System beschreiben, dem dieses Zeichen angehört, wenn ich nicht ad infinitum, also erfolglos, weitere Zeichen zu den obigen setzen will.

281

280v Jedes Abbilden,¹³ (Handeln nach – nicht bloß in Übereinstimmung mit –¹⁴ einer Regel¹⁵) Ableiten einer Handlung aus einem Befehl, Rechtfertigen einer Handlung mit einem Befehl ist von der Art des schriftlichen Ableitens eines Resultats aus einer Angabe dem Hinweis auf die Stellung von Zeichen in einer Tabelle.¹⁶

281 ¹⁷Wir stoßen hier immer auf die peinliche Frage, ob denn nicht das Anschreiben des „5²“ (z.B.) mehr oder weniger (oder ganz) automatisch erfolgt sein könne, und fühlen, daß das der Fall sein mag und daß es uns gar nichts angeht. Daß wir hier auf ganz irrelevantem Boden sind, wo wir nicht hingehören.

¹⁸„Ich schreibe ‚5²‘, weil hier ‚x²‘ steht.“ Was aber, wenn ich sagte: „Ich schreibe ‚+‘, weil hier ‚A‘ steht“? Man würde fragen: Schreibst Du denn überall ‚+‘ wo ‚A‘ steht? man¹⁹ würde nach einer allgemeinen Regel fragen. Und das „weil“ im letzten Satz hätte sonst keinen Sinn.

²⁰Warum schreibst Du 25? – Weil dort „y²“ steht. – Ja, ist das das Signal für 25? – Nein, aber ich habe „25“ geschrieben, weil dort „y²“ steht. – Woher weißt Du denn, daß Du es *deswegen*²¹ geschrieben hast? Hier hätte man das „weil“ als Einleitung einer Angabe der Ursache aufgefaßt statt des Grundes.

²²Was heißt es aber: Ich geh’ zur Tür, weil der Befehl gelautet hat „geh’ zur Tür“?

Und wie vergleicht sich dieser Satz mit: ich geh’ zur Tür, obwohl der Befehl gelautet hat „geh’ zur Tür“. Oder: ich geh’ zur Tür, aber nicht weil der Befehl lautete „geh’ . . .“, sondern . . . Oder: Ich geh’ *nicht* zur Tür, weil der Befehl gelautet hat „geh’ z.T.“.

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline x^2 & 3^2 \end{array}$$

²³Das Phänomen der Rechtfertigung. Ich rechtfertige das Resultat 3² durch x². So schaut jede Rechtfertigung aus.

282

In gewissem Sinn bringt uns das nicht weiter. Aber es kann uns ja auch nicht *weiter*, d.h., zu dem Metalogischen,²⁴ bringen.

9 (M): ✓ (F): MS 110, S. 228.

10 (V): Wenn ich mit

11 (V): so ist, was hier geschieht,

12 (V): kann

13 (V): Abbilden, ~~Ableiten einer H~~

14 (V): nach ~~(nicht bloß . . . mit)~~

15 (O): Regeln (V): mit – gewissen Zeichen // Regeln

16 (V): Hinweis auf eine Tabelle.

17 (M): ✓ ///

18 (M): ✓

19 (V): steht? ~~D.h.~~, man

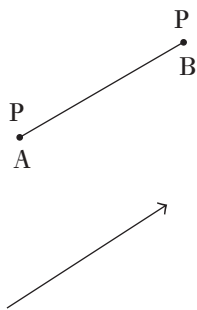
20 (M): ✓

21 (V): deswegen

22 (M): ✓ (R): Zu S. 272

23 (M): ✓

24 (V): zu einem Fundament,



⁸If in the movement of point P from A to B I take my cue from the arrow, then that⁹ can only be described by describing the system of arrows to which this one belongs. – Now I might well say: Is that enough? Mustn't I also cite the rule that governs the translation, e.g. that in this case I am to move parallel to the arrow? I might¹⁰ imagine this rule of translation appended to the arrow in the shape of, say, the sign “| |” (as opposed, say, to “|-”); but then the sign “↗ | |” wouldn't be on a different level from “↗”. And then I can only describe the system to which this sign belongs, if I don't want to add further signs to the ones above – *ad infinitum, and thus uselessly*.

Any portrayal (action *following* – not merely in agreement with – a rule¹¹), or *derivation* of an action from a command, or justification of an action by a command, is the same kind of thing as deriving a written result from data, from pointing out the position of signs in a table.¹²

¹³Here we always encounter the awkward question whether writing down “5²” (for instance) couldn't have taken place more or less (or completely) automatically, and we feel that that might well be the case but that it is of absolutely no concern to us. That here we are on completely irrelevant ground, where we don't belong.

¹⁴“I write ‘5²’ because ‘x²’ is written here”. But what if I said: “I write ‘+’ because ‘A’ is written here”? One would ask: Do you write “+” wherever “A” is written? One¹⁵ would ask about a general rule. Otherwise the “because” in the second sentence would make no sense.

$y^2 \leftarrow 5$ ¹⁶Why do you write 25? – Because “y²” is written there. – Well, is that
 $\rightarrow 25$ the sign for 25? – No, I just wrote “25” because “y²” was written there.
 How do you know that *that is why*¹⁷ you wrote it? In this case one would have taken the “because” as a prelude to an indication of a cause rather than of a reason.

¹⁸But what does this mean: “I'm going to the door *because* the command was ‘Go to the door’ ”?

And how does this proposition compare with: “I'm going to the door even though the command was ‘Go to the door’ ”? Or: “I'm going to the door, but not because the command was ‘Go . . .’, but rather . . .” Or: “I'm *not* going to the door because the command was ‘Go to the door’ ”.

3
x^2 3 ²

¹⁹The phenomenon of justification. I justify the result 3² by x². That's what all justifications look like.

In a certain sense this doesn't get us any further. But of course it can't get us *further*, i.e. to a metalogical realm.²⁰

8 (M): ✓ (F): MS 110, p. 228.
 9 (V): then what happens here
 10 (V): can
 11 (V): with – particular signs // rules
 12 (V): from pointing to a table.
 13 (M): ✓ ///
 14 (M): ✓

15 (V): ~~That is~~, one
 16 (M): ✓
 17 (V): that is why
 18 (M): ✓ (R): To p. 272
 19 (M): ✓
 20 (V): i.e. to a foundation.

Der Vorgang der absichtlichen
Abbildung, der Abbildung mit
der Intention abzubilden ist nicht
wesentlich ein psychischer, innerer.
Ein Vorgang der Manipulation
mit Zeichen auf dem Papier
kann dasselbe leisten.

¹Kein psychischer Vorgang kann besser symbolisieren, als Zeichen, die auf dem Papier stehen.

Der psychische Vorgang kann auch nicht mehr leisten, als die Schriftzeichen auf dem Papier.

Denn immer wieder ist man in der Versuchung, einen symbolischen Vorgang durch einen besonderen psychischen Vorgang erklären zu wollen, als ob die Psyche in dieser Sache viel mehr tun könnte, als das Zeichen.

²Es mißleitet uns da die falsche Analogie mit einem Mechanismus, der mit anderen Mitteln arbeitet, und daher eine besondere Bewegung³ erklären kann. Wie wenn wir sagen: diese Bewegung kann nicht durch den Eingriff von Zahnrädern allein erklärt werden.

283v Hierher gehört, daß es eine wichtige Einsicht in das Wesen der Zeichenerklärung ist, die sie in Gegensatz bringt zur Kausalerklärung,⁴ daß sich das Zeichen durch seine Erklärung ersetzen läßt.⁵

284 ⁶Die Beschreibung des Psychischen müßte sich⁷ wieder als Symbol verwenden lassen.

⁸Das Behaviouristische an unserer Behandlung⁹ besteht nur darin, daß wir¹⁰ keinen Unterschied zwischen „außen“ und „innen“ machen.¹¹ Weil mich die Psychologie nichts angeht.

1 (M): ✓

2 (M): ✓

3 (V): daher besondere Bewegungen

4 (V): in das Wesen der Zeichenerklärung, im Gegensatz zur Kausalerklärung ~~ist~~,

284 5 (V): Hierher gehört irgendwie: daß es nicht selbstverständlich ist, daß sich das Zeichen durch seine Erklärung *ersetzen* läßt. Sondern eine merkwürdige, wichtige Einsicht in das Wesen

dieser (Art von) Erklärung. (Im Gegensatz einer // zu einer // kausalen Erklärung.)

6 (M): ✓

7 (V): sich ~~ja doch~~

8 (M): ✓

9 (V): an meiner Auffassung

10 (V): ich

11 (V): mache.

The Process of Copying on Purpose,
of Copying with the Intention
to Copy, is not Essentially a
Psychological, Inner Process.
A Process of Manipulating Signs
on a Piece of Paper can Accomplish
the Same Thing.

¹No psychological process can symbolize better than signs on paper.

A psychological process can't accomplish any more than written signs on paper.

For again and again one is tempted to want to explain a symbolic process by a particular psychological process, as if the psyche could do much more in this matter than signs.

²Here we are being misled by a false analogy with a mechanism that uses a different means, and can therefore explain a particular movement.³ As when we say: This movement can't be explained by the meshing of cog wheels alone.

This is relevant here: it is an important insight into the nature of explaining signs – one that places it in opposition to a causal explanation – that⁴ a sign can be replaced by its explanation.⁵

⁶The description of what is psychological ought to be⁷ usable in turn as a symbol.

⁸The behaviourist aspect of our discussion consists only in our⁹ not distinguishing between “outer” and “inner”. Because psychology is no concern of mine.

1 (M): ✓

2 (M): ✓

3 (V): explain particular movements.

4 (V): signs, in contrast to a causal explanation, that

5 (V): Here it is somehow relevant that it's not obvious that a sign can be *replaced* by its explanation. Rather, it's a strange, important

insight into the nature of *this* (kind of) explanation. (In contrast to a causal explanation.)

6 (M): ✓

7 (V): ought ~~indeed still~~ to be

8 (M): ✓

9 (V): of my discussion consists only in my

¹²Kann man etwas in einem wesentlich anderen¹³ Sinne „*offen lassen*“, als man eine Klammer leer läßt?

¹⁴Es kann nie essentiell für unsere Betrachtung¹⁵ sein, daß ein symbolisierendes Phänomen in der Seele sich abspielt und nicht auf dem Papier, für den Andern sichtbar.

¹⁶Man kann sagen, daß, ob ich lese, oder nur Laute hervorbringe, während ein Text vor meinen Augen ist, sich nicht durch die Beobachtung von außen entscheiden läßt. Aber das Lesen kann nicht wesentlich eine *innere* Angelegenheit sein. Das Ableiten der Übersetzung von¹⁷ Zeichen, wenn es überhaupt ein Vorgang ist, muß auch ein sichtbarer Vorgang sein können. Man muß also z.B. auch den Vorgang dafür ansehen¹⁸ können, der sich auf dem Papier abspielt, wenn die Glieder der Reihe 1, 4, 9, 16 (als Übersetzung von 1, 2, 3, 4) durch die Gleichungen $1 \times 1 = 1$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, etc. ausgerechnet erscheinen.

285 1 2 3 4 Man könnte dann vom Standpunkt des Behaviourism sagen: Wenn
 × × × × ein Mensch das hinschreibt, dann hat er die untere Reihe durch
 1 2 3 4 Rechnung gewonnen, schreibt er aber bloß die untere Reihe¹⁹ an, dann
 || || || || nicht.
 1 4 9 16

Schriebe er aber nun: 1 2 3 4
 × × × ×
 1 2 3 4
 || || || ||
 1 5 9 20

so würden wir sagen, er hat falsch gerechnet, weil 2×2 nicht 5 ist, etc.

Man könnte natürlich ebensogut schreiben x 1 2 3 4
 x² 1 4 9 16

und diese Darstellung ist ganz gleichwertig mit der ersten, oder überhaupt jeder andern, wenn eine Regel festgesetzt ist, die sie von einer anderen Darstellung unterscheidet.

²⁰Das Gefühl, welches man bei jeder solchen Darstellung hat, daß sie roh (unbeholfen) ist, leitet irre, denn wir sind versucht, nach einer „besseren“ Darstellung zu suchen. Die gibt es aber gar nicht. Eine ist so gut wie die andere, solange die Multiplizität die richtige ist; d.h., solange jedem Unterschied im Dargestellten ein Unterschied in der Darstellung entspricht.

²¹Und nun kann aber auch der Gedanke als psychischer Prozeß nicht mehr tun, als dieses „rohe“ Zeichen.

286 ²²Man kann nicht fragen: Welcher Art sind die geistigen Vorgänge, daß sie wahr und falsch sein können, was die außergeistigen nicht können. Denn, wenn es die „geistigen“ können, so müssen's auch die anderen können; und umgekehrt.

12 (M): ✓
 13 (O): anderem
 14 (M): ✓
 15 (V): für uns
 16 (M): ✓
 17 (O): vom

18 (V): nehmen
 19 (O): Rechnung
 20 (M): ✓
 21 (M): ✓
 22 (M): ✓

¹⁰Can something be *left open* in a sense that is essentially different from leaving parentheses empty?

¹¹It can never be essential to our investigation¹² that a phenomenon of symbolizing takes place in the soul and not on paper, visible to others.

¹³One can say that it cannot be decided by external observation whether I am reading or only uttering sounds when a text is before my eyes. But reading cannot in essence be an *inner* matter. Deriving a translation for signs, if it is a process at all, must also be possible as a visible process. So one must also be able to view¹⁴ the process, for example, that occurs on paper when the members of the progression 1, 4, 9, 16 (as a translation of 1, 2, 3, 4) appear to be calculated from the equations $1 \times 1 = 1$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, etc., as such a derivation.

1	2	3	4	So, from the point of view of behaviourism, one could say: If some-
×	×	×	×	one writes this down then he arrived at the lowest row through calcu-
1	2	3	4	lation, but if he writes down only the lowest row ¹⁵ then he didn't.
1	4	9	16	

But if he were to write:

1	2	3	4
×	×	×	×
1	2	3	4
1	5	9	20

then we would say that he had calculated incorrectly, because 2×2 isn't 5, etc.

Of course, one could just as well write

x	1	2	3	4
x ²	1	4	9	16

and this representation is exactly equivalent to the first, or in general to any other, if a rule has been established that distinguishes it from that other representation.

¹⁶The feeling that one has with any such representation – that it is rough (awkward) – is misleading, for we are tempted to seek a “better” representation. But there is no such thing. One is as good as the next, so long as the multiplicity is correct; that is, so long as there's a difference in representation corresponding to every difference in what is represented.

¹⁷And neither can thought as a psychological process do more than this “rough” sign.

¹⁸One cannot ask: What is it about mental processes that allows them to be true and false – something extra-mental ones cannot be? For if the “mental” ones can be true and false, then the others must have that capacity as well; and vice versa.

10 (M): ✓
 11 (M): ✓
 12 (V): to us
 13 (M): ✓
 14 (V): take

15 (O): calculation
 16 (M): ✓
 17 (M): ✓
 18 (M): ✓

Denn, können es die geistigen²³ Vorgänge, so muß es auch ihre Beschreibung können. Denn in ihrer Beschreibung muß es sich zeigen, wie es möglich ist.

²⁴Wenn man sagt, der Gedanke sei eine seelische Tätigkeit, oder eine Tätigkeit des Geistes, so denkt man an den Geist als an ein trübes, gasförmiges Wesen, in dem manches geschehen kann, das außerhalb dieser Sphäre nicht geschehen kann. Und von dem man manches erwarten muß,²⁵ das sonst nicht möglich ist.

Als handle²⁶ gleichsam die Lehre vom Gedanken vom organischen Teil, im Gegensatz zum anorganischen des Zeichens.

Es wäre²⁷ gleichsam der Gedanke der organische Teil des Symbols, das Zeichen der anorganische. Und jener organische Teil kann Dinge leisten, die der anorganische nicht könnte.

Als geschähe *hinter* dem Ausdruck noch etwas Wesentliches, was sich nicht durch den Ausdruck ersetzen läßt²⁸ – worauf²⁹ sich etwa nur hinweisen läßt – was in dieser Wolke (dem Geist) geschieht und den Gedanken erst zum Gedanken macht. Wir denken hier an einen Vorgang analog dem Vorgang der Verdauung und die Idee ist, daß im Inneren des Körpers andere chemische Veränderungen vor sich gehen, als wir sie außen produzieren können, daß der organische Teil der Verdauung einen anderen Chemismus hat, als, was wir außen mit den Nahrungsmitteln vornehmen könnten.

285v Abbilden ist kein metalogischer Begriff.

³⁰Das heißt, das Abbilden kann sich von einem andern Vorgang auch nur so unterscheiden, wie eben ein Vorgang vom andern und das heißt, daß dieser Unterschied kein metalogischer Vorgang ist.³¹

287 So wie ich früher einmal gesagt habe: Die Intention kann auch nur ein Phänomen wie jedes andere sein, wenn ich überhaupt von ihr reden darf.

³²Das Wählen der Striche beim Abbilden einer Vorlage ist also allerdings ein anderer Vorgang, als etwa das bloße Zeichnen dieser Striche, wenn ich mich „nicht nach der Vorlage richte“, aber der Unterschied ist ein äußerer, beschreibbarer, wie der Unterschied zwischen den Zeichengruppen

2, 4, 6, 8 x, 2, 4, 6, 8
4, 16, 36, 64 und x² 4, 16, 36, 64

und steht mit diesem Unterschied auf einer Stufe.³³

³⁴Und so steht es also auch mit dem Wählen der Worte, wenn ich etwas mit Worten beschreibe: dieser Vorgang unterscheidet sich von dem, des willkürlichen Zuordnens von Worten, aber eben nur (äußerlich), wie sich die beiden Zeichen im vorigen Satze unterscheiden.

23 (V): seelischen

24 (M): ✓

25 (V): kann

26 (V): Es handelt

27 (V): ist

28 (V): was sich nicht ausdrücken läßt

29 (V): auf das

30 (M): ✓

31 (V): Unterschied nicht logische Bedeutung haben kann.

32 (M): ✓

33 (V): auf gleicher Stufe.

34 (M): ✓

For if mental¹⁹ processes can be true and false then of necessity a description of them can be as well. For it has to show in their description how this is possible.

²⁰If one says that thought is a psychological activity, or an activity of the mind, then one thinks of the mind as a cloudy, gaseous entity in which a lot of things can happen that can't happen outside this sphere. And of which one must²¹ expect a lot of things that are not possible otherwise.

As if the study of thought were²² so to speak about the organic – as opposed to the inorganic – part of a sign.

The thought would be²³ the organic part of a symbol, so to speak, the sign the inorganic. And that organic part can accomplish things that the inorganic one can't.

As if *behind* the expression there were still something essential going on, which can't be replaced by the expression²⁴ – something that can, for example, only be pointed to – something which happens in this cloud (the mind) and is what makes a thought a thought. Here we're thinking of a process analogous to that of digestion, and the idea is that within the body chemical changes take place that are different from those we can produce on the outside, that the organic part of digestion has a different chemistry from what we can do with food on the outside.

Depiction is not a metalogical concept.

²⁵This means that depiction too can differ from another process only as one process does from another, and that means that this difference is no metalogical process.²⁶

Just as I once said: Intention too can only be a phenomenon like any other, when I'm allowed to talk about it at all.

²⁷So choosing the lines when portraying a model is a different process, to be sure, from simply drawing these lines when I am “not being guided by the model”, but this difference is an external, describable one, like the difference between the groups of signs

2, 4, 6, 8 x, 2, 4, 6, 8
4, 16, 36, 64 and x² 4, 16, 36, 64

and it is on a level with this²⁸ difference.

²⁹And that's also the way it is with selecting words with which to describe something: this process differs from that of arbitrarily assigning words, but only (externally), as the two signs in the previous sentence differ from each other.

19 (V): psychological

20 (M): ✓

21 (V): can

22 (V): The study of thought is

23 (V): thought is

24 (V): which can't be expressed

25 (M): ✓

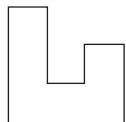
26 (V): difference cannot have a logical meaning.

27 (M): ✓

28 (V): on the same level as this

29 (M): ✓

³⁵„Wenn man einen Hund gelehrt hätte, den Zeichenverbindungen von a, b, c, d zu folgen (wobei a = \rightarrow , b = \downarrow , c = \leftarrow , d = \uparrow), so mag er das mechanisch tun, aber, wenn ich nun wissen will, welches Zeichen ich ihm geben muß, um ihn einen bestimmten Linienzug



³⁶laufen zu lassen, so muß ich das Zeichen von dem Linienzug nach der Regel ableiten.“

35 (M): ✓ ///

36 (F): MS 109, S.

288 Wie¹ hängen unsre Gedanken mit den Gegenständen zusammen, über die wir denken? Wie treten diese Gegenstände in unsre Gedanken ein?² (Sind sie in ihnen durch etwas andres – etwa ähnliches – vertreten?)
Wesen des Porträts; die Intention.

287v Die Vorstellung von ihm ist ein ungemaltes Portrait.

288 ³„Das soll⁴ er sein“ (dieses Bild stellt *ihn* vor) darin liegt das ganze Problem der Darstellung.

287v Kann man sagen: „Mein Erinnerungsbild stellt *ihn* vor“?⁵ Kann man nicht statt⁶ „ich stelle mir ihn vor“ sagen: ich habe ein Vorstellungsbild, welches ihn darstellt⁷“?

Worin besteht es, daß ich mir *ihn* vorstelle? Daß mein Vorstellungsbild ihm ähnlich ist? Und wie wenn es einem andern Menschen zufälligerweise noch ähnlicher wäre, – stellte ich mir dann den andern vor?

Nun, die Vorstellung als Bild ist ihm nur ähnlich oder unähnlich.⁸

288 ⁹Wenn ich sage „der Sinn eines Satzes ist dadurch bestimmt, wie er zu verifizieren ist“, was muß ich dann von dem Sinn des Satzes sagen: daß dieses Bild das Porträt¹⁰ jenes Gegenstandes sein *soll*? Wie ist das denn zu verifizieren?

Was heißt es: Ich kann mir vorstellen, daß der Fleck A sich an den Ort B bewegt? ¹¹Die seltsame Täuschung, der man unterliegt, daß im Satze die Gegenstände das tun, was der Satz sagt, muß sich aufhellen.

A	B
•	

1 (O): Wir

2 (O): Gedanken ein.

3 (M): ✓

4 (V): *sol*

5 (V): vor?“ ~~oder: „ich habe ein Vorstellungsbild~~

6 (V): man statt

7 (V): ~~vorstellt~~

8 (V): als Bild kann ihm nur ähnlich oder unähnlich sein.

9 (M): ✓

10 (V): daß dieser Satz die Übersetzung

11 (F): MS 108, S. 192.

How are our Thoughts Connected
with the Objects we Think about?
How do these Objects Enter our
Thoughts? (Are they Represented in
our Thoughts by Something Else –
Perhaps Something Similar?)
The Nature of a Portrait; Intention.

The mental image of him is an unpainted portrait.

¹“That is supposed to be *he*” (this picture portrays *him*); therein lies the entire problem of portrayal.

Can one say: “My memory-image represents *him*”?² Can’t one³ say: “I have a mental image that represents⁴ him” instead of “I imagine him”?

In what does it consist that I imagine *him*? That my mental image is similar to him? And what if by chance it were even more similar to someone else – would I then be imagining this other person? Well, as an image the mental image is⁵ only similar or dissimilar to him.

⁶If I say “The sense of a proposition is determined by how it is to be verified”, then what must I say about the sense of the proposition: This image is *supposed* to be a portrait of that⁷ object? How is *that* to be verified?

What does this mean: I can imagine that spot A moves to location B?⁸ The strange deception one is subject to – that in a proposition the objects do what the proposition says – must be cleared up.

A B
• |

1 (M): ✓
2 (V): *him*? or: “I have a mental
3 (V): Can one
4 (V): ~~signifies~~
5 (V): image can be

6 (M): ✓
7 (V): This proposition is *supposed* to be a translation of that
8 (F): MS 108, p. 192.

289 Es ist, als ob im Befehl bereits ein Schatten der Ausführung läge. Aber ein Schatten
 288v eben *dieser* Ausführung. *Du* gehst im Befehl dort und dort hin. – Sonst wäre es aber eben
 ein *anderer* Befehl. Gewiß die¹² Identität ist die die der Differenz¹³ zweier verschiedener Befehle
 entspricht.

289 ¹⁴„Der Satz ist ein Bild.“ Ein Bild wovon? Kann man sagen: „von der Tatsache, die ihn
 wahr macht, wenn er wahr ist und von der Tatsache, die ihn falsch macht, wenn er falsch
 ist. Im ersten Fall ist er ein korrektes Bild, im zweiten ein unkorrektes“? ((Wenn ich bei
 288v einem gemalten Bild frage: „wovon ist das ein Bild“; was ist die Art der Antwort?)) Die
 Antwort kann offenbar verschiedener Art sein: Sie ist anders für ein Porträt als Porträt & anders¹⁵
 für ein Genrebild.

289 ¹⁶Wenn man mit Bild meint: die richtige, oder falsche Darstellung der Realität, dann muß
 man wissen, welcher Realität, oder welches Teils der Realität. Ich kann dieses Zimmer richtig
 oder falsch darstellen, aber um herauszufinden¹⁷, ob richtig oder nicht, muß ich wissen, daß
 dieses Zimmer gemeint ist.

¹⁸Was heißt es: sich eine Vorstellung machen, die der Wirklichkeit nicht entspricht?

¹⁹Man vergleiche das Vorstellen mit dem Malen eines Bildes. Er malt also ein Bild des
 Menschen, wie dieser in Wirklichkeit nicht ist.

Sehr einfach. Aber warum nennen wir es das Bild dieses Menschen? Denn, wenn es das
 nicht ist, ist es (ja) nicht falsch. – Wir nennen es so, weil er selbst es drübergeschrieben hat.

Also hat er nichts weiter getan, als jenes Bild zu malen, und jenen Namen drüber-
 zuschreiben. Und das tat er wohl auch in der Vorstellung.

290 ²⁰Es muß uns klar sein, daß der Zusammenhang unseres Gedankens mit Napoleon nur
 durch diesen selbst und durch kein Bild (Vorstellung, etc.) und sei es noch so ähnlich, gemacht
 werden kann. Andererseits aber ist Napoleon für uns in seiner Abwesenheit nicht weniger
 enthalten, als in seiner Anwesenheit.

²¹„Der Plan besteht darin, daß ich mich das und das tun sehe.“ Aber wie weiß ich, daß
ich es bin. – Nun, ich bin es ja nicht, was ich sehe, sondern etwa ein Bild. Warum aber nenne
 ich es *mein* Bild? Nicht etwa, weil es mir ähnlich sieht.

„Woher weiß ich, daß ich es bin“: Das ist ein gutes Beispiel einer falsch angebrachten
 Frage. Die Frage hat nämlich Sinn, wenn es etwa heißt: Woher weiß ich, daß ich es bin,
 den ich da im Spiegel sehe. Und die Antwort gibt dann Merkmale, nach denen ich zu
 erkennen bin. –

²²Die Frage „woher weiß ich, daß ich das bin“ oder richtiger „ . . . daß das *mich* vertritt“
 ist Unsinn, denn, daß es mich vertritt, ist meine (*eigene*) Bestimmung. Ja, ich könnte
 ebensogut fragen: „woher weiß ich, daß das Wort ‚ich‘ mich vertritt“, denn meine Figur im
 Bild war nur ein anderes Wort „ich“.

12 (V): ~~diese~~

13 (V): Differenz ~~entspricht~~

14 (M): XXX (R): [Zu § 21 S. 83]

15 (V): für ein Portrait & anders

16 (M): XXX (R): [Zu § 21 S. 83]

17 (O): heraus zu finden

18 (M): ✓

19 (M): ✓

20 (M): ✓

21 (M): ✓

22 (M): ✓

It is as if in the command there were already a shadow of its execution. But a shadow of *this* execution. It is *you* who goes to this or that place in the command. – Otherwise it would just be a *different* command. Certainly the⁹ identity is one that corresponds to the difference between two different commands.

¹⁰“A proposition is a picture”. A picture of what? Can one say: “Of the fact that makes it true if it is true, and of the fact that makes it false if it is false. In the first case it is a correct picture, in the second case an incorrect one”? ((If in the case of a painted picture I ask: “What is this a picture of?”, what kind of an answer do I get?)) Obviously, the answer can be varied: It is one thing for a portrait *qua* portrait and¹¹ another for a genre painting.

¹²If one means by a picture: the correct or false representation of reality, then one has to know of what reality or of what part of reality. I can represent this room correctly or incorrectly, but in order to find out whether my portrayal is correct or not, I have to know that it is this room that is meant.

¹³What does it mean: to imagine something that doesn’t correspond to reality?

¹⁴Compare imagining with painting a picture. So he is painting a picture of a person that is different from the way this person is in reality.

Very simple. But why do we call it the picture of this person? For if that isn’t what it is, it (certainly) isn’t inaccurate. – We call it that because he himself wrote that over it.

So he didn’t do anything more than paint that picture and write that name over it. And he probably also did that in his imagination.

¹⁵It has to be clear to us that the connection of our thought with Napoleon can only be made through Napoleon himself, and not through an image (mental image, etc.), be it ever so similar. But on the other hand, Napoleon is embodied for us in his absence no less than in his presence.

¹⁶“Having a plan consists in my seeing myself doing this or that.” But how do I know that it is *I*? – Well it isn’t I whom I’m seeing, but for instance a picture. But why do I call it *my* picture? Not, say, because it looks like me.

“How do I know that it is I?”: That’s a good example of a misplaced question. For the question makes sense if it goes something like: “How do I know that it is I that I’m seeing here in the mirror?” And the answer then provides some features by which I can be recognized. –

¹⁷The question “How do I know that this is I?”, or more correctly, “. . . that this represents *me*” is nonsense, because that it represents me is my (own) decision. Indeed, I might just as well ask: “How do I know that the word ‘I’ represents me?”, for my shape in the picture was merely a different word for “I”.

9 (V): ~~this~~

10 (M): XXX (R): [To § 21 p. 83]

11 (V): for a portrait and

12 (M): XXX (R): [To § 21 p. 83]

13 (M): ✓

14 (M): ✓

15 (M): ✓

16 (M): ✓

17 (M): ✓

²³Wohl aber könnte man fragen „was hat denn²⁴ der Name ‚a‘ mit diesem Menschen zu tun“. Und die Antwort wäre: Nun, er *heißt* a.²⁵

²⁶„Diese Figur des Bildes bin ich“ ist ein Übereinkommen.

²⁷Ja, aber *worin* kommen wir überein? Welche Beziehung zwischen Zeichen und mir stellen wir her? Nun, *nur* die, die etwa durch das Zeigen mit der Hand oder das Umhängen eines Täfelchens besteht. Denn diese Relation ist nur durch das System bedeutungsvoll, dem sie angehört.

291 ²⁸Wenn man sagt: Ich stelle mir die Sonne vor, wie sie über den Himmel zieht; so ist doch nicht die Vorstellung damit beschrieben, daß „die Sonne über den Himmel zieht“! Nun könnte ich einerseits fragen: ist nicht, was Du vor Dir siehst, eine gelbe Scheibe in Bewegung? aber doch nicht gerade die Sonne. – Andererseits, wenn ich sage „ich stelle mir die Sonne in dieser Bewegung vor“, so ist das nicht dasselbe, wie wenn ich (etwa kinematographisch) ein solches Bild zu sehen bekäme.

Ja, es hätte Sinn, von diesem Bild zu fragen: „stellt das die Sonne vor?“

²⁹Das Porträt ist nur ein dem N ähnliches Bild (oder auch das nicht), es hat aber nichts in sich (wenn³⁰ noch so ähnlich), was es zum Bildnis *dieses* Menschen, d.h. zum beabsichtigten Bildnis machen würde. (Ja, das Bild, was dem Einen täuschend ähnlich ist, kann in Wirklichkeit das schlechte Porträt eines Anderen sein.)

³¹Nun kann man doch fragen: „Wie zeigt sich denn das, daß er das Bild als Porträt des N meint?“ – „Nun, indem er’s sagt“ – „Aber wie zeigt es sich denn, daß er *das* mit dem meint, was er sagt?“ – „Gar nicht!“ (Worauf bezieht sich denn dieses „das“. Man kann fragen: Wie zeigt sich, daß er meint, was er sagt. Antwort z.B. an seinem Gesicht.))

³²„Ich war der Meinung,³³ Napoleon sei 1805 gekrönt worden.“ – „Warst Du die ganze Zeit ununterbrochen dieser Meinung?“

³⁴Was hat aber Deine Meinung³⁵ mit Napoleon zu tun? Welcher Zusammenhang³⁶ besteht zwischen Deiner Meinung³⁷ und Napoleon?

Es kann, z.B., der sein, daß das Wort „Napoleon“ in dem Ausdruck meiner Meinung vorkommt, plus dem Zusammenhang, den dieses Wort mit seinem Träger hat. Also etwa, daß er sich so unterschrieben hat, so angeredet wurde, etc. etc.

292 „Aber mit dem Wort ‚Napoleon‘ bezeichnest Du doch, während Du es aussprichst, eben diesen Menschen“ – „Wie geht denn, Deiner Meinung nach, dieser Akt des Bezeichnens vor sich? Momentan? oder braucht er Zeit?“ – „Ja aber, wenn man Dich fragt ‚hast Du jetzt (eben) den Mann gemeint, der die Schlacht bei Austerlitz gewonnen hat?‘ wirst Du doch sagen ‚ja‘. Also hast Du diesen Mann gemeint, *als Du den Satz, in dem sein Name vorkommt, aussprachst!*“ – Wohl, aber nur etwa in dem Sinne, in welchem ich damals auch wußte, daß $2 + 2 = 4$ sei.³⁸ Nämlich nicht so, als ob zu dieser Zeit ein besonderer Vorgang stattgefunden

23 (M): ✓

24 (V): „was denn

25 (V): Nun, das *ist* a.

26 (M): ✓

27 (M): ✓

28 (M): ✓

29 (M): ✓

30 (V): wenn ~~auch~~

31 (M): ✓

32 (M): ✓

33 (V): Ich dachte,

34 (M): ✓

35 (V): aber Dein Gedanke

36 (V): Welche Verbindung

37 (V): zwischen Deinem Gedanken

38 (V): ist.

¹⁸But one *could* ask “What does the name ‘a’ have to do with this person?”. And the answer would be: Well, a *is* his *name*.¹⁹

²⁰“This figure in the picture is I” is an agreement.

²¹Fine, but about what are we agreeing? What relation are we establishing between signs and myself? Well, *nothing other* than the one that exists, say, by pointing with one’s hand or attaching a label. For this relation is only meaningful because of the system to which it belongs.

²²If one says: “I imagine the sun as it moves across the sky”, then that surely doesn’t describe the mental image that “the sun is moving across the sky”! Now on the one hand I could ask: “Isn’t what you’re seeing in front of you a yellow disc in motion? But surely not the sun, of all things”. – On the other hand, if I say “I’m imagining the sun moving like this”, then this isn’t the same thing as if I got to see such an image (say, in a film).

Indeed, it would make sense to ask about this image: “Does that represent the sun?”

²³The portrait is only a picture similar to N (or not even that). But it contains nothing (no matter how similar) that would make it a portrait of *this* person, i.e. the intended portrait. (Indeed, the picture that looks virtually identical to one person can actually be a bad portrait of someone else.)

²⁴But now one can ask: “How *does* it show that he means the picture to be a portrait of N?” – “Well, by his saying this.” – “But how does it show that he means *that* by what he says?” – “It doesn’t show at all!” ((What does this “that” refer to? One can ask: How does it show that he means what he is saying? Answer, for instance: By his face.))

²⁵“I was of the opinion that²⁶ Napoleon was crowned in 1805”. – “Were you of that opinion the entire time, without interruption?”

²⁷But what does your opinion²⁸ have to do with Napoleon? What connection is there between your opinion²⁹ and Napoleon?

It may, for example, consist in the fact that the word “Napoleon” occurs in the expression of my opinion, plus the connection that word has with its bearer. So for instance that he signed his name that way, was addressed that way, etc., etc.

“But with the word ‘Napoleon’, as you utter it, you are designating this very person”. – “How does this act of designation take place, in your view? Instantaneously? Or does it take time?” – “Yes. But if you’re asked ‘Did you just now mean the (very) man who won the battle of Austerlitz?’ you’ll surely say ‘Yes’. So you meant this man *when you uttered the sentence in which his name appeared!*” – True, but only in more or less the same sense in which I also knew at that time that $2 + 2 = 4$. That is, it’s not as if at that time a special process had taken place that we could call “meaning”; even if certain images perhaps accompanied the utterance of the sentence, images that are characteristic of this intention and might have

18 (M): ✓

19 (V): Well, that *is* a.

20 (M): ✓

21 (M): ✓

22 (M): ✓

23 (M): ✓

24 (M): ✓

25 (M): ✓

26 (V): I thought that

27 (M): ✓

28 (V): your thought

29 (V): thought

hätte, den wir dieses „Meinen“ nennen könnten; auch wenn vielleicht gewisse Bilder das Aussprechen begleitet haben, die für diese Meinung charakteristisch sind und bei anderer Bedeutung des Wortes „Napoleon“ vielleicht andre gewesen wären. Vielmehr ist die Antwort „ja, ich habe den Sieger von Austerlitz gemeint“ ein weiterer Schritt im Kalkül. Täuschend ist an ihr³⁹ die vergangene Form, die eine Beschreibung dessen zu geben scheint, was „in mir“ während des Aussprechens des Satzes vorgegangen war. In Wirklichkeit knüpft das Präteritum nur an den früher ausgesprochenen Satz an.

⁴⁰„Aber ich habe *ihn* gemeint“. Sonderbarer Vorgang, dieses Meinen! Kann man hier in Europa jemanden meinen, auch wenn er in Amerika⁴¹ ist? Oder⁴² gar, wenn er schon tot ist?

⁴³Meine ganzen Überlegungen gehen immer dahin, zu zeigen, daß es nichts *nützt*, sich das Denken als ein Halluzinieren⁴⁴ vorzustellen. D.h., daß es *überflüssig* ist, die Schwierigkeit aber bestehen bleibt. Denn auch die Halluzination⁴⁵, *kein* Bild, kann die Kluft zwischen dem Bild und der Wirklichkeit überbrücken, und das eine nicht eher als das andere.

39 (V): ihm

40 (M): ✓

41 (V): Amerika ~~und man in Europa~~

42 (V): Und

43 (M): ✓

44 (O): Haluzinieren

45 (O): Haluzination

been different, given a different meaning of the word “Napoleon”. Rather, the answer “Yes, I meant the victor at Austerlitz” is a further step in the calculus. What is deceptive about this answer is the past tense, which seems to be giving a description of what went on “inside me” while I was uttering the sentence. Actually, the preterite tense only picks up the previously uttered sentence.

³⁰“But I meant *him*.” What a strange process, this meaning! Can we here in Europe mean someone even if he is in America?³¹ Or³² what is more, if he is dead?

³³All my reflections are always directed towards showing that it doesn’t *do any good* to conceive of thinking as hallucinating. In other words, that it is *superfluous*, and leaves the problem unchanged. For *no* image, not even a hallucination, can bridge the gap between image and reality, and no one image is better at this than another.

30 (M): ✓

32 (V): And

31 (V): Can you mean someone even if he is in
America ~~and you are in Europe?~~

33 (M): ✓

Logischer Schluß.

Logical Inference.

Wissen wir, daß p aus q folgt, weil wir die Sätze verstehen? Geht das Folgen aus einem Sinn hervor?

$p \cdot q = p$ heißt „q folgt aus p“.

$(\exists x).fx \vee fa = (\exists x).fx$, $(\exists x).fx \& fa = fa$. Wie weiß ich das? (denn das Obere habe ich sozusagen bewiesen). Man möchte etwa sagen: „ich verstehe $(\exists x).fx'$ eben“. (Ein herrliches Beispiel dessen, was „verstehen“ heißt.)

Ich könnte aber ebensogut fragen „wie weiß ich, daß $(\exists x).fx$ aus fa folgt“ und antworten: „weil ich $(\exists x).fx'$ verstehe“. Wie weiß ich aber wirklich, daß es folgt? – Weil ich so kalkuliere.

Wie weiß ich, daß $(\exists x).fx$ aus fa folgt? Sehe ich quasi hinter das Zeichen „ $(\exists x).fx$ “, und sehe den Sinn, der hinter ihm steht und aus ihm,¹ daß er aus fa folgt? ist *das* das Verstehen?

Nein, jene Gleichung drückt einen Teil des Verständnisses² aus (das so ausgebreitet vor mir liegt).

295 Vergleiche die³ Auffassung des Verstehens, das ursprünglich ein Erfassen mit einem Schlag,⁴ erst so ausgebreitet werden kann.

Wenn ich sage „ich weiß, daß $(\exists x).fx$ folgt, weil ich es verstehe“, so hieße das, daß ich, es verstehend, etwas *Anderes* sehe, als das gegebene Zeichen, gleichsam eine Definition des Zeichens, aus der das Folgen hervorgeht.

Wird nicht vielmehr die Abhängigkeit durch die Gleichung hergestellt und festgesetzt? Denn eine verborgene Abhängigkeit gibt es eben nicht.

$(\exists x).fx$	fa
W	W
W	F
F	W
F	F

⁵Aber, meinte ich, muß also nicht $(\exists x).fx$ eine Wahrheitsfunktion von fa sein, damit das möglich ist? Damit diese Abhängigkeit möglich ist?

Ja sagt denn eben $(\exists x).fx \vee fa = (\exists x).fx$ nicht, daß fa schon in $(\exists x).fx$ enthalten ist? Zeigt es nicht die Abhängigkeit des fa vom $(\exists x).fx$? Nein, außer, wenn $(\exists x).fx$ als logische Summe *definiert* ist (mit einem Summanden fa). –

Ist das der Fall, so ist $(\exists x).fx$ (nichts als) eine Abkürzung.

1 (V): und daraus,
2 (V): Verstehens
3 (V): Denke an die

4 (V): ursprünglich mit einem Schlag erfäßbar,
5 (F): MS 111, S. 63.

Do we Know that p Follows from q because we Understand the Propositions? Is Entailment Implied by a Sense?

$p \cdot q = p$ means “q follows from p”.

$(\exists x).(fx \vee fa) = (\exists x).fx$, $(\exists x).(fx \& fa) = fa$. How do I know that? (Because for the equation above I have given a kind of proof). One is inclined to say something like “I just understand ‘ $(\exists x).fx$ ’”. (A splendid example of what “understand” means.)

But I could just as well ask “How do I know that $(\exists x).fx$ follows from fa?” and answer: “Because I understand ‘ $(\exists x).fx$ ’”. But how do I really know that it follows? – Because that is the way I calculate.

How do I know that $(\exists x).fx$ follows from fa? Do I look behind the sign “ $(\exists x).fx$ ”, as it were, and see the sense lying behind it, and see from that that $(\exists x).fx$ follows from fa? Is *that* what understanding is?

No, that equation expresses a part of the understanding (that thereby lies spread out in front of me).

Compare¹ this conception of understanding with the one according to which it is originally a grasping all at once,² and only later can be spread out in this way.

If I say “I know that $(\exists x).fx$ follows because I understand it”, that would mean that when I understand it, I see something *other* than the sign I’m given, a kind of definition of the sign, from which the entailment results.

Isn’t it rather that the relation of dependence is created and defined by the equation? For there just is no such thing as a hidden relation of dependence.

$(\exists x).fx$	fa	³ But, I used to think, doesn’t $(\exists x).fx$ have to be a truth-function of fa for this to be possible? For this relation of dependence to be possible? Indeed, isn’t it precisely $(\exists x).(fx \vee fa) = (\exists x).fx$ that says that fa is already contained in $(\exists x).fx$? Doesn’t that show the dependence of fa on $(\exists x).fx$? No, unless $(\exists x).fx$ is <i>defined</i> as a logical sum (with fa as one of its terms). – If that’s the case, then $(\exists x).fx$ is (nothing but) an abbreviation.
T	T	
T	F	
F	F	

1 (V): Think of

2 (V): was graspable all at once,

3 (F): MS 111, p. 63.

Einen verborgenen Zusammenhang gibt es in der Logik nicht.

Hinter die Regeln kann man nicht dringen, weil es kein Dahinter gibt.

296 $fE \ \& \ fA = fA$ Kann man sagen: das ist nur möglich, wenn fE aus fA folgt; oder muß man sagen: das bestimmt, daß fE aus fA folgen soll.⁶

Wenn das erste, so muß es vermöge der Struktur folgen, etwa indem fE durch eine Definition so bestimmt ist, daß es die *entsprechende* Struktur hat. Aber kann denn wirklich das folgen, gleichsam aus der sichtbaren Struktur der Zeichen hervorgehen, wie ein physikalisches Verhalten aus einer physikalischen Eigenschaft, und braucht etwa nicht vielmehr immer solche *Bestimmungen*, wie die Gleichung $fE \ \& \ fA = fA$? Ist es etwa dem⁷ $p \vee q$ anzusehen, daß es aus p folgt, oder auch nur den Regeln, welche Russell für die Wahrheitsfunktionen gibt?

Und warum sollte auch die Regel $fE \ \& \ fA = fA$ aus einer andern Regel hervorgehen und nicht die primäre Regel sein?

Denn was soll es heißen „ fE muß doch fA in irgendeiner Weise enthalten“? Es enthält es eben nicht, insofern wir mit fE arbeiten können, ohne fA zu erwähnen. Wohl, aber, insofern eben die Regel $fE \ \& \ fA = fA$ gilt.

Die Idee⁸ ist nämlich, daß $fE \ \& \ fA = fA$ nur vermöge einer Definition von fE gelten kann.

Und zwar – glaube ich – darum, weil es sonst den falschen Anschein hat, als würde nachträglich noch eine Bestimmung über fE getroffen, nachdem es schon in die Sprache eingeführt sei. Es wird aber tatsächlich keine Bestimmung einer künftigen Erfahrung überlassen.

Und die Definition des fE aus „allen Einzelfällen“ ist ja *ebenso* unmöglich, wie die Aufzählung *aller* Regeln von der Form $fE \ \& \ fX = fX$.

297 Ja, die Einzelgleichungen $fE \ \& \ fX = fX$ sind eben gerade ein Ausdruck dieser Unmöglichkeit.

Wenn man gefragt wird: ist es aber nun auch sicher, daß ein anderer Kalkül als dieser nicht gebraucht wird, so muß man sagen: Wenn das heißt „gebrauchen wir nicht in unserer wirklichen⁹ Sprache noch andere Kalküle“, so kann ich nur antworten „ich weiß (jetzt) keine anderen (so, wie wenn jemand fragte „sind das alle Kalküle der (gegenwärtigen) Mathematik“, ich sagen könnte „ich erinnere mich keiner anderen, aber ich kann etwa noch genauer nachlesen). Die Frage kann aber nicht heißen „kann kein anderer Kalkül gebraucht werden?“ Denn wie sollte die Antwort auf diese Frage gefunden werden?¹⁰

Ein Kalkül ist ja da, indem man ihn beschreibt.

Kann man sagen: „Kalkül“ ist kein mathematischer Begriff?

Wenn ich sagte: „ob p aus q folgt, muß aus p und q allein hervorgehen¹¹“; so müßte es heißen: daß p aus q folgt, ist eine Bestimmung, die den Sinn von p und q bestimmt; nicht etwas, das, von dem Sinn dieser beiden ausgesagt, wahr ist. Daher kann man (*sehr*) wohl die Schlußregeln angeben,¹² gibt damit aber Regeln für die Benützung der Schriftzeichen

6 (V): aus fA folgt?

7 (O): den

8 (V): Meinung

9 (V): tatsächlichen

10 (V): Denn wie sollte ich diese Frage beantworten?

11 (V): allein zu ersehen sein

12 (V): geben,

In logic there is no such thing as a hidden connection.

You can't get behind the rules, because there isn't any "behind".

$fE \ \& \ fa = fa$. Can one say: That's only possible if fE follows from fa ? Or does one have to say: That determines that fE is supposed to follow⁴ from fa ?

If the former, then it has to follow by virtue of the structure, say because fE has been defined in such a way that it has the appropriate structure. But can *that* really follow from, be entailed, as it were, by the visible structure of the signs, like physical behaviour from a physical property? Doesn't it rather always need *stipulations*, such as the equation $fE \ \& \ fa = fa$? Can one perhaps tell by looking at $p \vee q$ that it follows from p , or only by looking at the rules that Russell gives for truth-functions?

And why should the rule $fE \ \& \ fa = fa$ be derived from another rule, and not be the primary rule?

For what is "But fE must somehow contain fa " supposed to mean? It *doesn't* contain it, in so far as we can work with fE without mentioning fa . But it does in so far as the rule $fE \ \& \ fa = fa$ is valid.

For the idea⁵ is that $fE \ \& \ fa = fa$ can only be valid by virtue of a definition of fE .

And this – I think – is because otherwise the false impression arises that an additional stipulation about fE was subsequently made, after it had been introduced into language. But in fact there is no stipulation left for future experience to make.

And the definition of fE based on "all particular cases" is *just as* impossible as the enumeration of *all* rules of the form $fE \ \& \ fx = fx$.

Indeed, the individual equations $fE \ \& \ fx = fx$ are the very expression of this impossibility.

If one is asked: "But is it really certain that no calculus other than this one is being used?", then one has to say: If that means "Don't we use other calculi too in our real⁶ language?", I can only answer "I don't know of any others (at present)". (As when someone asks "Are these all the calculi of (present-day) mathematics?", I can say, "I don't remember any others, but perhaps I can check the literature on this more closely".) But the question cannot be "Can no other calculus be used?". For how should we find the answer to this question?⁷

After all, a calculus exists by virtue of its being described.

Can one say: "Calculus" is not a mathematical concept?

If I were to say: "Whether p follows from q must be implied solely by⁸ p and q ", then this would have to mean: That p follows from q is a stipulation that determines the sense of p and q ; it is not something that, when stated about the sense of these two, is true. Therefore one can certainly state the rules of inference, but in so doing one is stating rules for the use of the written signs that determine their previously undetermined sense; and this means

4 (V): that fE follows

5 (V): the meaning

6 (V): actual

7 (V): how should I answer this question?

8 (V): be visible solely from

an, die deren Sinn erst bestimmen; was nichts anderes heißt, als daß diese Regeln willkürlich festzusetzen sind; d.h. nicht von der Wirklichkeit abzulesen, wie eine Beschreibung. Denn, wenn ich sage, die Regeln sind willkürlich, so meine ich, sie sind nicht von der Wirklichkeit determiniert, wie die Beschreibung dieser Wirklichkeit. Und das heißt: Es ist Unsinn, von ihnen zu sagen, sie stimmen mit der Wirklichkeit überein; die Regeln über die Wörter „blau“, „rot“, etwa, stimmten mit den Tatsachen, die diese Farben betreffen, überein, etc.

Die Gleichung $p \ \& \ q = p$ zeigt eigentlich den Zusammenhang des Folgens und der Wahrheitsfunktionen.

nothing more than that these rules must be established arbitrarily; that is to say, are not to be read off reality like a description. For when I say that the rules are arbitrary I mean that they are not determined by reality, as is the description of this reality. And that means: It is nonsense to say of them that they correspond to reality; that, say, the rules for the words “blue” and “red” agree with the facts about those colours, etc.

What the equation $p \& q = p$ really shows is the connection between entailment and truth-functions.

„Wenn p aus q folgt, so muß p in q schon mitgedacht sein“.

Bedenke, daß aus dem allgemeinen Satz eine logische Summe von, sagen wir, hundert Summanden folgen könnte, an die wir doch bestimmt nicht gedacht haben, als wir den allgemeinen Satz aussprachen. Können wir nicht dennoch sagen, daß sie aus ihm folgt?

„Was aus einem Gedanken folgt, muß in ihm mitgedacht werden. Denn an einem Gedanken ist nichts, was wir nicht wissen, während wir ihn denken. Er ist keine Maschine, deren Untersuchung Ungeahntes zu Tage fördern kann, oder eine Maschine, die etwas leisten kann, was man ihr zuerst nicht ansieht. D.h. er wirkt eben *logisch* überhaupt nicht als Maschine. Als Gedanke liegt in ihm nicht mehr, als hineingelegt wurde.¹ Als Maschine, d.h. kausal, wäre ihm alles zuzutrauen; logisch ergibt er nur, was wir mit ihm gemeint haben.“

Wenn ich sage, das Viereck ist ganz weiß, so denke ich nicht an zehn kleinere, in ihm enthaltene Rechtecke, die weiß sind; und an „*alle*“ in ihm enthaltenen² Rechtecke oder Flecken, kann ich nicht denken. Ebenso denke ich im Satz „er ist im Zimmer“ nicht an
300 hundert mögliche Stellungen, die er einnehmen kann, und gewiß nicht an *alle*.

„Wo immer Du die Scheibe triffst, hast Du gewonnen. – Du hast sie rechts oben getroffen, also. . . .“

Auf den ersten Blick scheint es zwei Arten der Deduktion zu geben: in der einen ist in der Prämisse von allem³ die Rede, wovon die Konklusion handelt, in der andern nicht. Von der ersten Art ist der Schluß von p & q auf q. Von der anderen der Schluß: der ganze Stab ist weiß, also ist auch das mittlere Drittel weiß. In dieser Konklusion wird von Grenzen gesprochen, von denen im ersten Satz nicht die Rede war. (Das ist verdächtig.) Oder wenn ich sage: „wo immer in diesem Kreise Du die Scheibe triffst, wirst Du den Preis gewinnen“ und dann „Du hast sie hier getroffen, also . . .“, so war dieser Ort im ersten Satz nicht vorausgesehen. Die Scheibe mit dem Einschub hat zu der Scheibe, wie ich sie früher gesehen habe, eine bestimmte interne Beziehung und darin besteht es, daß das Loch hier unter die vorausgesehene allgemeine Möglichkeit fällt. Aber es selbst war nicht vorausgesehen und es kam⁴ in dem ersten Bild nicht vor. Oder mußte doch nicht darin vorkommen. Denn selbst angenommen, ich hätte dabei an tausend bestimmte Möglichkeiten gedacht, so hätte es zum mindesten geschehen können, daß die ausgelassen wurde, die später eintraf. Und wäre das Voraussehen dieser Möglichkeit wesentlich gewesen, so hätte die Prämisse durch das Übersehen dieser einen Möglichkeit den unrichten Sinn bekommen und die Konklusion würde nun nicht aus ihr folgen.

1 (O): würde.

2 (O): enthaltene

3 (V): von dem

4 (V): und kam

“If p Follows from q, then p Must Have Been Mentally Included in q.”

Bear in mind that a logical sum of a hundred or so terms could follow from a general proposition, terms that we certainly weren't thinking of when we uttered the general proposition. But can we not say that this sum follows from the proposition anyway?

“What follows from a thought must be mentally included in it. For there is nothing about a thought that we don't know while we are thinking it. It isn't a machine we can investigate to unearth things we had never dreamed of, or a machine that can do something that at first glance one doesn't think it capable of. That is, *logically* a thought doesn't work like a machine at all. *Qua* thought there is no more in it than was put into it. As a machine, i.e. causally, it could be thought capable of anything; logically, all it produces is what we meant by it.”

If I say that a rectangle is completely white, I'm not thinking of ten smaller rectangles contained in it which are white; and I can't think of “*all*” the rectangles or patches that are contained in it. Likewise, in the proposition “He is in the room” I'm not thinking of a hundred possible locations he can be in, and certainly not of *all of them*.

“Wherever you hit the target, you've won. – You've hit it in the upper right hand section, therefore. . . .”

At first glance there seem to be two kinds of deduction: in one everything¹ in the conclusion is mentioned in the premiss, in the other it isn't. The inference from p & q to q is of the first kind. The inference: the whole rod is white, therefore its middle third is also white, is of the latter kind. In this conclusion boundaries are mentioned that were not mentioned in the first proposition. (That's suspicious.) Or if I say: “Wherever in this circle you hit the target you will win the prize” and then “You've hit it here, therefore . . .”, this place was not foreseen in the first proposition. The target with the hole shot in it has a certain internal relation to the target as I saw it before the shot, and this relation consists in the hole's being included within the general possibility that was foreseen. But the hole itself wasn't foreseen, and didn't occur in the first picture. Or didn't have to occur in it. For even assuming that I had been thinking about a thousand specific possibilities when I uttered the first sentence, it was at least possible to omit the one that later occurred. And if foreseeing this possibility had been essential, then overlooking this one possibility would have given the premiss the wrong sense, and then the conclusion wouldn't follow from it.

1 (V): in one, what is

301 Andererseits wird dem Satz „wohin immer Du in diesem Kreis triffst . . .“ nichts hinzugefügt, wenn man sagt: „wohin immer Du in diesem Kreis triffst, und wenn Du insbesondere den schwarzen Punkt triffst, . . .“. ⁵Aber, war der schwarze Punkt schon da, als man den ersten Satz aussprach, so war er natürlich mitgemeint; war er aber nicht da, so hat sich durch ihn eben der Sinn des Satzes geändert.



Was soll es aber dann heißen, zu sagen: wenn ein Satz aus dem andern folgt, so muß der erste im zweiten mitgedacht sein, da es doch nicht nötig ist, im Satz „ich bin 170 cm hoch“ auch nur einen einzigen ⁶der aus ihm folgenden negativen Längenangaben mitzudenken.

„Das Kreuz liegt *so* auf der Geraden: “ – „Es liegt *also* zwischen den Strichen . . .“

„Es hat hier $16\frac{1}{2}^\circ$.“ – „Es hat also jedenfalls mehr als 15° .“

Wenn man sich übrigens wundert, daß ein Satz aus dem andern folgt, obwohl man doch bei diesem gar nicht an jenen dachte, ⁷so denke man nur daran, daß $p \vee q$ aus p folgt, und ich denke doch gewiß nicht alle Sätze $p \vee \xi$ wenn ich p denke.

Die ganze Idee, daß man bei dem Satz, aus dem ein anderer folgt, diesen denken muß, beruht auf einer falschen, und psychologisierenden, Auffassung. Wir haben uns ja nur um das zu kümmern, was in den Zeichen und (ihren) Regeln liegt.

Wenn das Kriterium dafür, daß p aus q folgt, darin besteht, daß man „beim Denken von q p mitdenkt“, so denkt man wohl beim Denken des Satzes „in dieser Kiste sind 10^5 Sandkörner“ die 10^5 Sätze: „in dieser Kiste ist *ein* Sandkorn“, „ . . . 2 Sandkörner“, etc., etc.? Was ist denn hier das Kriterium des Mitdenkens!

302 Und wie ist es mit einem Satz: „ein Fleck (F) liegt zwischen den Grenzen AA? ⁸Folgt aus ihm nicht, daß F auch zwischen BB und CC liegt, u.s.w.? Folgen hier aus *einem* Satz unendlich viele? und ist er also unendlich vielsagend? – Aus dem Satz „ein Fleck liegt zwischen den Grenzen AA“ folgt jeder Satz von der Art „ein Fleck liegt zwischen den Grenzen BB“, den ich hinschreibe – und so viele, als ich hinschreibe. Wie aus p soviele Sätze der Form $p \vee \xi$ folgen, als ich hinschreibe (oder ausspreche, etc.). (Der Induktionsbeweis beweist soviele Sätze von der Form . . . als ich hinschreibe.)



5 (F): MS 109, S. 10.

6 (V): einzigen ~~aus~~


7 (V): daß dieser Satz aus jenem folgt, obwohl man doch bei jenem gar nicht an ihn dachte,

8 (F): MS 113, S. 132r.

On the other hand, nothing is added to the sentence “Wherever you hit this circle. . . .” by saying: “Wherever you hit the circle and if, in particular, you hit the black dot,”² But if the black dot was already there when the first sentence was uttered, then of course it was meant as well; but if it wasn’t there, then for that reason the sense of the sentence changed.



But then what is it supposed to mean to say: “If one sentence follows from another then the first must be mentally included in the second”?, since in the sentence “I am 170 cm tall” it isn’t necessary to have in mind even one of the negative specifications of height that follow from it?

“The cross is situated on the straight line like *this*:  – “*Thus* it lies between the strokes”

“It’s 16½° here.” – “So at any rate it’s more than 15°.”

Incidentally, if you are surprised that one proposition follows from another³ even though you don’t think of the latter when you think of the former, then just consider that $p \vee q$ follows from p , and I certainly don’t think all propositions of the form $p \vee \xi$ when I’m thinking p .

The whole idea – that when you think one proposition that entails another, you have to think the latter – rests on a false, psychologizing conception. All that we need be concerned with is what is contained in signs and (their) rules.

If the criterion for p following from q consists in “having p in mind when thinking q ”, then when you’re thinking the proposition “There are 10^5 grains of sand in this box”, are you really thinking the 10^5 propositions: “There is *one* grain of sand in this box”, “. . . 2 grains of sand . . .”, etc., etc.? Then what *is* the criterion for “having in mind”, anyway!

And how about this proposition: “A spot (F) is situated between the limits AA”?⁴ Doesn’t it follow from this proposition that F is also between BB and CC, etc.? Do infinitely many propositions follow from *one*? And is this one thus infinitely suggestive? – Every proposition of the kind “A spot is situated between the boundaries BB” that I write down – and just as many as I write down – follows from the proposition “A spot is situated between the limits AA”. Just as from p there follow as many propositions of the form $p \vee \xi$ as I write down (or utter, etc.). (An inductive proof proves as many propositions of the form . . . as I write down.)



2 (F): MS 109, p. 10.

4 (F): MS 113, p. 132r.

3 (V): that this proposition follows from that

Der Fall: unendlich viele Sätze folgen aus einem.

Ist es unmöglich, daß aus einem Satz unendlich viele Sätze folgen, – in dem Sinn nämlich, daß nach einer Regel immer neue Sätze aus dem einen gebildet werden könnten,¹ ad infinitum?

Angenommen, die ersten tausend Sätze dieser Reihe schrieben wir in Konjunktion an. Mußte der Sinn dieses Produktes dem Sinne des ursprünglichen Satzes nicht näherkommen, als das Produkt der ersten hundert Sätze? Müßte man nicht eine immer bessere Annäherung an den ersten Satz bekommen, je mehr man das Produkt ausdehnte und würde das nicht zeigen, daß aus dem Satz nicht unendlich viele andere folgen können, da ich schon nicht mehr im Stande bin, das Produkt aus 10^{10} Gliedern zu verstehen und doch den Satz verstanden habe, dem das Produkt aus 10^{100} Gliedern noch näher kommt als das von 10^{10} Gliedern?

Man denkt sich wohl, der allgemeine Satz ist eine abgekürzte Ausdrucksweise des Produktes. Aber was ist am Produkt abzukürzen, es enthält ja nichts Überflüssiges.

Wenn man ein Beispiel braucht dafür, daß unendlich viele Sätze aus *einem* folgen, so wäre vielleicht das Einfachste das, daß aus „a ist rot“ die Negation aller Sätze folgt, die a eine andere Farbe zuschreiben. Diese² negativen Sätze werden gewiß in dem einen nicht mitgedacht. Man könnte natürlich sagen: wir unterscheiden doch nicht unendlich viele Farbtöne; aber die Frage ist: hat die Anzahl der Farbtöne, die wir unterscheiden, überhaupt etwas mit der Komplikation jenes ersten Satzes zu tun; ist er mehr oder weniger komplex, je nachdem wir mehr oder weniger Farbtöne unterscheiden?

Müßte man nun nicht so sagen: Ein Satz folgt erst aus ihm, wenn er da ist. Erst wenn wir zehn Sätze gebildet haben, die aus dem ersten folgen, folgen zehn Sätze aus ihm.

Ich möchte sagen, ein Satz folgt erst dann aus dem anderen, wenn er mit ihm konfrontiert wird. Jenes „u.s.w. ad infinitum“ bezieht sich nur auf die Möglichkeit der Bildung von Sätzen, die aus dem ersten folgen, ergibt aber keine Zahl solcher Sätze.

Könnte ich also einfach sagen: Unendlich viele Sätze folgen *darum* nicht aus einem Satz, weil es unmöglich ist, unendlich viele Sätze hinzuschreiben (d.h. ein Unsinn ist, das zu sagen).

1 (V): können,

2 (V): Diese ~~Negation~~

The Case of Infinitely Many Propositions Following from a Single One.

Is it impossible that infinitely many propositions should follow from a single one – i.e. to the extent that we could use a rule to produce ever new propositions *ad infinitum* from the one?

Let's assume that we wrote down the first thousand propositions of this progression as a conjunction. Wouldn't the sense of this conjunct necessarily approximate the sense of the original proposition more closely than the conjunct of the first hundred propositions? Wouldn't one necessarily arrive at an ever better approximation to the first proposition the more one expanded the conjunct? And wouldn't that show that infinitely many other propositions can *not* follow from the original one, since I'm incapable of understanding the conjunct made up of 10^{10} members, whereas I understood the proposition to which the conjunct made up of 10^{100} members is a closer approximation than that made up of 10^{10} members?

One tends to think that the universal proposition is an abbreviated expression of the conjunct. But what is there to abbreviate in the conjunct? It doesn't contain anything superfluous, after all.

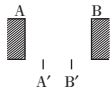
If one needs an example of infinitely many propositions following from *one*, the simplest might be that from "a is red" there follows the negation of all propositions that ascribe a different colour to a. These¹ negative propositions certainly are not mentally included in the one. Of course it might be said: But we don't differentiate between infinitely many shades of colour. But the question is: Does the number of shades of colour that we do distinguish have anything at all to do with the complexity of that first proposition; is it more or less complex, depending on whether we distinguish more or fewer shades of colour?

So wouldn't one have to put it like this: A proposition doesn't follow from it until it exists. It's only when we have formed ten propositions that follow from the first one, that ten propositions follow from it.

I'm inclined to say that one proposition doesn't follow from another until it is confronted with it. That "etc. *ad infinitum*" only refers to the possibility of forming propositions that follow from the original; but it doesn't produce a specific number of such propositions.

So could I simply say: The *reason* infinitely many propositions don't follow from a single proposition is that it is impossible to write down infinitely many propositions (i.e. that it is nonsense to say that)?

1 (V): These ~~negation~~



³Wie verhält es sich nun mit dem Satz: „die Fläche ist von A bis B weiß“? Aus ihm folgt doch, daß sie auch von A' bis B' weiß ist. Es braucht sich da nicht um gesehenes Weiß zu handeln; und der Schluß von dem ersten Satz auf den zweiten wird jedenfalls immer wieder ausgeführt. Es sagt mir Einer „ich habe die Fläche von A bis B damit bestrichen“ und ich sage darauf „also ist sie jedenfalls von A' bis B' gestrichen“.




Man müßte a priori sagen können, daß $F(A'B')$ aus $F(AB)$ folgen *würde*.

305 Sind die Striche A' und B' vorhanden, dann folgt allerdings jener zweite Satz aus dem ersten (dann ist die Zusammengesetztheit schon in dem ersten Satz offenbar vorhanden) dann folgen aber aus dem ersten Satz nur so viele Sätze, als seiner Zusammengesetztheit entspricht (also nie unendlich viele).



„Das Ganze ist weiß, folglich ist auch ein Teil, der durch eine solche Grenzlinie charakterisiert ist, weiß.“⁴ „Das Ganze war weiß, also *war* auch jener Teil davon weiß, auch wenn ich ihn damals nicht begrenzt darin wahrgenommen habe.“

„Eine ungeteilt gesehene Fläche hat keine Teile.“

Denken wir uns aber einen Maßstab an die Fläche angelegt, sodaß wir etwa zuerst das Bild , dann das Bild , und dann  vor uns hätten, dann folgt daraus, daß das erste Band durchaus weiß ist durchaus nicht, daß im zweiten und dritten alles mit Ausnahme der Teilstriche weiß ist.

„Wo immer, innerhalb dieses Kreises Du die Scheibe triffst, hast Du gewonnen.“

„Ich denke, Du wirst die Scheibe irgendwo innerhalb dieses Kreises treffen.“

Was den ersten Satz betrifft, könnte man fragen: woher weißt Du das? Hast Du *alle* möglichen Orte ausprobiert? Und die Antwort müßte dann lauten: das ist ja kein Satz, sondern eine allgemeine *Festsetzung*.

306 Der Schluß lautet auch nicht so: „wo immer auf der Scheibe der Schuß hintrifft, hast Du gewonnen. Du hast auf der Scheibe *dahin* getroffen, also hast Du den Preis gewonnen“. Denn wo ist dieses *da*? wie ist es außer dem Schuß bezeichnet, etwa durch einen Kreis? Und war der auch schon früher auf der Scheibe? Wenn nicht, so hat die Scheibe sich ja verändert, wäre er aber schon dort gewesen, dann wäre er als eine Möglichkeit des Treffens vorgesehen worden. Es muß vielmehr heißen: „Du hast die Scheibe getroffen, also . . .“.

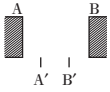
Der Ort auf der Scheibe muß nicht notwendig durch ein Zeichen, einen Kreis, auf der Scheibe angegeben sein. Denn es gibt jedenfalls die Beschreibung „näher dem Mittelpunkt“, „näher dem Rand“, „rechts oben“ etc. Wie immer die Scheibe getroffen wird, stets *muß* so eine Beschreibung möglich sein. (Aber von diesen Beschreibungen gibt es auch nicht „unendlich viele“.)

Hat es nun einen Sinn zu sagen: „aber wenn man die Scheibe trifft, muß man sie *irgendwo* treffen“? Oder auch: „wo immer er die Fläche trifft, wird es keine Überraschung sein, – so

3 (F): MS 109, S. 6.

4 (F): MS 109, S. 11.

5 (F): MS 109, S. 106.

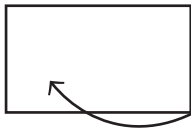


²Now what about the proposition: “The surface is white from A to B”?

It does follow from this that it is also white from A' to B'. Here the white doesn't have to be seen; and in any case, the inference from the first proposition to the second is made over and again. Someone tells me “I painted the surface from A to B” and in response I say “So it's painted at least from A' to B”.




It ought to be possible to say *a priori* that $F(A'B')$ would follow from $F(AB)$.

If the lines A' and B' exist, then that second proposition does indeed follow from the first; (then obviously there's already a complexity in the first proposition); but then only as many propositions follow from the first proposition as correspond to its complexity (that is to say, never infinitely many).



“The whole is white, therefore a part that is bounded by such a line is also white.”³ “The whole was white, therefore that part of it *was* also white, even if at the time I didn't perceive it as bounded within the whole.”

“A surface seen as undivided has no parts.”

But let's imagine a ruler laid alongside the surface so that, say, at first we have before us the picture , then the picture , and then .⁴ Then in no way does it follow from the first strip's being completely white that everything except the dividing lines is white in the second and third strips.

“No matter where you hit the target within this circle, you've won.”

“I think you'll hit the target somewhere within this circle.”

Concerning the first proposition, one could ask: How do you know this? Did you try out *all* possible places? And then the answer would have to be: That isn't a proposition at all, but a general *stipulation*.

And neither does the inference go like this: “Wherever the shot lands on the target, you have won. You hit the target *here*, so you have won the prize”. For where is this *here*? How is it designated other than by the shot – perhaps by a circle? And was that already on the target beforehand? If not, then the target has changed, but if so, it would have been foreseen as a possible place to hit. Rather, we must say: “You've hit the target, so . . .”.

The place on the target doesn't necessarily have to be marked by a sign, say a circle, on the target. For at any rate there are descriptions like “closer to the centre”, “closer to the edge”, “on the upper right”, etc. However the target is hit, some such description *must* always be possible. (But neither are there “infinitely many” such descriptions.)

Now does it make sense to say: “But if one hits the target, one has to hit it *somewhere*”? Or: “Wherever he hits the surface, it won't be a surprise – causing me to say, for instance,

2 (F): MS 109, p. 6.

4 (F): MS 109, p. 106.

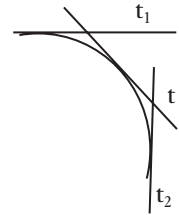
3 (F): MS 109, p. 11.

daß man etwa sagen würde ‚das habe ich mir nicht erwartet, ich habe gar nicht gewußt, daß es diesen Ort gibt‘. Das heißt aber doch, es kann keine geometrische Überraschung sein.

Was für eine Art Satz ist: ‚Auf diesem Streifen sind alle Schattierungen von Grau zwischen Schwarz und Weiß zu sehen‘? Hier scheint es auf den ersten Blick, daß von unendlich vielen Schattierungen die Rede ist.

Ja, wir haben hier scheinbar das Paradox, daß wir zwar nur endlich viele Schattierungen von einander unterscheiden können und der Unterschied zwischen ihnen natürlich nicht ein unendlich kleiner ist, und wir dennoch einen kontinuierlichen Übergang sehen.

307 Man kann ein bestimmtes Grau ebensowenig als eines der unendlich⁶ vielen Grau zwischen Schwarz und Weiß auffassen, wie man eine Tangente t ⁷ als eine der unendlich vielen Übergangsstationen⁸ von t_1 nach t_2 auffassen kann. Wenn ich etwa ein Lineal von t_1 nach t_2 am Kreis abrollen sehe, so sehe ich – wenn es sich kontinuierlich bewegt – keine einzige der Zwischenlagen in dem Sinne, in welchem ich t sehe, wenn die Tangente ruht; oder aber ich sehe nur eine endliche Anzahl von Zwischenlagen. Wenn ich aber in so einem Fall scheinbar von einem allgemeinen Satz auf einen Spezialfall schließe, so ist die Quelle dieses allgemeinen Satzes nie die Erfahrung und der Satz wirklich kein Satz.



Wenn ich⁹ z.B. sage: ‚Ich habe das Lineal sich von t_1 nach t_2 bewegen sehen, also muß ich es auch in t gesehen haben‘, so haben wir hier keinen richtigen logischen Schluß. Wenn ich nämlich damit sagen will, das Lineal muß mir¹⁰ in der Lage t erschienen sein – wenn ich also von der Lage im Gesichtsraum rede, so folgt das aus dem Vordersatz durchaus nicht. Rede ich aber vom physischen Lineal, so ist es natürlich möglich, daß das Lineal die Lage t übersprungen hat und das Phänomen im Gesichtsraum dennoch kontinuierlich war.

6 (O): unendlichen

7 (F): MS 108, S. 108.

8 (O): Übergangsstation

9 (V): ich ~~als~~

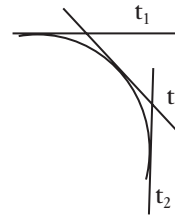
10 (O): mit

'I didn't expect that, I didn't even know that this location existed' "? But what that means is that it can't be a geometric surprise.

What sort of a proposition is: "On this strip you can see all shades of grey between black and white"? Here it seems at first glance that we're talking about infinitely many shades.

Indeed, here we're apparently confronted with the paradox that although we can only distinguish a finite number of shades from each other – and of course the difference between them is not infinitely slight – still we see a continuous transition.

It is just as impossible to conceive of a particular grey as being one of the infinite number of greys between black and white, as it is to conceive of a tangent t ⁵ as being one of the infinite number of transitional stages in going from t_1 to t_2 . If for instance I see a ruler hugging the edge of a circle as it moves from t_1 to t_2 then – if it moves continuously – I don't see a single one of the intermediate positions in the sense in which I see t , when the tangent is at rest; or else I see only a finite number of intermediate positions. But if in such a case I seem to infer a particular case from a universal proposition, then experience is never the source of this universal proposition, and the proposition isn't really a proposition.



If I⁶ say, for instance: "I saw the ruler move from t_1 to t_2 , *therefore* I must have also seen it at t ", we have no valid logical inference. For if I mean by this that the ruler must have *appeared* to me at t – if therefore I am talking about a position within my visual space – then this in no way follows from the premiss. But if I am talking about the physical ruler, then of course it's possible that the ruler skipped over position t and that nevertheless the phenomenon in my visual field was continuous.

5 (F): MS 108, p. 108.

6 (V): I ~~as~~

Kann eine Erfahrung lehren, daß dieser Satz aus jenem folgt?

Es ist nur wesentlich, daß wir (hier) nicht sagen können, wir sind durch Erfahrung daraufgekommen, daß es auch noch diesen Fall der Grammatik gibt. Denn den müßten wir in dieser statement¹ beschreiben und diese Beschreibung, obwohl ich ihre Wahrheit erst jetzt einsehe, hätte ich doch schon vor dieser Erfahrung verstehen können.

Es ist die alte Frage: inwiefern kann man jetzt von einer Erfahrung sprechen, die man jetzt nicht hat.

Was ich nicht voraussehen kann, kann ich nicht voraussehen. Und wovon ich jetzt sprechen kann, kann ich jetzt sprechen, unabhängig von dem, wovon ich jetzt *nicht* sprechen kann.

Die Logik ist eben immer komplex.

„Wie kann ich wissen, was alles folgen wird?“ – Was ich dann wissen kann, kann ich auch jetzt wissen.

Aber gibt es denn auch allgemeine Regeln der Grammatik, oder nicht nur Regeln über allgemeine Zeichen?

309 Was wäre etwa eine allgemeine und eine besondere Regel im Schachspiel (oder² einem andern)? Jede Regel ist ja allgemein.

Doch ist eine andere Art der Allgemeinheit in der Regel, daß $p \vee q$ aus p folgt, als in der, daß jeder Satz der Form $p, \sim p, \dots$ aus $p \& q$ folgt. Ist aber nicht die Allgemeinheit der Regel für den Rösselsprung eine andere als die, einer Regel für den Anfang einer Partie?

Ist das Wort „Regel“ überhaupt vieldeutig? Und sollen wir also nicht von Regeln im Allgemeinen reden, wie auch nicht von Sprachen im Allgemeinen? Sondern nur von Regeln in besonderen Fällen.

„Wenn aus $F_1(a)$ (a hat die Farbe F_1) folgt $\sim F_2(a)$, so mußte in der Grammatik des ersten Satzes auch schon die Möglichkeit des zweiten vorausgesehen sein (wie könnten wir auch sonst F_1 und F_2 Farben nennen).“

„Wenn der zweite Satz dem ersten, sozusagen, unerwartet gekommen wäre, so könnte er nie aus ihm folgen.“

„Der erste Satz muß den anderen als seine Folge anerkennen. Oder vielmehr es muß dann beide *eine* Grammatik vereinigen und diese muß dieselbe sein, wie vor dem Schluß.“

(Es ist sehr schwer, hier keine Märchen von den Vorgängen im Symbolismus zu erzählen, wie an anderer Stelle keine Märchen über die psychologischen Vorgänge. Denn alles ist ja einfach und allbekannt (und nichts neues zu erfinden). Das ist ja eigentlich das Unerhörte

1 (V): Aussage

2 (V): Schachspiel &

Can an Experience teach us that one Proposition Follows from Another?

The only essential point is that we cannot say (here) that experience led us to discover that an additional grammatical fact existed. For in making this statement we would have to describe this fact, and surely I could have understood this description before having this experience, even though it is only now that I realize that the description is true.

It's the old question: To what extent can one now talk about an experience that one isn't now having?

What I cannot foresee, I cannot foresee. And what I can speak of now, I can speak of now, independently of what I *cannot* speak of now.

Logic is just complex, always.

"How can I know everything that will follow?" – What I can know then, I can also know now.

But are there general rules of grammar too, or only rules for general signs?

For instance, what might be a general versus a particular rule in chess (or¹ some other game)? After all, every rule is general.

Still, the generality in the rule that $p \vee q$ follows from p is of a different kind from the generality in the rule that every proposition of the form $p, \sim p, \dots$, follows from $p \& q$. But isn't the generality of the rule for moving a knight different from that of the rule for beginning a game?

Is the word "rule" ambiguous from the outset? And should we therefore not talk about rules in general – as we also shouldn't talk about languages in general – but only about rules in particular cases?

"If $\sim F_2(a)$ follows from $F_1(a)$ (a has the colour F_1), then the possibility of the former proposition had to have been foreseen in the grammar of the latter (otherwise, how could we call F_1 and F_2 colours?)."

"If that first proposition had come as a surprise to the second, so to speak, it could never follow from it."

"That second proposition must acknowledge the first as its consequence. Or rather, a *single* grammar must unite them both, and it must be the same as it was before the inference."

(Here it is very difficult not to tell fairy tales about symbolic processes, as elsewhere about psychological processes. For in fact everything is simple and known to everyone (and there

1 (V): chess &

an der Logik, daß ihre außerordentliche Schwierigkeit darauf beruht, daß nichts zu konstruieren, sondern alles schon da und bekannt ist.)

„Welchen Satz p nicht als seine Folge erkennt, der ist nicht seine Folge.“

- 310 Aus der Grammatik des Satzes – und aus ihr allein, muß es hervorgehen, ob ein Satz aus ihm folgt. Keine Einsicht in einen neuen Sinn kann das ergeben; – sondern nur die Einsicht in den alten Sinn. – Es ist nicht möglich, einen neuen Satz zu bilden, der aus jenem folgt, den man nicht hätte bilden können (wenn auch ohne zu wissen, ob er wahr oder falsch ist) als jener gebildet wurde. Entdeckte man einen neuen Sinn und folgte³ dieser aus dem⁴ ersten Satz, so hätte dieser Satz damit⁵ seinen Sinn geändert.

3 (O): folge

4 (V): jenem

5 (O): Satz dann nicht
109, S. 16 geändert.

(E): Auf Grund von MS

is nothing new to invent). Indeed the really incredible thing about logic is that its extraordinary difficulty resides in the fact that nothing can be constructed, but that everything is already present and well-known.)

“Any proposition that p does not recognize as following from it does not follow from it.”

Whether one proposition follows from another must emerge from the grammar of the latter – and from that grammar alone. This cannot be the result of an insight into a new sense – only of an insight into the old sense. – It is not possible to form a new proposition that follows from the first, a proposition that couldn't have been formed when the first was formed (without knowing at that time whether it was true or false). If one were to discover a new sense, and if it followed from the² first proposition, then that first proposition would thereby have³ changed its sense.

2 (V): from that

3 (O): would not then have (E): We have made this change on the basis of the corresponding passage in MS 109 (p. 16).

Allgemeinheit.

Generality.

312 Der Satz „Der Kreis befindet sich im Quadrat“ in gewissem Sinne unabhängig von der Angabe einer bestimmten Lage (er hat, in gewissem Sinne, nichts mit ihr zu tun).

Ich möchte sagen: das allgemeine Bild $|o|$ hat eine andre Metrik als das besondere.

Im allgemeinen Zeichen „ $|o|$ “ spielen die Distanzen so wenig eine Rolle wie im Zeichen „ aRb “.

Wie man die Zeichnung $|o|$ als eine Darstellung des „allgemeinen Falls“ ansehen kann. Quasi nicht im Maßraum, sondern so, daß die Distanzen des Kreises von den Geraden garnichts ausmachen. Man sieht dann das Bild als Fall eines anderen Systems, wie wenn man es als Darstellung einer besonderen Lage des Kreises zwischen den Geraden sieht. Oder richtiger: Es ist dann Bestandteil¹ eines andren Kalküls. Von der Variablen gelten eben andre Regeln, als von ihrem besonderen Wert.

313 „Wie² weißt Du, daß er im Zimmer ist?“ – „Weil ich ihn hineingesteckt habe und er nirgends heraus kann.“ – So ist also Dein Wissen der allgemeinen Tatsache, daß er irgendwo im Zimmer ist, auch von der Multiplizität dieses Grundes.

Nehmen wir die besonderen Fälle des allgemeinen Sachverhalts, daß das Kreuz sich zwischen den Grenzstrichen befindet:



Jeder dieser Fälle z.B. hat seine³ besondere Individualität. Tritt diese Individualität irgendwie in den Sinn des allgemeinen Satzes ein? Offenbar nicht.

Es scheint uns aber das „zwischen den Strecken, oder Wänden, Liegen“ etwas Einfaches, wovon die verschiedenen Lagen (ob die Gesichterscheinungen, oder die durch Messen festgestellten Lagen) ganz unabhängig sind.

D.h., wenn wir von den einzelnen (gesehenen) Lagen reden, so scheinen wir von etwas ganz Anderem zu reden, als von dem, wovon im allgemeinen Satz die Rede ist.

1 (O): Bestandteils

2 (V): „Woher

3 (V): eine

In a Certain Sense the Proposition “The Circle is in the Square” is Independent of the Indication of a Particular Position (in a Certain Sense it has Nothing to do with It).

I'd like to say: the general picture $|o|$ has a different metric from a particular one.

In the general sign “ $|o|$ ” distances play no more a role than they do in the sign “ aRb ”.

Just as one can view the drawing $|o|$ as representing the “general case”. Not within the measured space, as it were, but in such a way that the distances of the circle from the straight lines make no difference at all. Taken that way, one sees the picture as belonging to a different system than when one sees it as representing a particular position of the circle between the straight lines. Or, more correctly: Taken that way, it is a part of a different calculus. The rules that apply to a variable are simply different from those that apply to its particular value.

“How¹ do you know that he is in the room?” – “Because I put him in there and there is no way for him to get out.” – So your knowledge of the general fact that he is somewhere in the room has the same multiplicity as this reason.

Let's take some particular cases of the general state of affairs in which the cross is to be found between the end-lines:



Each of these cases, for instance, has its own² particular individuality. Does this individuality somehow enter into the sense of the general proposition? Obviously not.

But it seems to us that “lying between the line segments, or walls” is something simple, of which the various positions are completely independent (whether they are visual appearances or are ascertained by measurement).

That is, when we're talking about the individual positions (that we've seen), we seem to be talking about something entirely different from what is talked about in the general proposition.

1 (V): “Whence

2 (V): has a

Es ist ein anderer Kalkül, zu dem unsere Allgemeinheitsbezeichnung gehört und ein anderer, in dem es jene Disjunktion gibt. Wenn wir sagen, das Kreuz liegt zwischen diesen Strichen, so haben wir keine Disjunktion bereit, die den Platz dieses⁴ allgemeinen Satzes nehmen könnte.

314 Wenn man die allgemeinen Sätze von der Art „der Kreis befindet sich im Quadrat“ betrachtet, so kommt es einem immer wieder so vor, als sei die Angabe der Lage im Quadrat *nicht eine nähere Bestimmung* zur Angabe, der Kreis liege *im Quadrat* (wenigstens nicht, soweit der Gesichtsraum⁵ in Betracht kommt), als sei vielmehr das „im Quadrat“ eine komplette Bestimmung, die an sich nicht mehr näher zu beschreiben sei. So wie eine Angabe der Farbe die Angabe der Härte eines Materials nicht näher bestimmt. – So ist nun das Verhältnis der Angaben über den Kreis natürlich nicht, und doch hat das Gefühl einen Grund.

In den grammatischen Regeln für die Termini des allgemeinen Satzes muß es liegen, welche Mannigfaltigkeit er für mögliche Spezialfälle vorausieht.⁶ Was in den Regeln nicht liegt, ist nicht vorhergesehen.



⁷Alle diese Verteilungen könnten verschiedene Zerrbilder desselben Sachverhalts sein. (Man denke sich die beiden weißen Streifen und den schwarzen Streifen in der Mitte dehnbar.)

Ist denn in (x).fx von a die Rede, da fa aus (x).fx folgt? In dem Sinne des allgemeinen Satzes, dessen Verifikation in einer Aufzählung besteht, ja.

315 Wenn ich sage „in dem Quadrat ist ein schwarzer Kreis“ so ist es mir immer, als habe ich hier wieder etwas Einfaches vor mir. Als müsse ich nicht an verschiedene mögliche Lagen⁸ oder Größen des Kreises denken. Und doch kann man sagen: wenn ein Kreis in dem Quadrat ist, so muß er irgendwo und von irgend einer Größe sein. Nun kann aber doch auf keinen Fall davon die Rede sein, daß ich mir *alle* möglichen Lagen und Größen zum voraus denke. – In dem ersten Satz scheine ich sie vielmehr, sozusagen, durch ein Sieb zu fassen, sodaß „Kreis innerhalb des Quadrats“ *einem* Eindruck zu entsprechen scheint, für den das *Wo* etc. überhaupt noch nicht in Betracht kommt, als sei es (gegen allen Anschein) etwas, was mit jenem ersten Sachverhalt nur physikalisch, nicht logisch verbunden sei.

Der Ausdruck „Sieb“ kommt daher: wenn ich etwa eine Landschaft ansehe, durch ein Glas, das nur die Unterschiede von Dunkelheit und Helligkeit durchläßt, nicht aber die Farbunterschiede, so kann man so ein Glas ein Sieb nennen. Denkt man sich nun das Quadrat durch ein Glas betrachtet, das nur den Unterschied „Kreis im Quadrat, oder nicht im Quadrat“ durchließe, nicht aber einen Unterschied der Lage oder Größe des Kreises, so könnten wir auch hier von einem Sieb sprechen.

Ich möchte sagen, in dem Satz „ein Kreis liegt im Quadrat“ ist von der besonderen Lage überhaupt nicht die Rede. Ich sehe dann in dem Bild nicht die Lage, ich sehe von ihr ab. So als wären etwa die Abstände von den Quadratseiten dehnbar und als gälten ihre Längen nicht.

Ja, kann denn nicht der Fleck sich wirklich im Viereck bewegen? Ist das nicht nur ein spezieller Fall von *dem*, im Viereck zu sein? Dann wäre es also doch nicht so, daß der Fleck an einer bestimmten Stelle im Viereck liegen muß, wenn er überhaupt darin ist.

4 (V): des

5 (V): Gesichtsform

6 (V): vorsieht.

7 (F): MS 109, S. 5.

8 (V): Stellungen

There is one calculus to which our designation of generality belongs, and another one in which disjunction exists. If we say that the cross is situated between the lines, we don’t have any disjunction ready that could take the place of this³ general proposition.

If one looks at general propositions of the kind “the circle is in the square”, it seems time and again as if giving its position within the square is *not a more precise specification* of the statement that the circle is situated *in the square* (at least not so far as visual space⁴ is concerned). As if, rather, “in the square” were a complete determination that inherently couldn’t be described any more accurately. Just as the specification of a material’s colour doesn’t more accurately determine the specification of its hardness. – Of course that isn’t the same relationship as between the statements about the circle, and yet this feeling is not groundless.

The multiplicity a general proposition anticipates⁵ for its possible particular cases has to be located in the grammatical rules for its terms. What isn’t located in these rules isn’t anticipated.



⁶All these spatial distributions could be different distortions of the same state of affairs. (Imagine that in each row the two white areas and the black area in the middle were elastic.)

Is a mentioned in (x).fx, since fa follows from (x).fx? Yes, in the sense of a general proposition whose verification consists in an enumeration.

If I say “There is a black circle in the square” then it always seems to me that here again I am looking at something simple. As if I didn’t have to think of different possible positions⁷ or sizes of the circle. And yet one can say: If a circle is situated within a square, then it has to be somewhere and of some size. But surely it’s entirely out of the question for me to think in advance of *all* possible positions and sizes. – Rather, in the first proposition I seem to be apprehending them through a sieve, as it were, so that “circle in a square” seems to correspond to *one* impression, for which the “*where*”, etc. doesn’t enter into the picture. As if (contrary to all appearances) it were something connected to that first *state of affairs* only physically, and not logically.

The basis for the expression “sieve” is this: If I look at, say, a landscape through a lens that lets through only differences in darkness and light, but not differences of colour, then one can call such a lens a sieve. Now let’s imagine the square viewed through a lens that would only let through the difference between “circle in the square or not in the square”, but not any difference in positions or sizes of the circle. Then here too we might speak of a sieve.

I’d like to say that in the proposition “A circle is situated within a square” the circle’s particular position isn’t addressed at all. I don’t see the position in the picture – I disregard it. As if the distances from the sides of the square were elastic and their lengths didn’t count.

Indeed, can’t the spot actually be moving within the square? Isn’t that just a special case of being within the square? In that case it wouldn’t even be necessary for the spot to be situated at a particular place within the square, in so far as it’s in it at all.



3 (V): the

4 (V): visual ~~form~~

5 (V): provides

6 (F): MS 109, p. 5.

7 (V): places

Ich will sagen, daß es eine Beziehung des Flecks zum Rand zu geben scheint, die unabhängig von dem Abstand ist. – Gleichsam als bediente ich mich einer Geometrie, in der es keinen Abstand gibt, wohl aber ein Innen und Außen. So gesehen, sind allerdings auch die Bilder  und  gleich.

Der Satz „der Fleck ist im Quadrat“ hält gleichsam *selbst* den Fleck bloß im Quadrat, das heißt, er beschränkt die Freiheit des Flecks nur auf diese Weise und gibt ihm in dem Quadrat volle Freiheit. Der Satz bildet dann einen Rahmen, der die Freiheit des Flecks beschränkt und ihn innerhalb frei läßt, das heißt, mit seiner Lage *nichts zu schaffen hat*. – Dazu muß aber der Satz (gleichsam eine Kiste, in der der Fleck eingesperrt ist) die logische Natur dieses Rahmens haben und das hat er, denn ich könnte jemandem den Satz erklären und dann jene Möglichkeiten auseinandersetzen und zwar unabhängig davon, ob ein solcher Satz wahr ist oder nicht, also unabhängig von einer Tatsache.

„Wo immer der Fleck im Viereck ist . . .“ heißt „solange er¹⁰ im Viereck ist . . .“ und hier ist nur die Freiheit (Ungebundenheit) im Viereck gemeint, aber keine Menge von Lagen.



Es besteht freilich eine logische Ähnlichkeit (formelle Analogie) zwischen dieser Freiheit und der Gesamtheit von Möglichkeiten, daher gebraucht man oft in beiden Fällen dieselben Wörter („alle“, „jeder“, etc.).

„Alle Helligkeitsgrade unter diesem tun meinen Augen weh.“ Prüfe die Art der Allgemeinheit.

„Alle Punkte dieser Fläche sind weiß“. Wie verifizierst Du das? – dann werde ich wissen, was es heißt.

9 (F): MS 109, S. 113.

10 (V): heißt „wenn er

I want to say that there seems to be a relationship of the spot to the edge that is independent of distance. – As if, so to speak, I were using a geometry in which distance didn’t exist, but “inside” and “outside” did. Seen this way the pictures  and ⁸ are the same.

By itself the proposition “The spot is in the square” only keeps the spot in the square, as it were, i.e. it limits the freedom of the spot only in this way, but grants it full freedom within the square. In that case the proposition constitutes a frame that limits the freedom of the spot, and leaves it free within, i.e. it *has nothing to do* with its position. – But for this to be so the proposition (a pen, as it were, in which the spot is locked up) must have the same logical nature as this frame. And so it does, for I could explain the proposition to someone and then expound on those possibilities, and do this independently of whether such a proposition is true or not, i.e. independently of a fact.

“Wherever the spot is in the square” means “So long as it is⁹ within the square” and all that is meant here is the freedom (lack of restraint) within the square, not a set of positions.

There is, to be sure, a logical similarity (*formal analogy*) between this freedom and the totality of possibilities; thus one often uses the same words in both cases (“all”, “every”, etc.).

“All degrees of brightness less than this hurt my eyes.” Look closely at this kind of generality.

“All points on this surface are white.” How do you verify that? – then I’ll know what it means.

8 (F): MS 109, p. 113.

9 (V): means “If it is

Der Satz „Der Kreis liegt im Quadrat“ keine Disjunktion von Fällen.

Wenn ich sage, der Fleck liegt im Quadrat, so weiß ich – und muß wissen – daß es verschiedene mögliche Lagen für ihn gibt. Aber auch, daß ich nicht eine bestimmte Zahl aller solcher Lagen nennen könnte. Ich weiß von vornherein nicht, wieviele Lagen „ich unterscheiden könnte“. – Und ein Versuch darüber lehrt mich auch nicht das, was ich hier wissen will.

Das Dunkel, welches über den Möglichkeiten der Lage etc. herrscht, ist die gegenwärtige logische Situation. So wie trübe Beleuchtung auch eine bestimmte Beleuchtung ist.

Es ist da immer so, als könnte man eine logische Form nicht ganz übersehen, da man nicht weiß, wieviel, oder welche möglichen¹ Lagen es für den Fleck im Viereck gibt. Andererseits weiß man es doch, denn man ist von keiner überrascht, wenn sie auftritt.

318 Es ist natürlich nicht „Stellung des Kreises in diesem Quadrat“ ein Begriff, und die besondere Stellung ein Gegenstand, der unter ihn fällt. So daß Gegenstände gefunden würden, von denen man sich überzeugt, daß sie (auch) Stellungen des Kreises im Quadrat sind, von denen man aber früher nichts gewußt hat.

Die Mittelstellung des Kreises und andere ausgezeichnete Stellungen sind übrigens ganz analog den primären Farben in der Farbenskala. (Dieses Gleichnis könnte man mit Vorteil fortsetzen.)

Der Raum ist sozusagen *eine* Möglichkeit. Er besteht nicht aus mehreren Möglichkeiten.

Wenn ich also höre, das Buch liegt – irgendwo – auf dem Tisch, und finde es nun in einer bestimmten Stellung, so kann ich nicht überrascht sein und sagen „ah, ich habe nicht gewußt, daß es diese Stellung gibt“ und doch hatte ich diese besondere Stellung nicht vorhergesehen, d.h., als besondere Möglichkeit vorher ins Auge gefaßt. Was mich überrascht, ist eine physische Möglichkeit, nicht eine logische!

Was ist aber der Unterschied zwischen dem Fall „das Buch liegt irgendwo auf dem Tisch“ und *dem* „das Ereignis wird irgendeinmal in Zukunft eintreten“? Offenbar der, daß wir im einen Fall eine sichere Methode kennen zu verifizieren, ob das Buch auf dem Tisch liegt, im anderen Fall eine analoge Methode nicht existiert. Wenn etwa ein bestimmtes Ereignis bei einer der unendlich vielen Bisektionen einer Strecke eintreten sollte, oder besser: wenn es eintreten sollte, wenn wir die Strecke in *einem* Punkt (ohne nähere Bestimmung)

1 (O): mögliche

The Proposition “The Circle is in the Square” not a Disjunction of Cases.

If I say the spot is in the square, I know – and must know – that there are various possible positions for it. But I also know that I couldn’t give a definite number for all such positions. At the outset I don’t know how many positions “I could distinguish”. – And neither does trying to do so teach me what I want to know here.

The darkness reigning over the possible positions, etc. is the present logical situation. Just as dim lighting is nevertheless a particular kind of lighting.

Here it always seems as if we can’t quite get an overview of a logical form, since we don’t know how many or what possible positions there are for the spot in the square. But on the other hand we do know this, for we aren’t surprised by any of them when they occur.

Of course, “position of the circle in this square” is not a concept, and the particular position isn’t an object that falls within its scope. It’s not that objects could be found that would convince you they were (also) positions of the circle within the square, but of which you didn’t know anything beforehand.

Incidentally, the central position of the circle and other special positions are completely analogous to the primary colours on the colour scale. (This simile could be profitably pursued.)

Space is *one* possibility, as it were. It doesn’t consist of several possibilities.

So if I hear that the book is lying – somewhere – on the table and now I find it in a particular position, then I can’t be surprised and say “Ah, I didn’t know that this position existed”; and yet I hadn’t foreseen this particular position, i.e. hadn’t envisaged it in advance as a particular possibility. What surprises me is a physical possibility, not a logical one!


But what is the difference between “The book lies somewhere on the table” and *this*: “The event will occur sometime in the future”? Obviously that in the one case we have a sure method of verifying whether the book is on the table, while in the other case there is no analogous method. If, say, a particular event were supposed to occur at one of the infinitely many bisections of a line, or better yet: if it were supposed to occur when we cut the line at

schneiden und an diesem Punkt eine Minute verweilen, so ist diese Angabe ebenso sinnlos, wie die über die unendliche Zukunft.

- 319 Angenommen, ich gäbe eine Disjunktion von so vielen Stellungen an, daß es mir unmöglich wäre, eine Stellung von allen angegebenen als verschieden zu sehen;² wäre *nun* die Disjunktion der allgemeine Satz $(\exists x).fx$? Wäre es nicht sozusagen Pedanterie, die Disjunktion noch immer nicht als den allgemeinen Satz anzuerkennen? Oder besteht ein wesentlicher Unterschied, und ist die Disjunktion vielleicht dem allgemeinen Satz gar nicht ähnlich?

Das, was uns auffällt, ist, daß der eine Satz so kompliziert, der andere so einfach ist. Oder ist der einfache nur eine kurze Schreibweise des komplizierteren?

Was ist denn das Kriterium dafür (für den allgemeinen Satz), daß der Kreis im Quadrat ist? Entweder überhaupt nichts, was mit einer Mehrheit von Lagen (bezw. Größen) zu tun hat, oder aber etwas, was mit einer endlichen Anzahl solcher Lagen zu tun hat.

Wenn man sagt, der Fleck A ist irgendwo zwischen den Grenzen B und C, ³ist es denn nicht offenbar möglich, eine Anzahl von Stellungen des A  zwischen B und C zu beschreiben oder abzubilden, sodaß ich die Succession aller dieser Stellungen als kontinuierlichen Übergang sehe? Und ist dann nicht die Disjunktion aller dieser N Stellungen eben der Satz, daß sich A irgendwo zwischen B und C befindet?

Aber wie verhält es sich mit diesen N Bildern? Es ist klar, daß ein Bild und das unmittelbar folgende visuell nicht unterscheidbar sein dürfen, sonst ist der Übergang visuell diskontinuierlich.

Die Stellungen, deren Succession ich als kontinuierlichen Übergang sehe, sind Stellungen nicht im Gesichtsraum.

- 320 Wie ist der Umfang des Begriffs „Dazwischenliegen“ bestimmt? Denn es soll doch im Vorhinein festgelegt werden, welche Möglichkeiten zu diesem Begriff gehören. Es kann, wie ich sage, keine Überraschung sein, daß ich auch *das* „dazwischenliegen“ nenne. Oder: wie können die Regeln für das Wort „dazwischenliegen“ angegeben werden, da ich doch nicht die Fälle des Dazwischenliegens aufzählen kann? Natürlich muß gerade das für die Bedeutung dieses Worts charakteristisch sein.

Wir würden das Wort ja auch nicht durch Hinweisen auf *alle besonderen Fälle* jemandem zu erklären suchen, sondern⁴ indem wir auf einen solchen Fall (oder einige) zeigen und in irgendeiner Weise andeuteten, daß es auf den besonderen Fall nicht ankomme.

Das Aufzählen von Lagen ist nicht nur nicht nötig, sondern es kann hier wesentlich von so einem Aufzählen keine Rede sein.

Zu sagen „der Kreis liegt entweder zwischen den beiden Geraden oder *hier*“ (wo das⁵ „hier“ ein Ort zwischen den Geraden ist) heißt offenbar nur: „der Kreis liegt zwischen den beiden Geraden“, und der Zusatz „oder hier“ ist⁶ überflüssig. Man wird sagen: in dem „irgendwo“ ist das „hier“ schon mitinbegriffen. Das ist aber merkwürdig, weil es nicht (darin) genannt ist.

2 (V): erkennen;

3 (F): MS 108, S. 134.

4 (V): suchen, aber wohl,

5 (V): dieses

6 (V): erscheint

a *certain* point (without further specification) and then wait at this point for one minute, then this statement is just as senseless as the one about the infinite future.

Let’s assume that I were to state a disjunction of so many positions that it would be impossible for me to see¹ any one position as different from all the rest; would that disjunction *now* be the general proposition $(\exists x).fx$? Wouldn’t it be pedantry, as it were, not to acknowledge this disjunction as the general proposition? Or is there an essential difference, and is the disjunction perhaps not even similar to the general proposition?

What strikes us is that the one proposition is so complicated and the other so simple. Or is the simple one just a short way of writing the more complicated one?

What then is the criterion (for the general proposition) that the circle is in the square? Either nothing that pertains to a majority of positions (or sizes), or something pertaining to a finite number of such positions.

If it’s said that patch A lies somewhere between the borders B and C, $B \parallel \boxed{A} \parallel C$ ² isn’t it obviously possible to describe or portray a number of positions of A between B and C so that I see the succession of all these positions as a continuous transition? And in that case isn’t the disjunction of all of these N positions precisely the proposition that A lies somewhere between B and C?

But what about these N pictures? It’s clear that a picture and its immediate successor must not be visually distinguishable; otherwise the transition will be visually discontinuous.

The positions whose succession I see as a continuous transition are positions that are not in visual space.

How is the scope of the concept “lying between” determined? For after all, the possibilities that belong to this concept are supposed to be determined from the very start. It cannot come as a surprise, as I like to say, that I also call *this* “lying between”. Or: How can the rules for the words “lie between” be given, since there is no way I can enumerate the cases of lying between? Of course it is precisely this that must characterize the meaning of these words.

We wouldn’t try to explain the expression to someone by pointing to *all particular instances*. Rather, we’d³ try to explain it by pointing to one such case (or several) and indicating in some way that that particular case wasn’t the point.

Enumerating positions is not only unnecessary, but such an enumeration is by its very nature out of the question here.

Saying “The circle lies either between the two straight lines, or *here*” (where “here”⁴ is a location between the straight lines) obviously means nothing more than: “The circle lies between the two straight lines”, and the addendum “or here” is⁵ superfluous. It will be said: The “here” is already included in the “somewhere”. But that’s remarkable, because it isn’t mentioned (in it).

1 (V): recognize

2 (F): MS 108, p. 134.

3 (V): *instances*, but we would

4 (V): where this “here”

5 (V): appears

Eine bestimmte Schwierigkeit besteht wenn die Zeichen⁷ das nicht zu sagen scheinen, was der Gedanke erfaßt, oder: wenn die Worte das nicht sagen, was der Gedanke zu erfassen scheint.

321 So, wenn wir sagen „dieser Satz gilt von allen Zahlen“ und glauben in dem Gedanken alle Zahlen wie die Äpfel in einer Kiste aufgefaßt⁸ zu haben.

Nun könnte man aber fragen: Wie kann ich (nun) im Voraus wissen, aus welchen Sätzen dieser allgemeine Satz folgt? Wenn ich diese Sätze nicht angeben kann.

Kann man aber sagen: „man kann nicht sagen, aus welchen Sätzen dieser Satz folgt“? Das klingt so wie: man weiß es nicht. Aber so ist es natürlich nicht. Und ich kann ja Sätze sagen, und im Vorhinein sagen, aus denen er folgt. – „Nur nicht *alle*“. – Aber das heißt ja eben nichts.

Es ist eben nur der allgemeine Satz und besondere Sätze (nicht die besonderen Sätze). Aber der allgemeine Satz zählt besondere Sätze nicht auf. Aber was charakterisiert ihn denn dann als⁹ allgemein, und was zeigt, daß er nicht einfach *die*¹⁰ besonderen Sätze umschließt, von denen wir in diesem bestimmten Falle sprechen?

Er kann nicht durch seine Spezialfälle charakterisiert werden; denn wieviele man auch aufzählt, so könnte er immer mit dem Produkt der angeführten Spezialfälle¹¹ verwechselt werden. Seine Allgemeinheit liegt also in einer Eigenschaft (grammatischen Eigenschaft) der Variablen.

7 (V): besteht darin, daß die Worte

8 (V): gefaßt

9 (V): denn als

10 (V): diejenigen

11 (V): Fälle

There is a particular problem when the signs don’t seem to say⁶ what the thought grasps, or: when the words don’t say what the thought seems to grasp.

For instance, when we say “This proposition is valid for all numbers”, and think that in this thought we have gathered up⁷ all numbers, like apples in a crate.

But now one could ask: How can I (now) know in advance from which propositions this general proposition follows, if I can’t specify these propositions?

But can you say: “It cannot be said from which propositions this proposition follows”? That sounds like: “We don’t know this”. But of course that isn’t how it is. And indeed I *can* utter propositions from which it follows, and utter them in advance. – “Just not *all* of them”. – But that doesn’t mean a thing.

There’s just the general proposition, and particular propositions (not *the* particular propositions). But the general proposition doesn’t enumerate particular propositions. What, then, characterizes it as general, and what shows that it doesn’t simply encompass *those* particular propositions we are speaking of in *this* particular case?

It can’t be characterized by its special cases; for however many we enumerate it could always still be confused with the product of those special cases⁸ we’ve listed. Thus, its generality lies in a property (grammatical property) of the variables.

6 (V): A particular difficulty consists in the words
not seeming to say

7 (V): grasped

8 (V): those cases

Unzulänglichkeit der Frege- und Russell'schen Allgemeinheitsbezeichnung.

Die eigentliche Schwierigkeit liegt nämlich im Begriff des „ $(\exists n)$ “ und allgemein des „ $(\exists x)$ “. Ursprünglich stammt diese Notation vom Ausdruck unsrer Wortsprache her: „es gibt ein . . . von der und der Eigenschaft“. Und was hier an Stelle der Punkte steht, ist etwa „Buch meiner Bibliothek“, oder „Ding (Körper) in diesem Zimmer“, „Wort in diesem Brief“, u.s.w. Man denkt dabei an Gegenstände, die man der Reihe nach durchgehen kann. Durch einen, so oft angewandten,¹ Prozeß der Sublimierung wurde diese Form dann zu der: „es gibt einen Gegenstand, für welchen . . .“, und hier dachte man sich ursprünglich auch die Gegenstände der Welt ganz analog den „Gegenständen“ im Zimmer (nämlich den Tischen, Stühlen, Büchern, etc.). Obwohl es ganz klar ist, daß die Grammatik dieses „ $(\exists x)$ etc.“ in vielen Fällen eine ganz andere ist, als im primitiven und als Urbild dienenden Fall. Besonders kraß wird die Diskrepanz zwischen dem ursprünglichen Bild und dem, worauf die Notation nun angewendet wird,² wenn ein Satz „in diesem Viereck sind nur zwei Kreise“ wiedergegeben wird in der³ Form „es gibt keinen Gegenstand, der die Eigenschaft hat, ein Kreis in diesem Viereck, aber weder der Kreis a noch der Kreis b zu sein“, oder „es gibt nicht drei Gegenstände, die die Eigenschaft haben, ein Kreis in diesem Viereck zu sein“. Der Satz „es gibt nur zwei Dinge, die Kreise in diesem Viereck sind“ (analog gebildet dem Satz „es gibt nur zwei Menschen, die diesen Berg erstiegen haben“) klingt verrückt; und mit Recht. D.h., es ist nichts damit gewonnen, daß wir den Satz „in diesem Viereck sind zwei Kreise“ in jene Form pressen; vielmehr hilft uns das nur zu übersehen, daß wir die Grammatik dieses Satzes nicht klargestellt haben. Zugleich aber gibt hier die Russell'sche Notation einen Schein von Exaktheit, der Manchen glauben macht, die Probleme seien dadurch gelöst, daß man den Satz auf die Russell'sche Form gebracht hat. (Es ist das ebenso gefährlich, wie der Gebrauch des Wortes „wahrscheinlich“, ohne weitere Untersuchung darüber, wie das Wort in diesem speziellen Fall gebraucht wird. Auch das Wort „wahrscheinlich“ ist, aus leicht verständlichen Gründen, mit einer Idee der Exaktheit verbunden.)

In allen den Fällen: „Einer der vier Füße dieses Tisches hält nicht“, „es gibt Engländer mit schwarzen Haaren“, „auf dieser Wand ist ein Fleck“, „die beiden Töpfe haben das gleiche Gewicht“, „auf beiden Seiten stehen gleichviel Wörter“ – wird in der Russell'schen Notation das „ $(\exists \dots)$. . .“ gebraucht; und jedesmal mit anderer Grammatik. Damit will ich also sagen, daß mit einer Übersetzung so eines Satzes aus der Wortsprache in die Russell'sche Notation nicht viel gewonnen ist.

1 (V): verwendeten,

2 (V): angewendet werden soll,

3 (V): wird durch die

The Inadequacy of Frege's and Russell's Notation for Generality.

The real difficulty lies in the concept of “ $(\exists n)$ ” and, in general terms, of “ $(\exists x)$ ”. This notation originates in this expression of our word-language: “There is a . . . with such and such a property”. And what replaces the dots here is, say, “book in my library” or “thing (body) in this room”, “word in this letter”, etc. Here one thinks of objects that one can go through, one after the other. Via a process of sublimation that is so often applied,¹ that form is then turned into this: “There is an object such that . . .”. And here too we originally thought of all the objects in the world as completely analogous to the “objects” in a room (i.e. to tables, chairs, books, etc.), even though it is quite clear that in many cases the grammar of this “ $(\exists x)$ etc.” is utterly different from the grammar of the primitive case that serves as the archetype. The discrepancy between the original image and what the notation is now applied to² becomes particularly blatant when a proposition like “There are only two circles in this square” is rendered formally as³ “There is no object that has the property of being a circle in this square, and of being neither circle a nor circle b”, or “There are not three objects that have the property of being a circle in this square”. The proposition “There are only two things that are circles in this square” (formed in analogy with the proposition “There are only two people who have climbed this mountain”) sounds insane; and rightly so. That is, nothing is gained by our squeezing the proposition “There are two circles in this square” into that form; on the contrary, this only helps us lose sight of the fact that we haven't clarified the grammar of this proposition. At the same time, however, Russell's notation gives an appearance of precision, which makes some people believe that problems are solved by having converted a proposition into Russell's form. (This is just as dangerous as the use of the word “probably”, without any further investigation of how the word is used in particular cases. For reasons that are easy to understand, the word “probably” is also connected with an idea of precision.)

“One of the four legs of this table isn't stable”, “There are Englishmen with black hair”, “There's a spot on this wall”, “The two pots have the same weight”, “There are the same number of words on both pages”. – In all of these cases “ $(\exists . . .)$. . .” is used in Russellian notation; and each time with a different grammar. So here I want to say that not much is gained by translating such a proposition from word-language into Russellian notation.

1 (V): used,

2 (V): now supposed to be applied to

3 (V): is rendered via the form

Unzulänglichkeit der Frege'schen und Russell'schen Allgemeinheitsbezeichnung.

Es hat Sinn, zu sagen „schreib' eine beliebige Kardinalzahl hin“, ist aber Unsinn zu sagen: „schreib' alle Kardinalzahlen hin“. „In dem Viereck befindet sich ein Kreis“ ($(\exists x).\phi x$) hat
324 Sinn, aber nicht $\sim(\exists x).\sim\phi x$: „in dem Viereck befinden sich alle Kreise“. „Auf einem andersfarbigen Hintergrund befindet sich ein roter Kreis“ hat Sinn, aber nicht „es gibt keine von rot verschiedene Farbe eines Hintergrundes, auf der sich kein roter Kreis befindet“.

„In diesem Viereck ist ein schwarzer Kreis“: Wenn dieser Satz die Form $(\exists x).x$ ist ein schwarzer Kreis im Viereck“ hat, was⁴ ist so ein Ding x , das⁵ die Eigenschaft hat, ein schwarzer Kreis zu sein (und also auch die haben kann, *kein* schwarzer Kreis zu sein): Ist es etwa ein Ort im Quadrat? dann aber gibt es keinen Satz „ $(x).x$ ist ein schwarzer . . .“. Andererseits könnte jener Satz bedeuten „es gibt einen Fleck im Quadrat, der ein schwarzer Kreis ist“. Wie verifiziert man diesen Satz? Nun, man geht die verschiedenen Flecken im Quadrat durch und untersucht sie daraufhin, ob sie ganz schwarz und kreisförmig sind. Welcher Art ist aber der Satz: „Es ist kein Fleck in dem Quadrat“? Denn, wenn das „ x “ in „ $(\exists x)$ “ im vorigen Fall „Fleck im Quadrat“ hieß, dann kann es zwar einen Satz „ $(\exists x).\phi x$ “ geben, aber keinen „ $(\exists x)$ “ oder „ $\sim(\exists x)$ “. Oder, ich könnte wieder fragen: Was ist das für ein Ding, das die Eigenschaft hat (oder nicht hat) ein Fleck im Quadrat zu sein?

Und wenn man sagen kann „ein Fleck ist in dem Quadrat“, hat es dann⁶ auch schon Sinn, zu sagen „alle Flecken sind in dem Quadrat“? Welche *alle*?

Die gewöhnliche Sprache sagt „in diesem Viereck ist ein roter Kreis“, die Russell'sche Notation sagt „es gibt einen Gegenstand, der ein roter Kreis in diesem Viereck ist“. Diese Ausdrucksform ist offenbar nach dem Modell gebildet: „es gibt eine Substanz, die im Dunkeln leuchtet“, „es gibt einen Kreis in diesem Viereck, der rot ist“. – Vielleicht ist schon der Ausdruck „es gibt“ irreführend. „Es gibt“ heißt eigentlich soviel wie „es findet sich“, oder „es gibt unter diesen Kreisen einen . . .“.

325 Wenn man also in größtmöglicher Annäherung an die Russell'sche Ausdrucksweise sagt „es gibt einen Ort in diesem Viereck, wo ein roter Kreis ist“, so heißt das eigentlich, unter diesen Orten gibt es einen, an welchem etc.

(Der schwierigste Standpunkt in der Logik ist der des gesunden Menschenverstandes. Denn er verlangt zur Rechtfertigung seiner Meinung die volle Wahrheit und hilft uns nicht, durch die geringste Konzession, oder Konstruktion.)

Der richtige Ausdruck dieser Art Allgemeinheit ist also der der⁷ gewöhnlichen Sprache „in dem Viereck ist ein Kreis“, welcher die Lage des Kreises einfach *offen* läßt (*unentschieden* läßt). („Unentschieden“ ist ein richtiger Ausdruck, weil die Entscheidung einfach *fehlt*.)

4 (V): hat, welcher Art

5 (V): welches

6 (V): damit

7 (O): der, der

The inadequacy of Frege's and Russell's notation for generality.

It makes sense to say "Write down any cardinal number", but it's nonsense to say: "Write down all cardinal numbers". For "There is a circle in the square" ($(\exists x).fx$) makes sense, but not $\sim(\exists x).\sim\phi x$: "All circles are in the square". "There is a red circle on a background of a different colour" makes sense, but not "There is no background colour other than red on which there is no red circle".

"There is a black circle in this square": If this proposition has the form " $(\exists x).x$ is a black circle in the square", what is such a thing x that has⁴ the property of being a black circle (and therefore can also have the property of *not* being a black circle)? Perhaps a location in the square? But then there is no proposition " $(x).x$ is a black . . .". On the other hand, that proposition could mean "There is a spot in the square that is a black circle". How does one verify this proposition? Well, one checks through the various spots in the square and investigates them to see whether they're completely black and circular. But what kind of proposition is: "There is no spot in the square"? For if in the previous case the " x " in " $(\exists x)$ " was called "spot in the square", then, to be sure, there can be a proposition " $(\exists x).fx$ ", but not " $(\exists x)$ " or " $\sim(\exists x)$ ". And once more I could ask: What kind of a thing is it that has (or doesn't have) the property of being a spot in the square?

And if one can say "There is a spot in the square" does it then⁵ also make good sense to say "All spots are in the square"? Which *all*?

Ordinary language says "There's a red circle in this square", Russell's notation says "There is an object that is a red circle in this square". This form of expression is obviously modelled on: "There is a substance that glows in the dark", "There is a circle in this square that is red". – Perhaps the expression "There is" is misleading from the start. "There is" really means the same as "It is found" or "Among these circles there is one . . .".

So if one approximates Russell's mode of expression as closely as possible and says "There is a place in this square where there is a red circle", then what this actually means is: Among these places there is one where, etc.

(The most difficult standpoint in logic is that of common sense. To live up to its name, it demands the whole truth, and it doesn't provide us with even the most minute concession, or provision.)

So the correct expression of this kind of generality is that of ordinary language: "There's a circle in the square", which simply leaves the position of the circle *open (undecided)*. ("Undecided" is the correct expression, because the decision is simply *absent*.)

4 (V): square", of what nature is such a thing x that has

5 (V): thereby

Kritik meiner früheren Auffassung der Allgemeinheit.

Meine Auffassung des allgemeinen Satzes war, daß $(\exists x).fx$ eine logische Summe ist und daß nur ihre Summanden *hier* nicht aufgezählt seien, sich aber aufzählen ließen (und zwar aus dem Wörterbuch und der Grammatik der Sprache).

Denn ließen sie sich nicht aufzählen, so haben wir ja doch keine logische Summe.¹ (Vielleicht ein Gesetz, logische Summen zu bilden.)

Die Erklärung von $(\exists x).fx$ als einer logischen Summe und $(x).fx$ als logischem Produkt kann natürlich nicht aufrecht erhalten werden. Sie ging mit einer falschen Auffassung der logischen Analyse zusammen, indem ich etwa dachte, das logische Produkt für ein bestimmtes $(x).fx$ werde sich schon einmal finden. – Es ist natürlich richtig, daß $(\exists x).fx$ irgendwie als logische Summe funktioniert und $(x).fx$ als Produkt; ja in *einer* Verwendungsart der Worte „alle“ und „einige“ ist meine alte Erklärung richtig, nämlich – z.B. – in dem Falle „alle primären Farben finden sich in diesem Bild“ oder „alle Töne der C-Dur Tonleiter kommen in diesem Thema vor“. In Fällen aber wie „alle Menschen sterben, ehe sie 200 Jahre alt werden“ stimmt meine Erklärung nicht. Daß nun aber $(\exists x).fx$ als logische Summe funktioniert, ist darin ausgedrückt, daß es aus ϕa und aus $\phi a \vee \phi b$ folgt, also in den Regeln:

$(\exists x).fx \ \&. \ \phi a = \phi a$ und

$(\exists x).fx \ :&. \ \phi a \vee \phi b = \phi a \vee \phi b$.

Aus diesen Regeln ergeben sich dann die Grundgesetze Russells

$\phi x \ \supset. \ (\exists z).\phi z$ und

$\phi x \ \vee. \ \phi y \ \supset: \ (\exists z).\phi z$ als Tautologien.

Für $(\exists x).fx$, etc. brauchen wir auch die Regeln:

$(\exists x).\phi x \vee \psi x = (\exists x).\phi x \vee. (\exists x).\psi x$,

$(\exists x,y).\phi x \ \& \ \psi y \ \vee. \ (\exists x).\phi x \ \& \ \psi x = (\exists x).\phi x \ \&. \ (\exists x).\psi x$.

Jede solche Regel ist ein Ausdruck der Analogie zwischen $(\exists x).fx$ und einer logischen Summe.

Man könnte übrigens wirklich eine Notation für $(\exists x).fx$ einführen, in der man es durch ein Zeichen „ $\phi\alpha \vee \phi\beta \vee \phi\gamma \vee \dots$ “ ersetzt und dürfte dann damit rechnen, wie mit einer logischen Summe; es müßten aber die Regeln vorgesehen sein, nach denen ich diese Notation immer in die von „ $(\exists x).fx$ “ zurücknehmen kann und die also das Zeichen

1 (V): so handelt es sich ja doch nicht um // um eine
// um keine // logische Summe.

Criticism of my Earlier Understanding of Generality.

My understanding of the general proposition was that $(\exists x).\phi x$ is a logical sum, and that although its terms weren't enumerated *there*, they could be enumerated (from the dictionary and the grammar of language).

For if they couldn't be enumerated, then we wouldn't have a logical sum.¹ (Perhaps a law for forming logical sums.)

Of course, the explanation of $(\exists x).\phi x$ as a logical sum and of $(x).\phi x$ as a logical product cannot be maintained. It was linked to a false view of logical analysis, with my thinking, for instance, that the logical product for a particular $(x).\phi x$ would most likely be found some day. – Of course it's correct that $(\exists x).\phi x$ functions in some way as a logical sum, and that $(x).\phi x$ functions in some way as a product; indeed for *one* use of the words “all” and “some” my old explanation is correct, namely, in a case like “All the primary colours can be found in this picture”, or “All the notes of the C major scale occur in this theme”. But in cases like “All people die before they are 200” my explanation is not correct. That $(\exists x).\phi x$ functions as a logical sum, however, is expressed by its following from ϕa and from $\phi a \vee \phi b$, i.e., in the rules:

$(\exists x).\phi x \ \&. \ \phi a = \phi a$ and

$(\exists x).\phi x \ :&. \ \phi a \vee \phi b = \phi a \vee \phi b$.

From these rules Russell's basic laws then follow as tautologies:

$\phi x \ \supset. \ (\exists z).\phi z$ and

$\phi x \vee \phi y \ :&. \ (\exists z).\phi z$.

For $(\exists x).\phi x$, etc. we also need the rules:

$(\exists x).\phi x \vee \psi x = (\exists x).\phi x \vee (\exists x).\psi x$,

$(\exists x,y).\phi x \ \& \ \psi y \vee (\exists x).\phi x \ \& \ \psi x = (\exists x).\phi x \ \&. \ (\exists x).\psi x$.

Every such rule is an expression of the analogy between $(\exists x).\phi x$ and a logical sum.

Incidentally, we really could introduce a notation for $(\exists x).\phi x$ in which it is replaced with a sign “ $\phi\alpha \vee \phi\beta \vee \phi\gamma \vee \dots$ ” and then we could legitimately perform calculations with it as with a logical sum; however, rules would have to be provided, according to which I can always convert this notation back into that of “ $(\exists x).\phi x$ ”, and which therefore distinguish the

1 (V): then it isn't at all a matter of a logical sum.

„ $\phi_a \vee \phi_b \vee \phi_c \vee \dots$ “ von dem einer logischen Summe unterscheiden. Der Zweck dieser Notation wäre nur der, in gewissen Fällen leichter mit $(\exists x).\phi x$ rechnen zu können.

Wenn ich Recht habe, so gibt es keinen Begriff „reine Farbe“; der Satz „A hat eine reine Farbe“ heißt einfach „A ist rot, oder gelb, oder blau, oder grün“. „Dieser Hut gehört entweder A oder B oder C“ ist nicht derselbe Satz wie „dieser Hut gehört einem Menschen in diesem Zimmer“, selbst wenn tatsächlich nur A, B, C im Zimmer sind, denn das muß erst dazugesagt werden. – Auf dieser Fläche sind zwei reine Farben, heißt: Auf dieser Fläche sind rot und gelb, oder rot und blau, oder rot und grün, oder etc.

Wenn ich nun nicht sagen kann „es gibt 4 reine Farben“, so sind die reinen Farben und die Zahl 4 doch irgendwie miteinander verbunden und das muß sich auch irgendwie ausdrücken. – Z.B. wenn ich sage „auf dieser Fläche sehe ich 4 Farben: gelb, blau, rot, grün“.

Die Allgemeinheitsbezeichnung unserer gewöhnlichen Sprache faßt die logische Form noch viel oberflächlicher, als ich früher geglaubt habe. Sie ist eben in dieser Beziehung mit der Subjekt-Prädikat Form vergleichbar.

Die Allgemeinheit ist so vieldeutig, wie die Subjekt-Prädikat Form.

Es gibt so viel verschiedene „alle“, als es verschiedene „Eins“ gibt.²

Darum nützt es nichts, zur Klärung das Wort „alle“ zu gebrauchen, wenn man seine Grammatik in *diesem* Fall noch nicht kennt.

2 (V): Es gibt so viel verschiedene Allgemeinheiten, als es verschiedene Zahlarten gibt.

sign " $\phi_a \vee \phi_b \vee \phi_c \vee \dots$ " from the sign for a logical sum. The only purpose of this notation would be to enable us to calculate more easily with $(\exists x).\phi x$ in certain cases.

If I am right, there is no concept "pure colour"; the proposition "A's colour is a pure colour" simply means "A is red, or yellow, or blue, or green". "This hat belongs either to A or to B or to C" is not the same proposition as "This hat belongs to a person in this room", even if in fact only A, B and C are in the room, for that is something that has to be added. – "There are two pure colours on this surface" *means*: There are red and yellow or red and blue or red and green or etc. on this surface.

Even if I can't say "There are 4 pure colours", still the pure colours and the number 4 are somehow connected with each other, and that has to be expressed somehow as well. – For example, by saying "I see 4 colours on this surface: yellow, blue, red, green".

In our ordinary language the notation for generality contains the logical form much more superficially than I earlier believed. In this respect it's comparable to the subject–predicate form.

Generality is as ambiguous as the subject–predicate form.

There are as many different "all's" as there are different "one's".²

So it's no good using the word "all" for clarification if we don't know its grammar in *this* case.

2 (V): There are as many different generalities as there are different kinds of numbers.

Erklärung der Allgemeinheit durch Beispiele.

329

Denken wir uns die Erklärung des Begriffs der Pflanze. Wir zeigen jemand mehrere Gegenstände und sagen, das sind Pflanzen. Dann zeigt auch er auf einen weiteren Gegenstand und sagt „ist auch das eine Pflanze“ und wir antworten „ja, das auch“, u.s.w. Ich hätte nun einmal gesagt, er habe nun in dem Gezeigten den Begriff „Pflanze“ – das gewisse Gemeinsame – gesehen und er sehe¹ die Beispiele der Erklärung anders, wenn er in ihnen eben diesen Begriff sieht als, wenn er sie etwa als Repräsentanten dieser bestimmten Gestalt² und Farbe allein auffasse. (So wie ich auch sagte, er sähe in der Variablen, wenn er sie als solche versteht, etwas, was er im Zeichen für den besonderen Fall nicht sieht.) Aber der Gedanke des „darin Sehens“ ist von dem Fall hergenommen, wo ich z.B. die Figur |||| verschieden „phrasiert“ sehe. Aber dann sehe ich eben in einem andern Sinn wirklich verschiedene Figuren und, was diese gemein haben, ist außer ihrer Ähnlichkeit die Verursachung durch das gleiche physikalische Bild.

330

Aber diese Erklärung ist doch nicht ohne weiteres auf den Fall des Verstehens der Variablen oder der Beispiele für den Begriff „Pflanze“ anzuwenden. Denn angenommen, wir hätten wirklich etwas anderes in ihnen gesehen, als in Pflanzen, die nur um ihrer selbst willen gezeigt wurden, so ist die Frage, kann denn dieses, oder irgendein anderes, Bild uns zu der Anwendung als Variable berechtigen? Ich hätte einem also die Pflanzen zur Erklärung zeigen können und ihm dazu einen Trank gegeben, durch den es verursacht wird, daß er die Beispiele in der bestimmten Weise sieht. (Wie es möglich wäre, daß ein Alkoholisierter eine Gruppe |||| immer als ||| | sieht.) Und damit wäre die Erklärung des Begriffs in eindeutiger Weise gegeben und wer sie verstanden hat, hätte von den vorgezeigten Specimina und den begleitenden Gesten *dieses* Bild empfangen. So ist es aber doch nicht. – Es ist nämlich wohl möglich, daß der, welcher z.B. das Zeichen ||||| als Zahlzeichen für die 6 sieht, es anders sieht (etwas anderes darin sieht) als der, welcher es nur als Zeichen für „einige“ auffaßt, weil er seine Aufmerksamkeit nicht auf das Gleiche richten wird; aber es kommt dann auf das System von Regeln an, die von diesen Zeichen gelten und das Verstehen wird wesentlich kein Sehen des Zeichens in gewisser Weise sein.

Es wäre also möglich, zu sagen „jetzt sehe ich das nicht mehr als Rose, sondern nur noch als Pflanze“!

Oder: „Jetzt sehe ich es nur als Rose, nicht mehr als *diese* Rose“.

„Ich sehe den Fleck nur noch im Quadrat, aber nicht mehr in einer bestimmten Lage.“

Der seelische Vorgang des Verstehens interessiert uns eben gar nicht. (So wenig, wie der einer Intuition.)

1 (V): sähe

2 (V): Form

Explanation of Generality by Examples.

Let's imagine explaining the concept of a plant. We show someone several objects and say they are plants. Then he points to another object and asks "Is that a plant as well?", and we answer "Yes, that too", and so on. At one time I would have said that now he has seen the concept "plant" – the specific common element – in what he was shown, and that he sees¹ the examples used in the explanation differently when he sees this concept in them from when he understands them, say, just as representatives of this particular shape² and colour. (Just as I also used to say that he sees something in a variable – when he understands it as such – that he doesn't see in the sign for the particular case.) But the notion of "seeing something in something" is taken from the case where I see the figure ||||, for example, "phrased" differently. But in that case – and in a different sense – I really am seeing different figures, and what they have in common, aside from their similarity, is that they were caused by the same physical image.

But this explanation cannot simply be applied to the case of understanding variables, or of examples of the concept "plant". For let's assume that we really had seen something else in them than in plants that were shown only for their own sake; then the question is: Can this or some other image justify us in applying them as variables? So I might have shown someone the plants as an explanation, and also have given him a potion that causes him to see the examples in that particular way. (Just as it's possible that someone who is drunk always sees the group |||| as ||| |.) And in this way the explanation of the concept would have been given unambiguously, and whoever understood it would have got *this* image from the specimens shown to him and from the accompanying gestures. But that's not the way it is. – For it is quite possible that whoever sees, e.g., the sign ||||| as a sign for the number 6 sees it differently (sees something different in it) from someone who only understands it as a sign for "some", because he will not direct his attention towards the same thing; but it depends on the system of rules that are valid for these signs, and understanding will not amount to seeing the sign in a particular way.

So it's possible to say "Now I no longer see this as a rose, but only as a plant"!

Or: "Now I see it only as a rose, but no longer as *this* rose".

"I see the spot simply as in the square, and no longer in a particular position."

The psychological process of understanding simply doesn't interest us. (Any more than the psychological process of an intuition.)

1 (V): he would see

2 (V): form

331 „Es ist doch gar kein Zweifel, daß der, welcher die Beispiele als beliebige Fälle zur Veranschaulichung des Begriffs versteht, etwas andres versteht, als der, welcher sie als bestimmt begrenzte Aufzählung auffaßt“. Sehr richtig, aber *was* versteht der erste also, was der zweite nicht versteht? Nun, er sieht eben nur *Beispiele* in den vorgezeigten Dingen, die nur gewisse Züge aufweisen³ sollen, aber er meint nicht, daß ich ihm im Übrigen diese Dinge um ihrer selbst willen zeige. –

Ich möchte die eine Klasse⁴ „logisch begrenzt“, die andere „logisch nicht begrenzt“ nennen.

Ja, aber ist es denn so, daß er nun tatsächlich nur diese Züge an den Dingen sieht? Etwa am Blatt nur das, was allen Blättern gemeinsam ist? Das wäre so, als sähe er alles übrige „in blanco“. Also gleichsam ein unausgefülltes Formular, in dem die wesentlichen Züge vorgedruckt sind. (Aber die Funktion „f(. . .)“ ist ja so ein Formular.)

Aber was ist denn das für ein Prozeß, wenn mir Einer mehrere verschiedene Dinge als Beispiele für einen Begriff⁵ zeigt, um mich darauf zu führen, das Gemeinsame in ihnen zu sehen; und wenn ich es suche und nun wirklich sehe?⁶ Er kann mich auch auf das Gemeinsame *aufmerksam machen*. – Bringt er aber dadurch hervor, daß ich den Gegenstand anders *sehe*? Vielleicht auch, denn ich kann jedenfalls *besonders* auf einen seiner Teile schauen, während ich sonst etwa alle gleichmäßig deutlich gesehen hätte. Aber dieses Sehen ist nicht das Verstehen des Begriffs. Denn wir sehen nicht etwas mit einer *leeren* Argumentstelle.

332 Man könnte auch fragen: Sieht der, welcher das Zeichen „||| . . .“ als Zeichen des Zahlbegriffs (im Gegensatz zu „|||“, welches 3 bezeichnen soll) auffaßt, jene erste Gruppe von Strichen anders, als die zweite? Aber auch wenn er sie anders – gleichsam, vielleicht, verschwommener – sieht, *sieht* er da etwa das Wesentliche des Zahlbegriffs? Hieße das nicht, daß er dann „||| . . .“ und „|||| . . .“ tatsächlich nicht voneinander müßte unterscheiden können? (Wenn ich ihm (nämlich) etwa den Trank eingegeben hätte, der ihn den *Begriff* sehen macht.)⁷

Denn wenn ich sage: Er bewirkt dadurch, daß er uns mehrere Beispiele zeigt, daß wir das Gemeinsame in ihnen sehen und von dem Übrigen absehen, so heißt das eigentlich, daß das Übrige⁸ in den Hintergrund tritt, also gleichsam blasser wird (und warum soll es dann nicht ganz verschwinden) und „das Gemeinsame“, etwa die Eiförmigkeit, allein im Vordergrund bleibt.

Aber so ist es nicht. Übrigens wären die mehreren Beispiele nur ein technisches Hilfsmittel, und wenn ich einmal das Gewünschte gesehen hätte, so könnte ich's auch in *einem* Beispiel sehen. (Wie ja auch „(∃x).fx“ nur *ein* Beispiel enthält.)

Es sind also die Regeln, die von dem Beispiel gelten, die es zum Beispiel machen. –

Nun genügt aber doch heute jedenfalls das bloße Begriffswort ohne eine Illustration, um sich mir verständlich zu machen⁹ (und die Geschichte des Verständnisses interessiert uns ja nicht) z.B., wenn mir Einer sagt „forme ein Ei“; und ich will doch nicht sagen, daß ich etwa dabei den Begriff des Ei's vor meinem inneren Auge sehe, wenn ich diesen Befehl (und das Wort „Ei“) verstehe.¹⁰

3 (V): aufzeigen

4 (V): Aufzählung

5 (V): Beispiele eines Begriffes

6 (V): ich es nun suche und wirklich sehe?

7 (V): läßt.)

8 (V): übrige

9 (V): um sich mit mir zu verständigen

10 (O): (und das Wort „Ei“ verstehe.

“There is no doubt whatsoever that someone who understands the examples as arbitrary cases chosen to illustrate a concept understands something different from someone who understands them as an enumeration with definite limits.” Quite true, but *what* does the former understand that the latter doesn’t? Well, all he sees in the objects he is shown are *examples*, examples that are supposed to exhibit³ only certain traits; he doesn’t think that in addition I’m showing him these things for their own sake. –

I would like to call the one class⁴ “logically bounded”, and the other “logically unbounded”.

Yes, but is it true that he really sees only these features in the things? In a leaf, say, does he see only what is common to all leaves? That would be as if he saw everything else “as blank”, i.e. as if he saw a form that listed only the essential features, but with the spaces next to them not filled in. (But the function “f(. . .)” is just such a form.)

But what kind of a process is it when someone shows me several different things as examples of a concept to get me to see what they have in common, and when I look for it and then actually⁵ see it? He can also *call my attention* to what is common. – But in doing this does he bring it about that I *see* the object differently? Perhaps he does this as well, for in any case I can look at one of its parts in particular, whereas otherwise, say, I would have seen all of them with equal clarity. But this seeing is not the understanding of the concept. For we don’t see something with an *empty* argument place.

One might also ask: Does someone who understands the sign “| | | . . .” as a sign for the concept of number (in contrast to “| | | ”, which is supposed to stand for 3) see that first group of lines differently from the second? But even if he does see it differently – perhaps more blurred, as it were – does he really *see* the essence of the concept of number there? Wouldn’t that mean that he would actually have to be unable to distinguish “| | | . . .” from “| | | | . . .”? (That is, if I had perhaps given him a potion that makes⁶ him see the *concept*.)

For if I say: By giving us several examples he causes us to see the common element in them and to disregard the rest, that really means that the rest recedes into the background, i.e. becomes paler, as it were (and why shouldn’t it then disappear altogether?), and “the common element”, say the oval shape, is the only thing that remains in the foreground.

But that isn’t the way it is. Apart from anything else, the multiple examples would be no more than a technical aid, and once I had seen what I was supposed to see, I could also see it in a *single* example. (As indeed “ $(\exists x).fx$ ” contains only *one* example.)

So it is the rules that are valid for the example that make it into an example. –

But in any case, at present the mere word for a concept, without any illustration, is enough to get it across to me⁷ (for the history of my understanding doesn’t interest us); as when someone says to me, for example, “Sculpt an egg”; I certainly don’t want to say that when I understand this command (and the word “egg”) I see the concept of an egg before my mind’s eye.

3 (V): show

4 (V): enumeration

5 (V): and when I now look for it and actually

6 (V): lets

7 (V): to communicate with me

333 Wenn wir eine Anwendung des Begriffes „Ei“ oder „Pflanze“ machen, so schwebt uns gewiß nicht vorerst ein allgemeines Bild vor, oder bei dem Hören des Wortes „Pflanze“ das Bild des bestimmten Gegenstandes, den ich dann als eine Pflanze bezeichne. Sondern ich mache die Anwendung sozusagen spontan. Dennoch gibt es eine Anwendung, von der ich sagen würde: nein, das habe ich unter „Pflanze“ nicht gemeint; oder andererseits „ja, das habe ich auch gemeint“. Aber heißt das, daß mir diese Bilder vorschwebten¹¹ und ich sie in meinem Geist ausdrücklich abgewiesen und zugelassen habe? – Und doch hat es diesen Anschein, wenn ich sage: „ja, das und das und das habe ich alles gemeint, aber *das* nicht“. Man könnte aber fragen: Ja, hast Du denn alle diese Fälle vorausgesehen? und die Antwort würde dann lauten „ja“, oder „nein“,¹² aber ich dachte mir, es sollte etwas zwischen dieser und dieser Form sein“, oder dergleichen. Meistens aber habe ich in diesem Moment gar keine Grenzen gezogen und diese ergeben sich nur auf einem Umweg durch eine Überlegung. Ich sage z.B. „bring’ mir noch eine ungefähr so große Blume“ und er bringt eine und ich sage: Ja, so eine habe ich gemeint. So erinnere ich mich vielleicht an ein Bild, was mir vorschwebte, aber aus diesem geht nicht hervor, daß auch die herbeigebrachte Blume noch zulässig ist. Sondern hier wende ich eben jenes Bild an. Und diese Anwendung war nicht antizipiert worden.

Was uns interessiert ist nur die *exakte* Beziehung des Beispiels zu dem Danachhandeln.¹³

Es wird aus dem Beispiel heraus wieder kalkuliert.

Beispiele sind ordentliche Zeichen, nicht Abfall, nicht Beeinflussung.

334 Denn uns interessiert nur die Geometrie des Mechanismus. (Das heißt doch, die Grammatik seiner Beschreibung.)

Wie äußert es sich aber in unsern Regeln, daß die behandelten Fälle *fx* keine wesentlich abgeschlossene Klasse sind? – Doch wohl nur durch die Allgemeinheit der allgemeinen Regeln.¹⁴ – Daß sie nicht *die* Bedeutung für den Kalkül haben, wie eine abgeschlossene Gruppe von Grundzeichen (etwa den Namen der 6 Grundfarben). Wie anders, als durch die Regeln, die von ihnen ausgesagt sind. – Wenn ich etwa in einem Spiel die Erlaubnis habe, eine gewisse Art von Steinen in beliebiger Anzahl zu borgen, andere aber in festgesetzter Anzahl vorhanden sind, oder das Spiel zwar zeitlich unbegrenzt, aber räumlich begrenzt ist, haben wir ja wohl denselben Fall. Und der Unterschied zwischen den einen und den anderen Figuren des Spiels muß eben durch die Spielregeln festgesetzt sein. Es heißt dann etwa von den¹⁵ einen: Du kannst so viele Steine dieser Art nehmen, als Du willst. – Und nach einem anderen bindenderen¹⁶ Ausdruck dieser¹⁷ Regel darf ich nicht suchen.

Das heißt, daß der Ausdruck für die Unbegrenztheit der behandelten Einzelfälle (*eben*) ein allgemeiner Ausdruck sein wird und kein anderer sein kann, kein Ausdruck, in dem¹⁸ die anderen nicht behandelten Einzelfälle in schattenhafter Weise vorkämen.

Es ist ja klar, daß ich keine logische Summe als Definition des Satzes „das Kreuz liegt zwischen den Strichen“ anerkenne. Und damit ist doch alles gesagt.

335 Eines möchte ich immer sagen, um den Unterschied der Fälle zu erklären, die als Beispiele für einen Begriff beigebracht werden, von denen, die in der Grammatik eine bestimmte abgeschlossene Gruppe bilden. Wird nämlich zuerst erklärt „a, b, c, d sind Bücher. – Nun

11 (V): Bilder vorgeschwebt haben

12 (O): „nein“,

13 (V): Beispiels zum Folgen.

14 (O): Regel.

15 (O): der

16 (V): exakteren

17 (V): der

18 (O): Ausdruck, indem

When we use the concept “egg” or “plant” we don’t start out by having a general picture in mind, nor when I hear the word “plant” is there present a picture of the particular object that I then call a plant. Rather, I apply the word spontaneously, as it were. Nevertheless, there are uses where I would say “No, I didn’t mean that by ‘plant’”, or on the other hand “Yes, I meant that too”. But does that mean that these pictures were before my mind and that in my mind I expressly rejected and admitted them? – And yet that is what it looks like when I say: “Yes, I meant all of those things, but not *that*.” But one could ask: “Did you really foresee all of those cases?”, and the answer would be “Yes” or “No, but I imagined it ought to be something between this shape and that one”, or the like. But usually at that moment I haven’t drawn any boundaries, and they arise only in a roundabout way via reflection. For instance, I say “Bring me another flower that is about this big”, he brings one and I say: “Yes, I meant one like that”. Perhaps then I remember a picture that was before my mind, but it doesn’t follow from this that the flower that was brought to me is still acceptable. Rather, I am simply applying that picture here. And this application had not been anticipated.

The only thing that interests us is the *exact* relationship of the example to acting in accordance with it.⁸

An example is the point of departure for further calculation.

Examples are fully-fledged signs, not left-overs. They don’t pressure us.

For the only thing that interests us is the geometry of the mechanism. (And that means, the grammar of its description.)

But how does it come out in our rules that the cases of fx that we dealt with are not an essentially closed class? – Surely only in the generality of the general rules. – In that they don’t have *the same* meaning for the calculus as a closed group of basic signs (as for instance that of the names of the 6 primary colours). How else does it come out other than in the rules that have been given for them? – If, say, in some game I am allowed to help myself to as many pieces of a certain kind as I like, while only a set number of another kind is available, or if the game is unlimited in time but limited in space, then we have the same case. And the distinction between one kind of piece and another kind must have been established by the rules of the game; for example, they will say about the one kind: you can take as many pieces of that kind as you want. – And I ought not look for another more binding expression of this rule.⁹

That means that the expression of the infinity of the individual cases in question will be a general expression; it cannot be of any other kind; it cannot be an expression in which the other individual cases that were not considered appear in a shadowy way.

Indeed it’s clear that I do not recognize any logical sum as a definition of the proposition “The cross is between the lines”. And really that says everything that is to be said.

There is one thing I always want to say to explain the distinction between instances that are brought forward as examples of a concept and those that make up a definite closed group in grammar. For if I begin by explaining “A, B, C, D are books”, and then I say to

8 (V): to following it.

9 (V): more exact expression of the rule.

bringe mir ein Buch“ und er bringt eines, das von allen gezeigten verschieden ist, so kann dennoch gesagt werden, er habe ganz richtig nach der aufgestellten Regel gehandelt. Hätte es aber geheißen „a, b, c, d sind meine Bücher. – Bringe mir eines von meinen Büchern“, so wäre es falsch gewesen, überhaupt ein weiteres¹⁹ zu bringen und die Antwort hätte gelautet: Ich habe Dir doch gesagt, daß a, b, c, d meine Bücher sind. Im ersten Fall handelt der der Regel nicht zuwider, der einen anderen Gegenstand bringt, als die in der Regel genannten, im zweiten Fall würde er dadurch der Regel zuwider handeln. Wenn Du aber auch nur a, b, c, d im Befehl nanntest, aber die Handlung $f(e)$ als Befolgung des Befehls ansahst, heißt das nicht, daß Du mit $F(a, b, c, d \dots)$ doch $F(a, b, c, d, e)$ meinstest? Oder, wie unterscheiden sich diese Befehle, wenn sie doch von dem Selben befolgt werden? – Ja, aber es hätte ja auch $f(g)$ mit dem Befehl übereingestimmt und nicht nur $f(e)$. – Gut, dann meinstest Du eben mit dem ersten Befehl: $F(a, b, c, d, e, g)$ u.s.f.²⁰ Was immer Du mir bringst, ich hätte es doch in einer Disjunktion einschließen können. Wenn wir also eine Disjunktion aller von uns tatsächlich gebrauchten Fälle konstruieren, wie würde sich die syntaktisch von dem allgemeinen Satz unterscheiden? Denn wir dürfen nun nicht sagen: dadurch,²¹ daß der allgemeine Satz auch noch durch r (das nicht in der Disjunktion steht) wahr gemacht wird. Denn dadurch unterscheidet sich der allgemeine Satz nicht von einer Disjunktion, die r enthält. (Und also ist auch jede andere ähnliche Antwort unmöglich.) Wohl aber wird es einen Sinn haben, zu sagen: $F(a, b, c, d, e)$ ist die Disjunktion aller tatsächlich von uns gebrauchten Fälle, aber auch *andere Fälle* (es wird natürlich keiner erwähnt) machen den allgemeinen Satz „ $F(a, b, c, d, \dots)$ “ wahr. Während man hierin natürlich nicht den allgemeinen Satz für $F(a, b, c, d, e)$ einsetzen kann.

Es ist übrigens hier gerade wichtig, daß die Parenthese²² im vorigen Satz „und also ist auch jede andere ähnliche Antwort unmöglich“ unsinnig²³ ist, weil man zwar verschiedene besondere Fälle als Beispiele einer Allgemeinheit angeben²⁴ kann, aber nicht verschiedene Variable, da die Variablen r, s, t sich ihrer Bedeutung nach nicht unterscheiden.

Man könnte dann freilich nicht sagen, wir befolgen $F(\exists)$ anders, wenn wir $f(d)$ tun, als eine Disjunktion, in welcher²⁵ $f(d)$ vorkommt, denn $F(\exists) = F(\exists) \vee f(d)$. Wem der Befehl gegeben wird „hole mir irgend eine Pflanze, oder diese“ (von welcher ihm ein Bild mitgegeben wird), der wird dieses Bild ruhig beiseite legen und sich sagen „da es irgend eine tut, so geht mich dieses Bild nichts an“. Dagegen werden wir das Bild nicht einfach beiseite legen dürfen, wenn es uns mit fünf anderen gegeben wurde und der Befehl lautete, eine von diesen sechs Pflanzen zu bringen. (Es kommt also darauf an, in *welcher* Disjunktion sich der besondere Befehl befindet.) Und nach dem Befehl „ $f(a) \vee f(b) \vee f(c)$ “ wird man sich anders richten, als nach dem Befehl „ $f(\exists)$ “ (= $f(\exists) \vee f(c)$), auch wenn man jedes Mal $f(c)$ tut. – Das Bild $f(c)$ geht in $f(\exists)$ unter. (Und es hilft uns ja nichts, in einem Kahn zu sitzen, wenn wir mitsamt ihm unter Wasser sind und sinken.) Man möchte (uns) sagen: Wenn Du auf den Befehl „ $f(\exists)$ “ $f(c)$ tust, so hätte Dir ja auch $f(c)$ ausdrücklich erlaubt sein können, und wie hätte sich dann der allgemeine Befehl von einer Disjunktion unterscheiden? – Aber auf diese Erlaubnis hättest Du Dich eben, in der Disjunktion mit dem allgemeinen Satz, gar nicht *stützen* können.

Ist es also so, daß der Befehl „bringe mir eine Blume“ nie durch den Befehl ersetzt werden kann von der Form „bringe mir a oder b oder c“, sondern immer lauten muß „bringe mir a oder b oder c, oder eine andere Blume“?

19 (V): fünftes

20 (O): $F(a, b, c, d, e, g)$ u.s.f.

21 (V): sagen, dadurch,

22 (O): Parenthese

23 (V): unmöglich“ ein Unsinn

24 (V): geben

25 (V): Disjunktion, worin

someone – “Now bring me a book”, and he brings one that’s different from all of the ones I’ve shown him, he can still be said to have complied completely with the given rule. But if what had been said had been “A, B, C, D are my books. – Bring me one of my books”, it would have been incorrect to bring any other¹⁰ one, and the response would have been: “I *told* you that A, B, C, D are my books”. In the first case someone who brings an object that is different from the ones named in the rule doesn’t violate the rule; in the second case doing this very same thing would violate it. But even if in the command you named only a, b, c, and d, and yet you regarded the act $f(e)$ as obeying the command, doesn’t that mean that by $F(a, b, c, d, \dots)$ you meant $F(a, b, c, d, e)$ after all? Or how are these commands distinct from each other, if the same thing obeys them? – Sure, but $f(g)$ too would have been in accordance with the command, not just $f(e)$. Very well, then by your first command you simply meant $F(a, b, c, d, e, g)$, etc. Whatever you bring me I could have included in a disjunction. So if we construct a disjunction of all the cases we actually use, how would it differ syntactically from the general proposition? For we’re not allowed to say: By the fact that the general proposition is also made true by r (which doesn’t occur in the disjunction). Because that doesn’t distinguish the general proposition from a disjunction that contains r . (And thus every other similar answer is impossible as well.) But it will make sense to say: $F(a, b, c, d, e)$ is the disjunction of all of the cases we have actually used, but *other cases* too (of course none will be mentioned) make the general proposition “ $F(a, b, c, d, \dots)$ ” true. Whereas of course you can’t insert the general proposition here in place of $F(a, b, c, d, e)$.

By the way, it is important at this point that the parenthesis in the previous paragraph “(And thus every other similar answer is impossible as well.)” is nonsensical¹¹, because one can point out¹² different particular cases as examples of a generalization, but not different variables, because the variables r, s, t don’t differ in their meaning.

Of course you couldn’t say that when we do $f(d)$ we obey $f(\exists)$ differently from the way we obey a disjunction containing $f(d)$, because $f(\exists) = f(\exists) \vee f(d)$. Whoever is given the command “Bring me any plant, or this one” (giving him a picture of it) will put aside the picture without any qualms and say to himself “Since any one will do, this picture doesn’t matter”. By contrast, we wouldn’t be allowed simply to put the picture aside if we were given it along with five others and the command was to bring one of these six plants. (So what matters is *which* disjunction the particular command is located in.) And one will be guided differently by the command “ $f(a) \vee f(b) \vee f(c)$ ” than by the command “ $f(\exists)$ ” ($= f(\exists) \vee f(c)$), even if in each case one does $f(c)$. – The picture $f(c)$ drowns in $f(\exists)$. (And it doesn’t help us to be sitting in a boat, if we and it are under water and sinking.) One is inclined to say: “If you do $f(c)$ at the command $f(\exists)$ then you might also have been expressly permitted to do $f(c)$, and in that case how would the general command have differed from a disjunction?” – But in the disjunction that contains the general proposition it is precisely this permission that you could not have *relied* on.

So is it the case that the command “Bring me a flower” can never be replaced by a command of the form “Bring me a or b or c”, but that it must always be “Bring me a or b or c or *some other flower*”?

10 (V): bring a fifth

12 (V): give

11 (V): nonsense

Aber warum tut der allgemeine Satz so unbestimmt, wenn ich ja doch jeden Fall, der wirklich eintritt, auch im Voraus hätte beschreiben können?

Aber auch das scheint mir noch nicht den wichtigsten Punkt dieser Sache zu treffen. Weil es, wie ich glaube, nicht eigentlich auf die Unendlichkeit der Möglichkeiten ankommt, sondern auf eine Art von Unbestimmtheit. Ja, gefragt, wie viele Möglichkeiten es denn für einen Kreis im Gesichtsfeld²⁶ gäbe, innerhalb eines bestimmten Vierecks zu liegen, könnte ich weder eine endliche Zahl nennen, noch sagen, es gäbe unendlich viele (wie in der euklidischen Ebene). Sondern wir kommen hier zwar nie zu einem Ende, aber die Reihe ist nicht endlos im Sinne von $|1, \xi, \xi + 1|$.

Sondern, kein Ende, zu dem wir kommen, ist wesentlich das Ende. Das heißt, ich könnte immer sagen: ich seh' nicht ein, warum das alle Möglichkeiten sein sollen. – Und das heißt doch wohl, daß es sinnlos ist, von „allen Möglichkeiten“ zu sprechen. Der Begriff „Pflanze“ und „Ei“ wird also von der Aufzählung *gar nicht angetastet*.

338 Wenn wir auch sagen, wir hätten die besondere Befolgung $f(a)$ immer als möglich voraussehen können, so haben wir dies doch in Wirklichkeit nie getan. – Aber selbst, wenn ich die Möglichkeit $f(a)$ vorhersehe und ausdrücklich in meinen Befehl aufnehme, so verliert sie sich neben dem allgemeinen Satz und zwar, weil ich eben aus dem allgemeinen Satz ersehe, daß dieser besondere Fall erlaubt ist, und nicht einfach daraus, daß er im Befehl als erlaubt festgesetzt ist. Denn, steht der allgemeine Satz da, so nützt mir das Hinzusetzen des besonderen Falles nichts mehr (d.h. es macht den Befehl nicht expliciter). Denn nur aus dem allgemeinen Satz leite ich ja die Rechtfertigung her, diesen besonderen Fall neben ihn zu setzen. Man könnte nämlich glauben, und darauf geht ja meine ganze Argumentation aus, daß durch das Hinzusetzen des besonderen Falles die – gleichsam verschwommene – Allgemeinheit des Satzes aufgehoben wird; daß man sagen könnte²⁷ „jetzt brauchen wir sie nicht mehr, wir haben ja hier den bestimmten Fall“. Ja, aber wenn ich doch zugebe, daß ich den besonderen Fall darum *hierher* setze, weil er mit dem allgemeinen Satz übereinstimmt! Oder, daß ich doch anerkenne, daß $f(a)$ ein besonderer Fall von $f(\exists)$ ist! Denn nun kann ich nicht sagen: das heißt²⁸ eben, daß $f(\exists)$ eine Disjunktion ist, deren ein Glied $f(a)$ ist. Denn wenn dies so ist, so muß sich diese Disjunktion angeben lassen. $f(\exists)$ muß dann als eine Disjunktion definiert sein. Eine solche Definition wäre auch ohne weiteres zu geben, sie entspräche aber nicht dem Gebrauch von $f(\exists)$, den wir meinen. Nicht so, daß die Disjunktion immer noch etwas übrig läßt; sondern, daß sie das Wesentliche der Allgemeinheit gar nicht berührt, ja, wenn man sie dieser beifügt, ihre Rechtfertigung erst von dem allgemeinen Satz bezieht.²⁹

Ich befehle zuerst $f(\exists)$; er befolgt den Befehl und tut $f(a)$. Nun denke ich, ich hätte ihm ja gleich den Befehl „ $f(\exists) \vee f(a)$ “ geben können. (Denn, daß $f(a)$ den Befehl $f(\exists)$ befolgt, wußte ich ja früher und es kam ja auf dasselbe hinaus, ihm $f(\exists) \vee f(a)$ zu befehlen.) Und dann hätte er sich also bei der Befolgung nach der³⁰ Disjunktion „tue Eines oder $f(a)$ “ gerichtet. Und ist es, wenn er den Befehl durch $f(a)$ befolgt, nicht gleichgültig, was in Disjunktion mit $f(a)$ steht? Wenn er auf jeden Fall $f(a)$ tut, so ist ja doch der Befehl befolgt, was immer die Alternative ist.

339 Ich möchte auch sagen: In der Grammatik ist nichts nachträglich, keine Bestimmung *nach* einer andern, sondern alles ist zugleich da.

26 (V): Gesichtsräum

27 (V): wird. Man könnte sagen

28 (V): beweist

29 (V): nimmt.

30 (V): einer

But why does the general proposition pretend to be so indeterminate, since I really could just as well have described in advance every case that actually occurs?

But even that still doesn't seem to me to hit upon the most important point of this matter. I believe that what matters isn't really the infinity of possibilities, but a kind of indeterminacy. Indeed, if I were asked how many possibilities a circle in my visual field¹³ had of being within a particular square, I could neither name a finite number, nor say that there were infinitely many (as in a Euclidean plane). Rather, although we never come to an end here, the series isn't endless in the sense in which $|1, \xi, \xi + 1|$ is.

Rather, no end to which we come is essentially the end. That is, I could always say: I don't see why these should be all the possibilities. – And that means, after all, that it makes no sense to speak of “all of the possibilities”. So the concepts “plant” and “egg” are *not even touched* by enumeration.

Even if we say that we could always have foreseen the particular compliance $f(a)$ as possible, still we never did so in fact. – But even if I do foresee the possibility $f(a)$ and expressly include it in my command, it gets lost in comparison to the general proposition, because I can see from the general proposition itself that this particular case is permitted, and not simply from the fact that it is stipulated as being permitted in the command. For if the general proposition is there, then the addition of the particular case is of no further use to me (that is, it doesn't make the command more explicit). For it is only from the general proposition that I derive the justification for placing this particular case next to it. For one could believe – and this is the whole point of my argument – that the “blurred” generality of the proposition is eliminated by adding on the specific case; that one¹⁴ could say “Now we don't need it any more, for here we have the particular case”. Yes, but I am admitting that I'm putting the particular case over here because it agrees with the general proposition! Or: I am acknowledging that $f(a)$ is a particular case of $f(\exists)$! For now I can't say: That simply means¹⁵ that $f(\exists)$ is a disjunction with $f(a)$ as one of its terms. For if that is so, then this disjunction must be capable of being stated. $f(\exists)$ must then be defined as a disjunction. To be sure, such a definition could easily be given, but it wouldn't correspond to the use of $f(\exists)$ that we have in mind. It's not that the disjunction always leaves something remaining; rather, it's that it doesn't even touch what is essential to generality; indeed, if it is added to generality it is only by the general proposition that it gets justified.

First I command $f(\exists)$; he obeys the command and does $f(a)$. Then I think that I could have given him the command “ $f(\exists) \vee f(a)$ ” in the first place. (For I knew in advance that $f(a)$ obeyed the command $f(\exists)$, and it amounted to the same thing to command him to do $f(\exists) \vee f(a)$.) And then when he obeyed the command, he would have been guided by the¹⁶ disjunction “Do something or $f(a)$ ”. And if he obeys the command by doing $f(a)$, isn't it irrelevant what is in the disjunction with $f(a)$? If he does $f(a)$ in any case, then the command has been obeyed, whatever the alternative is.

I would also like to say: In grammar nothing comes later, no determination comes *after* the first one; rather, everything is there all together.

13 (V): visual ~~space~~

14 (V): case. One

15 (V): proves

16 (V): a

Insofern kann ich also (auch) nicht sagen, ich habe zuerst den Befehl $f(\exists)$ gegeben und bin dann erst draufgekommen, daß $f(a)$ ein Fall von $f(\exists)$ ist; jedenfalls aber war und blieb mein Befehl $f(\exists)$, und $f(a)$ setzte ich dazu in der Erkenntnis,³¹ daß $f(a)$ mit $f(\exists)$ übereinstimmt. Und diese Bestimmung, daß $f(a)$ mit $f(\exists)$ übereinstimmt, setzt doch eben den Sinn des Satzes $f(\exists)$ voraus, wenn er überhaupt selbständig festgehalten wird, und nicht erklärt wird, er sei durch eine Disjunktion zu ersetzen. Und mein Satz „jedenfalls war und blieb aber mein Befehl $f(\exists)$ u.s.w.“ hieß nur, daß ich den allgemeinen Befehl *nicht* durch eine Disjunktion *ersetzt* hatte.

Man kann sich nun denken, daß ich einen Befehl $p \vee f(a)$ gebe und der Andre den ersten Teil des Befehls nicht deutlich versteht, wohl aber, daß der Befehl „... $\vee f(a)$ “ lautet. Er könnte dann $f(a)$ tun und sagen „ich weiß gewiß, daß ich den Befehl befolgt habe, wenn ich auch den ersten Teil nicht verstanden habe“. So nun denke ich es mir auch, wenn ich sage, es käme ja auf die andere Alternative nicht an. Aber dann hat er doch nicht den *gegebenen* Befehl befolgt, sondern ihn als Befehl $f(a)$ aufgefaßt.³² Man könnte fragen: Hat der, welcher auf den Befehl „ $f(\exists) \vee f(a)$ “ $f(a)$ tut, den Befehl darum (d.h. insofern) befolgt, weil der Befehl von der Form $\xi \vee f(a)$ ist, oder darum, weil $f(\exists) \vee f(a) = f(\exists)$ ist? Wer $f(\exists)$ versteht, also weiß, daß $f(\exists) \vee f(a) = f(\exists)$ ist, der befolgt durch $f(a)$ $f(\exists)$, auch wenn ich es „ $f(\exists) \vee f(a)$ “ schreibe, weil er ja *doch* sieht, daß $f(a)$ ein Fall von $f(\exists)$ ist. – Und nun kann man uns entgegenhalten: Wenn er sieht, daß $f(a)$ ein Fall von $f(\exists)$ ist, so heißt das ja doch, daß $f(a)$ disjunktiv³³ in $f(\exists)$ enthalten ist, daß also $f(\exists)$ *mit Hilfe* von $f(a)$ definiert ist! Und – muß er jetzt weiter sagen – die übrigen Teile der Disjunktion gehen mich eben nichts an, wenn die Glieder, die ich sehe, alle sind, die ich jetzt brauche. „Du hast eben mit der Erklärung ‚daß $f(a)$ ein Fall von $f(\exists)$ ist‘ nichts weiter gesagt, als daß $f(a)$ in $f(\exists)$ vorkommt, und noch andere Glieder.“ – Aber gerade das meinen wir nicht. Und es ist nicht so, als hätten wir durch unsere Bestimmung $f(\exists)$ *unvollständig*³⁴ definiert. Denn dann wäre ja eine vollständige Definition *möglich*. Und es wäre diejenige Disjunktion, nach welcher das angehängte „ $\vee f(\exists)$ “ gleichsam lächerlich wäre, weil ja doch nur die aufgezählten³⁵ Fälle für uns in Betracht kämen. Wie wir aber $f(\exists)$ auffassen, ist die Bestimmung, daß $f(a)$ ein Fall von $f(\exists)$ ist, keine unvollkommene, sondern gar keine Definition von $f(\exists)$. Ich nähere mich also auch nicht dem Sinn von $f(\exists)$, wenn ich die Disjunktion der Fälle vermehre; die Disjunktion der Fälle $\vee f(\exists)$ ist zwar gleich $f(\exists)$, aber niemals gleich der Disjunktion der Fälle, sondern ein ganz anderer Satz.

Auf keinem Umweg kann, was über eine Aufzählung von Einzelfällen gesagt wird,³⁶ die Erklärung der Allgemeinheit sein.³⁷

Kann ich denn aber die Regeln des Folgens in diesem Fall angeben? Denn, wie weiß ich, daß gerade aus fa $(\exists x).fx$ folgt? ich kann ja doch nicht *alle* Sätze angeben, aus denen es folgt. – Das ist aber auch gar nicht nötig; folgt $(\exists x).fx$ aus fa , so war *das* jedenfalls vor jeder besonderen Erfahrung zu wissen, und möglich, es in der Grammatik anzugeben.

Ich sagte „es war möglich, vor jeder Erfahrung zu wissen, daß $(\exists x).fx$ aus fa folgt und es in der Grammatik anzugeben“. Es sollte aber heißen: „ $(\exists x).fx$ folgt aus fa “ ist kein Satz (Erfahrungssatz) der Sprache, der „ $(\exists x).fx$ “ und „ fa “ angehören, sondern eine in ihrer Grammatik festgesetzte Regel.

31 (V): dazu wissend,

32 (V): ihn als „fa!“ aufgefaßt.

33 (V): disjunktiv ~~ist~~

34 (V): $f(\exists)$ unvollkommen ~~defin.~~

35 (V): genannten

36 (V): gesagt ist,

37 (V): ergeben.

And so neither can I say that I first gave the command $f(\exists)$ and only then realized that $f(a)$ is a case of $f(\exists)$; but at any rate, my command was and remained $f(\exists)$, and I added $f(a)$, having recognized¹⁷ that $f(a)$ is in accordance with $f(\exists)$. And the stipulation that $f(a)$ is in accordance with $f(\exists)$ presupposes the sense of the proposition $f(\exists)$, when one states it independently and doesn't declare that it can be replaced by a disjunction. And my sentence "At any rate, my command was and remained $f(\exists)$, etc." meant only that I had *not replaced* the general command with a disjunction.

Now one can imagine that I give a command $p \vee f(a)$ and that the other person doesn't understand the first part of the command clearly, but does understand that the command is ". . . $\vee f(a)$ ". Then he could do $f(a)$ and say "I know for certain that I obeyed the command, even though I didn't understand its first part". And that is also how I imagine it when I say that the other alternative is irrelevant. But then he hasn't obeyed the *given* command after all, but has taken it as the command $f(a)$.¹⁸ One could ask: Has someone who does $f(a)$ in response to the command " $f(\exists) \vee f(a)$ " obeyed the command because (i.e. in so far as) it was of the form $\xi \vee f(a)$, or because $f(\exists) \vee f(a) = f(\exists)$? Whoever understands $f(\exists)$, and therefore knows that $f(\exists) \vee f(a) = f(\exists)$ is obeying $f(\exists)$ by means of $f(a)$, even if I write it as " $f(\exists) \vee f(a)$ ", because he *none the less* sees that $f(a)$ is a case of $f(\exists)$. – And now one can say to us in rebuttal: If he sees that $f(a)$ is a case of $f(\exists)$, then that does mean that $f(a)$ is disjunctively contained in $f(\exists)$, and that therefore $f(\exists)$ has been defined *with the help* of $f(a)$! And – he now has to continue – the remaining parts of the disjunction simply are of no concern to me if the terms that I see are all the ones that I now need. "In explaining 'that $f(a)$ is a case of $f(\exists)$ ' you said nothing more than that $f(a)$ occurs in $f(\exists)$, along with other terms as well." – But that is precisely what we don't mean. And it isn't as if in our stipulation we had *incompletely*¹⁹ defined $f(\exists)$. For then a complete definition would be *possible*. And that would be the disjunction in which the additional " $\vee f(\exists)$ " would be ridiculous, as it were, because it would only be the enumerated²⁰ cases that would concern us. But according to our understanding of $f(\exists)$, the stipulation that $f(a)$ is a case of $f(\exists)$ is not an incomplete definition of $f(\exists)$, but no definition of it at all. So neither do I get closer to the sense of $f(\exists)$ by increasing the number of cases in the disjunction; although the disjunction of the cases $\vee f(\exists)$ is equivalent to $f(\exists)$, *it is never equivalent to the disjunction of the cases; it is a totally different proposition.*

There is no detour to make what is said²¹ about an enumeration of individual cases into²² an explanation of generality.

But in this case can I specify the rules of entailment? For how do I know that it is precisely fa from which $(\exists x).fx$ follows? After all, I can't specify *all* the propositions from which it follows. – But neither is that necessary; if $(\exists x).fx$ follows from fa , then *that* at any rate was something that could be known before any particular experience, and it was possible to state it in grammar.

I said: "It was possible to know before any experience that $(\exists x).fx$ follows from fa and to state it in grammar". But that should read: "' $(\exists x).fx$ follows from fa ' is not a proposition (empirical proposition) of the language to which ' $(\exists x).fx$ ' and ' fa ' belong; rather, it is a rule laid down in their grammar".

17 (V): $f(a)$, knowing

18 (V): as " fa ".

19 (V): *imperfectly*

20 (V): named

21 (V): what has been said

22 (V): cases produce

Bildungsgesetz einer Reihe.

„U.s.w.“

341

Man kann für den Gebrauch der Variablen wohl eine Regel aufstellen und es ist kein Pleonasmus,¹ daß wir dabei eben diese Art der Variablen gebrauchen. Denn brauchten wir sie nicht, so wäre ja durch die Regeln die Variable definiert. Und wir nehmen ja nicht an, daß sie sich definieren lasse, oder: daß sie definiert werden müsse (denn einmal nehmen die Definitionen doch ein² Ende).

Das heißt (nur), daß – z.B. – die Variable „x²“ keine Abkürzung ist (etwa für eine logische Summe) und daß in unserm Gedanken auch nur ein Zeichen dieser Multiplizität vorhanden ist.

342

Denn nehmen wir an, ich hätte 7 Spezialfälle³ aufgezählt und sagte „ihre logische Summe ist aber nicht der allgemeine Satz“, so ist das nicht genug und ich will noch sagen, daß auch keine andere Zahl von Spezialfällen⁴ den allgemeinen Satz ergibt. Aber in diesem Zusatz schein ich nun wiederum eine Aufzählung, wenn auch nicht wirklich, so doch quasi schattenhaft auszuführen. Aber so ist es nicht, denn in dem Zusatz kommen ganz andere Wörter als die Zahlwörter vor.

„Wie aber soll ich es verbieten, daß *ein* Zahlwort dort und dort eingesetzt wird? Ich kann doch nicht vorhersehen, welches Zahlwort Einer⁵ wird einsetzen wollen, um es zu verbieten“. – Du kannst es ja verbieten, wenn es kommt. – Aber da sprechen wir ja schon, allgemein, vom Zahlbegriff!

Was⁶ aber macht ein Zeichen zum Ausdruck der Unendlichkeit? Was gibt ihm den eigentümlichen Charakter dessen, was wir unendlich nennen? Ich glaube, daß es sich ähnlich verhält wie das Zeichen einer enormen Zahl. Denn das Charakteristische des Unendlichen, wie man es so auffaßt, ist seine enorme Größe.

Aber es gibt nicht etwas, was eine Aufzählung ist und doch keine Aufzählung. Eine Allgemeinheit, die quasi nebelhaft aufzählt, aber nicht wirklich und bis zu einer bestimmten Grenze.

Die Punkte in „1 + 1 + 1 + 1 . . .“ sind eben auch nur die vier Pünktchen. Ein Zeichen, für das sich gewisse Regeln angeben lassen müssen. (Nämlich dieselben, wie für das Zeichen „u.s.w. ad inf.“) Dieses Zeichen ahmt zwar die Aufzählung in gewisser Weise nach, ist aber keine Aufzählung. Und das heißt wohl, daß die Regeln, die von ihm gelten, bis zu

1 (O): Pläonasmus,

2 (V): ihr

3 (V): Fälle

4 (V): Fällen

5 (V): Einer mir-e6 (V): Was macht

The Law of the Formation of a Series. “*Etc.*”.

To be sure, we can set up a rule for the use of the variables, and the fact that in doing so we use this same kind of variable is not a pleonasm. For if we didn't use it, then the variable would be defined by the rules. And we don't assume that it can be defined, or that it must be defined (for at some point definitions do come to an¹ end).

This means (only) that – for example – the variable “ x^2 ” is not an abbreviation (say for a logical sum), and that in our thought as well there is only one sign for this multiplicity.

For let's assume I had enumerated 7 particular instances² and said “But their logical sum isn't the general proposition”. But that isn't enough, and so I want to add that neither does any other number of particular instances³ yield the general proposition. But when I add this rider I seem once again to be carrying out an enumeration, if not in actuality, still in a kind of shadowy way. But that's not so, because words occur in the rider that are completely different from the numerals.

“But how can I forbid that *one* numeral is to be inserted in such and such a place? Surely I can't foresee what numeral someone will want to insert, so that I can forbid it.” – Well, you can forbid it when it appears. – But then we are already speaking generally about the concept of number!

But what turns⁴ a sign into an expression of infinity? What gives it the peculiar character of what we call “infinite”? I believe that it behaves like a sign for an enormous number. For the characteristic feature of the infinite, as it is commonly conceived, is its enormous size.

But there is nothing that is an enumeration and yet not an enumeration – a generality that enumerates in a cloudy way, as it were, but doesn't really do so, nor up to a specified limit.

The dots in “ $1 + 1 + 1 + 1 . . .$ ” are nothing but four little dots: a sign, for which it must be possible to state certain rules. (Namely, the same rules as for the sign “etc., *ad inf.*”) This sign does imitate enumeration in a way, but it isn't an enumeration. And that most

1 (V): its

2 (V): 7 instances

3 (V): number of instances

4 (V): What ~~turns~~

einem Punkt mit denen, die von einer Aufzählung gelten, übereinstimmen, aber nicht ganz übereinstimmen.

Es gibt kein Mittelding zwischen der⁷ bestimmten Aufzählung und dem allgemeinen Zeichen.⁸

343 Man hat natürlich nur die Zahlen bis zu einer gewissen höchsten – sagen wir 10^{10} – hingeschrieben. Worin besteht nun die *Möglichkeit*, Zahlen hinzuschreiben, die man noch nicht hingeschrieben hat? Wie seltsam dieses Gefühl, als wären sie doch schon alle irgendwie vorhanden! (Frege sagte, eine Konstruktionslinie sei in gewissem Sinne schon vorhanden, auch ehe sie gezogen wurde.)

Hier ist die Schwierigkeit, sich zu wehren gegen den Gedanken, die Möglichkeit sei eine Art schattenhafter Wirklichkeit.⁹

In den Regeln für die Variable a kann eine Variable b vorkommen und auch besondere Zahlzeichen; aber auch keine Gesamtheit von Zahlen.

Nun scheint es aber, als wäre damit etwas (aus der Logik) *weggeleugnet*. Etwa gerade die Allgemeinheit; oder das, was die Punkte andeuten. Das Unfertige (Lockere, Dehnbare) der Zahlenreihe.¹⁰ Und natürlich dürfen und können wir nichts wegleugnen. Wo kommt also diese Unbestimmtheit zum Ausdruck? Etwa so: Wenn wir Zahlen anführen, die wir statt der Variablen a einsetzen dürfen, so sagen wir von keiner, es sei die letzte, oder höchste.

Würde uns aber nun nach der Erklärung einer Rechnungsart jemand fragen „und ist nun 103 das letzte Zeichen, welches ich benützen kann“; was sollen wir antworten? „Nein, es ist nicht das letzte“, oder „es gibt kein letztes“? – Aber muß ich ihn nicht zurückfragen: „Und wenn es nicht das letzte ist, was käme dann noch?“ Und sagt er nun „104“, so müßte ich sagen: Ganz richtig, Du kannst die Reihe selber fortsetzen.

Von einem Ende der Möglichkeit kann ich überhaupt nicht reden.

344 (Nur vor dem Geschwätz muß man sich in der Philosophie hüten. Eine Regel aber, die praktisch anwendbar ist, ist immer in Ordnung.)

Es ist klar, daß man einer Regel von der Art $|a, \xi, \xi + 1|$ folgen kann; ich meine, ohne schon von vornherein die Reihe hinschreiben zu können, sondern, indem man wirklich der Bildungsregel folgt.¹¹ Es ist ja dann dasselbe, wie wenn ich eine Reihe etwa mit der Zahl 1 anfinde und sagte: „nun gib 7 dazu, multipliziere mit 5 und zieh' die Wurzel, und diese zusammengesetzte Operation wende immer wieder auf das¹² Resultat an“. (Das wäre ja die Regel $|1, \xi, \sqrt{(\xi + 7) \cdot 5}|$.)

Schließlich ist ja das Wort „u.s.w.“ nichts anderes, als das *Wort* „u.s.w.“ (d.h. wieder als ein Zeichen des Kalküls, das nicht mehr tun kann, als durch die Regeln zu bedeuten, die von ihm gelten. Das nicht mehr sagen kann, als es zeigt.)

D.h. es wohnt¹³ dem Wort „u.s.w.“ keine geheime Kraft inne, durch die nun die Reihe fortgesetzt wird, ohne fortgesetzt zu werden.

Das wohl nicht, wird man sagen, aber eben die Bedeutung der unendlichen Fortsetzung.

7 (V): einer

8 (V): und der Variablen.

9 (V): Existenz.

10 (V): Reihe.

11 (V): indem man sich wirklich nach der Bildungsregel richtet.

12 (V): ihr

13 (V): wohnt ~~in~~

likely means that the rules that apply to it agree up to a point, but not completely, with those that apply to an enumeration.

There is no intermediate thing between the particular enumeration and the general sign.⁵

Of course the natural numbers have only been written down up to a certain highest point, let's say 10^{10} . Now what constitutes the *possibility* of writing down numbers that haven't yet been written down? How odd is this feeling, as if in some way all of them already existed! (Frege said that a construction line was in a certain sense already there, even before it was drawn.)

The difficulty here is to defend oneself against the thought that possibility is a kind of shadowy reality.⁶

In the rules for the variable a , a variable b can occur, and so can particular numerals; but not any totality of numbers.

But now it seems as if in saying this, something (in logic) had been *flatly denied*. Say, generality itself; or what the dots signify. What is unfinished (loose, elastic) in the number series.⁷ And of course we may not and cannot deny anything. So how does this indeterminacy find expression? Perhaps thus: if we state the numbers we're allowed to substitute for the variable a , we don't say of any of them that it is the last, or the highest.

But what if someone asks us, after we've explained a form of calculation, "And is 103 the last sign I can use?" What are we to answer? "No, it isn't the last", or "There isn't any last one"? – Mustn't I ask him in turn: "And if it isn't the last, what might come next?" And if he says "104", I'd have to say: "Quite right, you can continue the series yourself".

In no way can I speak of an end to possibility.

(In philosophy the only thing one must guard against is prattle. But a rule that can be applied in practice is always in order.)

It is clear that we can follow a rule such as $|a, \xi, \xi + 1|$. I mean without being able to write down the series right from the start, but by actually following⁸ the rule for constructing the series. For in that case it's the same as if I were to begin a series, say, with the number 1 and were then to say "Now add 7, multiply by 5, find the square root of this, and apply this complex operation over and over again to the⁹ result". (That would be the rule $|1, \xi, \sqrt{(\xi + 7) \cdot 5}|$.)

After all, the word "etc." is nothing but the *word* "etc." (i.e. once again nothing but a sign in a calculus, which sign can do no more than have meaning via the rules that are valid for it. Which can't say more than it shows).

That is, there is no secret power inherent in the expression "etc.", by which the series is then continued without being continued.

Of course not, one will say, but what is inherent in it is precisely the meaning of infinite continuation.

5 (V): between a particular enumeration and the variable.

6 (V): existence.

7 (V): in the series.

8 (V): actually taking as a guideline

9 (V): its

Man könnte nun aber fragen: Wie kommt es, daß der, welcher die allgemeine Regel nun auf eine weitere Zahl anwendet, nur *dieser* Regel folgt. Daß keine weitere Regel nötig war, die ihm erlaubt, die allgemeine auch auf diesen Fall anzuwenden; und daß doch dieser Fall in der (allgemeinen) Regel nicht genannt war.

345 Es wundert uns also, daß wir diesen Abgrund zwischen den einzelnen Zahlen und dem allgemeinen Satz nicht überbrücken können.¹⁴

„Kann man sich einen leeren Raum vorstellen?“ (Diese Frage gehört merkwürdigerweise hierher.)

Es ist einer der tiefstwurzelnden Fehler der Philosophie, die Möglichkeit als einen Schatten der Wirklichkeit zu sehen.¹⁵

Andererseits aber kann es kein Irrtum sein. Und das ist es auch nicht, wenn man den Satz diesen Schatten nennt.

Die Gefahr ist natürlich hier wieder, in einen *Positivismus* zu verfallen, nämlich in einen, der einen eigenen Namen verdient und daher natürlich ein Irrtum sein muß. Denn wir dürfen überhaupt keine Tendenz haben, keine besondere Auffassung der Dinge, sondern müssen alles anerkennen, was jeder Mensch darüber je gesagt hat, außer soweit er selbst eine besondere Auffassung¹⁶ oder Theorie hatte.

Denn das Zeichen „u.s.w.“, oder ein ihm entsprechendes, ist wohl für die Bezeichnung der Endlosigkeit wesentlich. Natürlich durch die Regeln, die von einem solchen Zeichen gelten. D.h. wir können wohl das Reihenstück „1, 1 + 1, 1 + 1 + 1“ unterscheiden von der Reihe „1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, u.s.w.“. Und das letzte Zeichen und sein Gebrauch ist so wesentlich für den Kalkül, als irgend ein andres.¹⁷

Das, was mich nun bedrückt, ist, daß das „u.s.w.“ scheinbar auch in den Regeln für das Zeichen „u.s.w.“ vorkommen muß. Z.B. ist 1, 1 + 1, u.s.w. = 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, u.s.w. *u.s.w.*

346 Aber haben wir denn hier nicht die alte Erkenntnis, daß wir die Sprache nur von außen beschreiben können? Daß wir also nicht erwarten dürfen, durch eine Beschreibung der Sprache in andere Tiefen zu dringen, als die Sprache selbst offenbart: Denn die Sprache beschreiben wir mittels der Sprache.

Wir könnten sagen: Es ist ja gar kein Anlaß, zu fürchten, daß wir das Wort „u.s.w.“ in einer das Endliche übersteigenden Weise gebrauchen.

Übrigens kann der, für das „u.s.w.“ charakteristische Teil seiner Grammatik nicht in Regeln über die Verbindung von „u.s.w.“ mit einzelnen Zahlzeichen (nicht: „den einzelnen Zahlzeichen“) bestehen – denn diese Regeln geben ja wieder ein beliebiges Stück einer Reihe – sondern in Regeln der Verbindung von „u.s.w.“ mit „u.s.w.“.

Die Möglichkeit noch weitere Zahlen anzuführen. Die Schwierigkeit scheint uns die zu sein, daß die Zahlen, die ich tatsächlich angeführt habe, ja gar keine wesentliche Gruppe sind¹⁸ und nichts dies andeutet, daß sie eine *beliebige* Kollektion sind: *die zufällig aufgeschriebenen unter allen Zahlen.*

14 (O): kann.

15 (V): der Philosophie: die Möglichkeit als ein Schatten der Wirklichkeit.

16 (V): Auffassung ~~de~~

17 (V): als eines der vorhergehenden.

18 (V): angeführt habe, ja gar nicht wesentlich sind

But one could now ask: How does it happen that someone who applies the general rule to a further number is following only *this* rule? How does it happen that no further rule allowing him to apply the general rule to this additional case was necessary, even though this case wasn't mentioned in the (general) rule?

And so we are surprised that we can't bridge this abyss between individual numbers and the general proposition.

"Can one imagine an empty space?" (Strangely enough, this question belongs here.)

It is one of the most deep-rooted mistakes of philosophy to see possibility as a shadow of reality.¹⁰

But on the other hand it can't be an error. And neither is it an error if one calls the proposition such a shadow.

Here again, of course, there is the danger of lapsing into a kind of *positivism*, namely one that ought to have a name of its own and that consequently must certainly be an error. For we must not have any slant at all, any particular take on things, but must instead acknowledge everything that anyone has ever said on the topic, except in so far as he himself had a particular conception or theory.

For the sign "etc.", or one corresponding to it, *is* essential for indicating endlessness. Of course, through the rules that are valid for such a sign. That is, we *can* distinguish the part of the series, "1, 1 + 1, 1 + 1 + 1", from the series "1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, etc.". And this last sign and its use are as essential for the calculus as any other.¹¹

What disturbs me now is that the "etc." seemingly has to occur in the rules for the sign "etc." as well. For instance, $1, 1 + 1, \text{etc.} = 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1 \text{ etc., etc.}$

But isn't what we have here the old realization that we can describe language only from the outside? That therefore we mustn't expect that by describing language we shall penetrate to depths deeper than language itself reveals: for we describe language with language.

We could say: There's no reason to be afraid that we'll use the word "etc." in a way that transcends the finite.

By the way: the part of its grammar that is distinctive of "etc." can't consist in rules for connecting "etc." with individual numerals (not: "*the* individual numerals") – for such rules in turn represent an arbitrary part of a series – but rather, in rules for connecting "etc." with "etc.".

The possibility of listing additional numbers. The difficulty seems to be that the numbers I've listed are not in fact in any way an essential group,¹² yet nothing indicates that they are an *arbitrary* collection – *out of all the numbers, those that just happened to have been written down.*

10 (V): philosophy: possibility as a shadow of reality.

11 (V): as one of the preceding ones.

12 (V): are in no way essential,

(So, als hätte ich in einer Schachtel alle Steine eines Spiels und auf dem Tisch daneben eine zufällige Auswahl aus dieser Schachtel.

Oder, als wären die einen Ziffern in Tinte *nachgezogen*, während sie alle schon gleichsam blaß vorgezeichnet sind.)

Daß wir aber außer diesen zufällig benützten nur die allgemeine Form haben.

Haben wir hier übrigens nicht – so komisch das klingt – den Unterschied zwischen Zahlzeichen und Zahlen?

- 347 Wenn ich z.B. sage „Kardinalzahlen“ nenne ich alles, was aus 1 durch fortgesetztes Addieren von 1 entsteht“, so vertritt das Wort „fortgesetzt“ nicht eine nebelhafte Fortsetzung von 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, vielmehr ist auch das Zeichen „1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, . . .“ ganz exakt zu nehmen; als verschieden von „1, 1 + 1, 1 + 1 + 1“ anderen bestimmten Regeln unterworfen und nicht ein Ersatz¹⁹ einer Reihe „die sich nicht hinschreiben läßt“.

Das heißt: Mit dem Zeichen „1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, . . .“ wird auch *gerechnet*, wie mit (den) Zahlzeichen, nur nach andern Regeln.

Was bildet man sich denn aber ein? Welchen Fehler macht man denn? Wofür hält man das Zeichen „1, 1 + 1, . . .“? D.h.: wo kommt denn das *wirklich* vor, was man in diesem Zeichen zu sehen meint? Etwa, wenn ich sage „er zählte 1, 2, 3, 4 und so weiter bis 1000“? wo es auch möglich wäre, wirklich alle Zahlen hinzuschreiben.

Als was *sieht* man denn „1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, . . .“ an?

Als eine ungenaue Ausdrucksweise. Die Pünktchen sind so, wie weitere Zahlzeichen, die aber undeutlich sind. So, als hörte man auf, Zahlzeichen hinzuschreiben, weil man ja doch nicht alle hinschreiben kann, aber als seien sie wohl, gleichsam in einer Kiste vorhanden.²⁰ Etwa auch, wie wenn ich von einer Melodie nur die ersten Töne deutlich singe und den Rest nur noch andeute und in Nichts auslaufen lasse. (Oder wenn man beim Schreiben von einem Wort nur wenige Buchstaben deutlich schreibt und mit einem unartikulierten Strich endet.) *Wo dann dem „undeutlich“ ein „deutlich“ entspräche.*

- 348 Ich habe einmal gesagt, es könne nicht Zahlen geben *und* den Begriff der Zahl. Und das ist richtig, wenn es heißt, daß die Variable zur Zahl nicht so steht, wie der Begriff Apfel zu einem Apfel (oder der Begriff Schwert zu Nothung).²¹

Andererseits *ist die Zahlvariable kein Zahlzeichen.*

Ich wollte aber auch sagen, daß der Zahlbegriff nicht unabhängig von den Zahlen (gegeben) sein könnte, und das ist nicht wahr. Sondern die Zahlvariable ist in dem Sinne von einzelnen Zahlen unabhängig, als es einen Kalkül mit einer Klasse unsrer Zahlzeichen, und ohne die allgemeine Zahlvariable, wohl gibt. Freilich gelten dann eben nicht alle Regeln von diesen Zahlzeichen, die von unsern gelten, aber doch entsprechen sie unseren, wie die Damesteine im Damespiel denen im Schlagdamespiel.

Wogegen ich mich wehre, ist die Anschauung, daß eine²² unendliche Zahlenreihe etwas von Gegebenem sei, worüber es nun spezielle Zahlensätze und auch allgemeine Sätze über alle Zahlen der Reihe gibt. So daß der arithmetische Kalkül nicht vollständig wäre, wenn er nicht auch die allgemeinen Sätze über die Kardinalzahlen enthielte, nämlich allgemeine Gleichungen der Art $a + (b + c) = (a + b) + c$. Während schon $1 : 3 = 0,3$ einem andern

19 (V): Vertreter

20 (V): aber als seien sie allerdings, quasi, in einer Kiste, vorhanden.

21 (E): Nothung ist das Schwert Siegfrieds im *Nibelungenlied*.

22 (V): die

(As if I had all the pieces of a game in a box and next to it on the table an arbitrary selection from the box.

Or as if all the numerals had been faintly outlined, as it were, and then some of them had been *filled in* in ink.)

And nothing indicates that, apart from these numbers that we happen to have used, we have only the general form.

By the way, don't we have here the distinction between numerals and numbers, as funny as that may sound?

If I say, for example, "I call everything that results from continually adding 1 to 1 'cardinal numbers'", then the word "continually" doesn't stand for a nebulous continuation of $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1$; rather, the sign " $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots$ " is also to be taken as perfectly exact; as differing from " $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1$ ", as governed by different definite rules, and not as a replacement¹³ for a series "that can't be written down".

That means: We *calculate* with the sign " $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots$ " just as with (the) numerals, but in accordance with different rules.

But what is it that we delude ourselves about? What is the mistake that we make? What do we take the sign " $1, 1 + 1, \dots$ " for? That is: Where does what we think we see in this sign *really* occur? Perhaps when I say "He counted 1, 2, 3, 4 and so on up to 1,000"? Where it would also be possible actually to write down all the numbers?

What does one *see* " $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots$ " as?

As an inexact form of expression. The dots are like additional numerals, but ones that are indistinct. As if one stopped writing down numerals because to be sure one can't write them all down, but as if they were nevertheless there¹⁴ in a kind of box. Something like my singing only the first notes of a melody distinctly, and then merely hinting at the rest and letting it taper off into nothing. (Or if in writing a word one writes only a few letters distinctly and ends with an inarticulate line.) *Where a "distinctly" would be correlated with "indistinctly"*.

I once said that there couldn't be both numbers *and* the concept of number. And that is correct, if it means that a variable doesn't have the same relation to a number as the concept apple has to an apple (or the concept sword to Nothung¹⁵).

On the other hand, *a number-variable is not a numeral*.

But I also wanted to say that the concept of number couldn't be (given) independently of the numbers, and that isn't true. Rather a number-variable is independent of particular numbers in the same sense as a calculus with a class of our numerals and without the general number-variable really does exist. In that calculus, to be sure, not all the rules that are valid for our numerals are valid for these, but still the latter numerals correspond to ours as the pieces in draughts do to those in losing draughts.

What I am resisting is the view that an¹⁶ infinite number series is something given to us for which there are both particular number theorems and also general theorems about all numbers of the series. So that the arithmetical calculus wouldn't be complete if it didn't also contain the general theorems about cardinal numbers, i.e. general equations of the form $a + (b + c) = (a + b) + c$. Whereas $1 \div 3 = 0.\dot{3}$ already belongs to a different calculus from

13 (V): proxy

14 (V): they were indeed there

15 (E): Nothung is Siegfried's sword in the *Nibelungenlied*.

16 (V): the

Kalkül angehört als $1 : 3 = 0,3$. Und so ist eine allgemeine Zeichenregel (z.B. rekursive Definition), die für $1, (1) + 1, ((1) + 1) + 1, (((1) + 1) + 1) + 1^{23}$, u.s.w. gilt, etwas anders, als eine spezielle Definition. Und die allgemeine Regel fügt dem Zahlenkalkül etwas neues bei, ohne welches er ebenso vollständig gewesen wäre, wie die Arithmetik der Zahlenreihe $1, 2, 3, 4, 5$.

349 Es fragt sich auch, wo denn der Zahlbegriff (oder Begriff der Kardinalzahl) unbedingt gebraucht wird. Zahl, im Gegensatz wozu?

$|1, \xi, \xi + 1|$ wohl im Gegensatz zu $|5, \xi, \sqrt{\xi}|$ u.s.w. – Denn wenn ich so ein Zeichen (wie „ $|1, \xi, \xi + 1|$ “) wirklich einführe – und nicht nur als Luxus mitschleppe, so muß ich auch etwas mit ihm tun, d.h., es in einem Kalkül verwenden, und dann verliert es seine Alleinherrlichkeit und kommt in ein System ihm koordinierter Zeichen.

Man wird vielleicht sagen: aber „Kardinalzahl“ steht doch im Gegensatz zu „Rationalzahl“, „reelle Zahl“ etc. Aber dieser Unterschied ist ein Unterschied der Regeln (der von ihnen geltenden Spielregeln) – nicht einer, der Stellung auf dem Schachbrett – nicht ein Unterschied, für den man im selben Kalkül verschiedene koordinierte Worte braucht.

Man sagt „dieser Satz ist für alle Kardinalzahlen bewiesen“. Aber sehen wir doch nur hin, wie der Begriff der Kardinalzahl in den²⁴ Beweis eintritt. Doch nur, indem im Beweis von 1 und der Operation $\xi + 1$ die Rede ist – aber nicht im Gegensatz zu Etwas, was den Rationalzahlen entspräche. Wenn man also den Beweis in Prosa mit Hilfe des Begriffsworts „Kardinalzahl“ beschreibt, so sehen wir wohl, daß kein *Begriff* diesem Wort entspricht.

Die Ausdrücke „die Kardinalzahlen“, „die reellen Zahlen“ sind außerordentlich irreführend, außer, wo sie als Teil einer Bestimmung verwendet werden, wie in: „die Kardinalzahlen von 1 bis 100“, etc. „Die Kardinalzahlen“ gibt es nicht, sondern nur „Kardinalzahlen“ und den Begriff, die Form, „Kardinalzahl“. Nun sagt man: „die Zahl der Kardinalzahlen ist kleiner, als die der reellen²⁵ Zahlen“ und denkt sich, man könnte die beiden Reihen etwa nebeneinander schreiben (wenn wir nicht schwache Menschen wären) und dann würde die eine im Endlosen enden, während die andere ins wirklich-Unendliche über sie²⁶ hinaus liefe. Aber das ist alles Unsinn. Wenn von einer Beziehung, die man nach Analogie „größer“ und „kleiner“ nennen kann, die Rede sein kann, dann nur zwischen den Formen „Kardinalzahl“ und „reelle Zahl“.²⁷ Was eine Reihe ist, erfahre ich dadurch, daß man es mir erklärt und nur soweit, als man es erklärt. Eine endliche Reihe wurde mir durch Beispiele der Art $1, 2, 3, 4$ erklärt, eine endlose durch Zeichen der Art „ $1, 2, 3, 4$, u.s.w.“ oder „ $1, 2, 3, 4 \dots$ “.

Es ist wichtig, daß ich eine²⁸ Projektionsregel verstehen (sehen) kann, ohne sie in einer allgemeinen Notation vor mir zu haben. Ich kann aus der Reihe $\frac{1}{1} \frac{2}{4} \frac{3}{9} \frac{4}{16}$ eine allgemeine Regel entnehmen – freilich auch beliebig viele andere, *aber doch auch eine bestimmte* und das heißt, daß für mich diese Reihe irgendwie der Ausdruck dieser einen Regel war.²⁹

Hat man „intuitiv“ das Bildungsgesetz einer Reihe, z.B. der Reihe m verstanden, so daß man also im Stande ist, ein beliebiges $m_{(v)}$ zu bilden, so hat man das Bildungsgesetz *ganz* verstanden, also so gut, wie es etwa³⁰ eine algebraische Darstellung vermitteln könnte.

23 (O): $((1) + 1) + 1) + 1$

24 (V): ~~dem~~

25 (O): reellen

26 (V): die

27 (O): und reelle Zahl‘.

28 (V): die

29 (O): war.“

30 (V): es irgend

the one for $1 \div 3 = 0.3$. And thus a general rule for a sign (e.g. a recursive definition) that holds for $1, (1) + 1, ((1) + 1) + 1, (((1) + 1) + 1) + 1$, etc., is something different from a particular definition. And the general rule adds something new to the number calculus, without which it would have been just as complete as the arithmetic of the number series $1, 2, 3, 4, 5$.

There is also the question: Where is the concept of number (or of cardinal number) indispensable? Number, in contrast to what?

$|1, \xi, \xi + 1|$, no doubt in contrast to $|5, \xi, \sqrt{\xi}|$, etc. – For if I really do introduce such a sign (like “ $|1, \xi, \xi + 1|$ ”) and don’t just bring it along as a luxury, then I must do something with it, i.e. use it in a calculus, and then it loses its autocratic splendour and is put into a system of signs that are coordinated with it.

Perhaps someone will say: But “cardinal number” stands in contrast to “rational number”, “real number”, etc. But this distinction is a distinction among rules (the rules of games that apply to them) – not a distinction among positions on the chess board – not a distinction requiring different coordinated words in the same calculus.

We say: “This theorem has been proved for all cardinal numbers”. But let us just look at how the concept of cardinal numbers enters into the proof. Clearly only because 1 and the operation $\xi + 1$ are mentioned in the proof – and not in contrast to something that might correspond to rational numbers. So when we describe the proof in prose, with the help of the concept-word “cardinal number”, we see perfectly well that no *concept* corresponds to that word.

The expressions “the cardinal numbers”, “the real numbers”, are extraordinarily misleading except where they are used as part of a specification, such as in “the cardinal numbers from 1 to 100 ”, etc. There is no such thing as “the cardinal numbers”, but only “cardinal numbers” and the concept, the form, “cardinal number”. Now we say “the number of cardinal numbers is smaller than that of real numbers”, and we imagine that we could perhaps write the two series side by side (if we just weren’t weak humans) and then the one series would end in interminability, whereas the other would go beyond it into the actual infinite. But this is all nonsense. If we can talk of a relationship which by analogy can be called “larger” and “smaller”, it can only be a relationship between the forms “cardinal number” and “real number”. I find out what a series is by having it explained to me, and only to the extent that it is explained to me. A finite series was explained to me by examples of the type $1, 2, 3, 4$, an infinite one by signs of the type “ $1, 2, 3, 4$, etc.” or “ $1, 2, 3, 4 \dots$ ”.

It is important that I can understand (see) a¹⁷ rule of projection without having it in front of me in a general notation. I can infer a general rule from the series $\frac{1}{1}, \frac{2}{4}, \frac{3}{9}, \frac{4}{16}$, and to be sure, I can infer any number of others too, *but nevertheless I can also infer a particular rule*, and that means that for me this series was somehow the expression of this one rule.

If you have “intuitively” understood the law of the formation of a series, e.g., of the series m , so that you are therefore able to construct an arbitrary term $m_{(v)}$, then you have understood that law *completely*, that is to say, as well as an algebraic formulation, for example, could convey it.¹⁸ That is, you can’t understand it any better with such a formulation. And

17 (V): the

18 (V): as well as any algebraic formulation could convey it.

D.h. man kann es durch eine solche Darstellung nicht mehr besser verstehen. Und diese Darstellung ist daher *insofern* auch nicht *strenger*. Obwohl sie natürlich einprägsamer sein kann.

Man ist geneigt, zu glauben, daß die Notation, die eine Reihe durch Anschreiben einiger Glieder mit dem Zeichen „u.s.w.“ darstellt, wesentlich unexakt ist, im³¹ Gegensatz zur Angabe des allgemeinen Gliedes. Dabei vergißt man, daß die Angabe des allgemeinen Gliedes sich auf eine Grundreihe bezieht, welche nicht wieder durch ein allgemeines Glied beschrieben sein³² kann. So ist $2n + 1$ das allgemeine Glied der ungeraden Zahlen, wenn n die Kardinalzahlen durchläuft, aber es wäre Unsinn zu sagen, n sei das allgemeine Glied der Reihe der Kardinalzahlen. Wenn man diese Reihe erklären will, so kann man es nicht durch Angabe des „allgemeinen Gliedes n “, sondern natürlich nur durch eine Erklärung der Art $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \text{u.s.w.}$ Und es ist natürlich kein wesentlicher Unterschied zwischen dieser Reihe und der: $1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \text{u.s.w.}$, die ich ganz ebensogut als Grundreihe hätte annehmen³³ können (sodaß dann das allgemeine Glied der Kardinalzahlenreihe $\frac{n-1}{2}$ gelautet hätte).

$(\exists x). \phi x \ \& \ \sim(\exists x, y). \phi x \ \& \ \phi y$

$(\exists x, y). \phi x \ \& \ \phi y \ .\& \ \sim(\exists x, y, z). \phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z$

$(\exists x, y, z). \phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z \ .\& \ \sim(\exists x, y, z, u). \phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z \ \& \ \phi u$

»Wie müßte man es nun anfangen, die allgemeine Form solcher Sätze zu schreiben? Die Frage hat offenbar einen guten Sinn. Denn, wenn ich nur einige solcher Sätze als Beispiele hinschreibe, so versteht man, was das *Wesentliche* dieser Sätze sein soll.«

Nun, dann ist also die Reihe der Beispiele schon eine Notation; denn das Verstehen dieser Reihe besteht doch in der Verwendung dieses Symbols und darin, daß wir es von andern in demselben System unterscheiden, z.B. von:

$(\exists x). \phi x$

$(\exists x, y, z). \phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z$

$(\exists x, y, z, u, v). \phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z \ \& \ \phi u \ \& \ \phi v.$

Warum sollen wir aber nicht das allgemeine Glied der ersten Reihe *so* schreiben:

$(\exists x_1 \dots x_n). (\prod_{x_i} \phi x) \ \& \ (\exists x_1 \dots x_{n+1}). (\prod_{x_i} \phi x)?$

352 Ist diese Notation unexakt? Sie selbst soll ja nichts bildhaft machen, sondern nur auf die Regeln ihres Gebrauchs, auf das System, in dem sie gebraucht wird, kommt es an.³⁴ Die Skrupel, die ihr anhaften, schreiben sich von einem Gedankengang her, der sich mit der Zahl der Urzeichen in dem Kalkül der „Principia Mathematica“ beschäftigte.

31 (V): ist. Im

32 (V): ~~werden~~

33 (V): nehmen

34 (V): Gebrauchs, das System in die [sic] sie gebraucht wird, kommt es an.

therefore *to that extent* neither is this formulation *more rigorous*. Although of course it can be more easily remembered.

We are inclined to believe that the notation that represents a series by writing down a few terms along with the sign “etc.” is essentially inexact, as¹⁹ opposed to the statement of the general term. Believing this, we forget that the statement of the general term refers to a basic series that cannot in turn be described by a general term. Thus $2n + 1$ is the general term for the odd numbers, *when* n ranges over the cardinal numbers, but it would be nonsense to say that n was the general term of the series of cardinal numbers. If you want to define this series, you can’t do it by specifying “the general term n ”, but only by an explanation of the type $1 + 1, 1 + 1 + 1, \text{etc.}$ And of course there is no essential difference between this series and $1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \text{etc.}$, which I could just as well have adopted²⁰ as the basic series (so that then the general term of the cardinal number series would have read $\frac{n-1}{2}$).

- $(\exists x).\phi x \ \& \ \sim(\exists x,y).\phi x \ \& \ \phi y$
- $(\exists x,y).\phi x \ \& \ \phi y \ .\& \ \sim(\exists x,y,z).\phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z$
- $(\exists x,y,z).\phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z \ .\& \ \sim(\exists x,y,z,u).\phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z \ \& \ \phi u$

»How would one now go about writing the general form of such propositions? The question obviously makes good sense. For if I write down only a few such propositions as examples, one understands what the *essential element* in these propositions is supposed to be.«

Well, in that case the series of examples is already a notation. For understanding this series, after all, consists in the use of this symbol, and in our distinguishing it from others in the same system, e.g., from:

- $(\exists x).\phi x$
- $(\exists x,y,z).\phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z$
- $(\exists x,y,z,u,v).\phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z \ \& \ \phi u \ \& \ \phi v.$

But why shouldn’t we write the general term of the first series *this way*:

$$(\exists x_1 \dots x_n).(\prod_{x_i}^{x_i} \phi x) \ \& \ (\exists x_1 \dots x_{n+1}).(\prod_{x_i}^{x_{n+1}} \phi x)?$$

Is this notation inexact? After all, by itself it isn’t supposed to make anything graphic; rather, the only things that matter are the rules for its use, the system²¹ in which it is used. The scruples that adhere to it originate in a train of thought that occupied itself with the number of primitive signs in the calculus of *Principia Mathematica*.

19 (V): inexact. As

21 (V): only thing that matters is the system

20 (V): taken

**Erwartung.
Wunsch.
etc.**

Expectation.
Wish.
etc.

Erwartung: der Ausdruck der Erwartung. Artikulierte und unartikulierte Erwartung.

¹Kann man sagen, die Erwartung ist eine vorbereitende, erwartende, Handlung. – Es wirft mir jemand einen Ball, ich strecke die Hände aus und richte sie zum Erfassen des Balls. Aber sagen wir, ich hätte mich verstellt, ich hatte erwartet, daß er nicht werfen würde, wollte aber so tun, als erwartete ich den Wurf. Worin besteht dann mein Erwarten, daß er nicht werfen wird, wenn meine Handlung die gegenteilige Erwartung ausdrückt? Sie² mußte doch auch in etwas bestehen, was ich tat. Ich war also doch irgendwie nicht drauf vorbereitet, daß der Ball kam.

³Es ist sehr trivial, wenn ich sage, daß ich in der Erwartung eines Flecks die Erwartung eines kreisförmigen von der eines elliptischen⁴ muß unterscheiden können und es überhaupt so viele Unterschiede in der Erwartung geben muß, wie in den Erfüllungen der Erwartungen. (Der Hunger und der Apfel, der ihn befriedigt, haben nicht die gleiche Multiplizität.)

354v Wenn wir⁵ wissen wollen was die Worte „ich erwarte daß er kommt“ bedeuten, – fragen wir uns: Was ist das Kriterium dafür, daß, was wir tun ist, ihn zu erwarten.

Wie⁶ wissen wir, daß wir ihn erwarten?

355 ⁷Nehmen wir an, ich erwarte jemand: ich sehe auf die Uhr, dann zum Fenster hinaus, richte etwas in meinem Zimmer zurecht, schaue wieder hinaus, etc. Diese Tätigkeit könnte ich das Erwarten nennen. Denke ich nun die ganze Zeit dabei? (D.h. ist diese Tätigkeit wesentlich eine Denktätigkeit, oder von ihr begleitet?) Letzteres bestimmt nicht. Und wenn ich jene Tätigkeiten Denken nenne, welches wären die Worte, durch die dieser Gedanke ausgedrückt würde? – Wohl aber werden auch Gedanken während dieses Wartens sich einfänden. Ich werde mir *sagen*: „vielleicht ist er zu Hause aufgehalten worden“, und drgl. mehr; vielleicht auch die artikulierte Erwartung „wenn er nur käme“.

In allen jenen erwartenden Handlungen ist nichts, was uns interessiert (die Erfüllung der Erwartung in diesem Sinn ist nichts anderes, als die Stillung eines Hungers). Uns interessiert nur das zu einem Zweck gemachte Bild. – Der *artikulierte* Gedanke.

⁸Es ist – glaube ich, – wichtig zu erkennen, daß, wenn ich etwa glaube, daß jemand zu mir kommen wird, mein Dauerzustand nichts mit dem Betreffenden und den übrigen Elementen des Gedankens zu tun hat, d.h. sie nicht *enthält*. Das Gleiche gilt aber für

1 (M): ✓ (R): ∇ S. 154/2✓, 6✓

2 (V): Diese

3 (M): ///

4 (O): eliptischen

5 (V): wir ~~die Worte~~ „ich

6 (V): Wie weiß

7 (M): ✓

8 (M): ✓

Expectation: the Expression of Expectation. Articulate and Inarticulate Expectation.

¹Can one say that expectation is a preparatory, expectant action? Someone throws me a ball and I stretch out my hands preparing to catch it. But let's say that I had dissimulated: I had expected that he wouldn't throw it, but wanted to act as if I were expecting the throw. What does my expectation that he won't throw it consist in when my action expresses the opposite expectation? It² too had to consist in something I did. So in some way I wasn't prepared for the ball coming towards me after all.

³It's quite trivial to say that in expecting a spot I have to be able to distinguish the expectation of a circular spot from that of an elliptical one; and that in general there have to be as many differences in expectation as there are in what fulfils the expectations. (Hunger and the apple that satisfies it do not have the same multiplicity.)

If we⁴ want to know what the words "I'm expecting him to come" mean – we ask ourselves: What is the criterion for what we're doing being a case of expecting him?

How do we know that we're expecting him?

⁵Let's assume that I'm expecting someone: I look at my watch, then out of the window, straighten up something in my room, look out again, etc. I could call this activity "expecting". Now am I thinking all this while? (That is to say, is this activity essentially a mental activity, or is it accompanied by one?) Certainly not the latter. And if I do call these activities thinking, what words would be used to express this thought? – But thoughts will no doubt turn up during this wait. I'll *say* to myself: "Maybe he's been held up at home" and other such things; maybe I'll also articulate my expectation: "If only he'd come".

In all of these actions of expecting there is nothing that interests us (the fulfilment of the expectation is in that sense no different from the satisfaction of hunger). All that interests us is the image that was created for a purpose. – The *articulated* thought.

⁶It is important to realize – I think – that when for example I believe that someone will be coming to see me, my ongoing state has nothing to do with the person in question and the other elements of the thought, i.e. that my occurrent state doesn't *contain* them. But the

1 (M): ✓ (R): ∇ p. 154/2 ✓, 6 ✓

2 (V): This

3 (M): ///

4 (V): If †

5 (M): ✓

6 (M): ✓

Erwartung, Wunsch, etc. etc. Wenn ich jemand erwarte, so denke ich nicht während dieser ganzen Zeit, daß er kommen wird, oder dergleichen. Ja selbst, wenn ich es gerade denke, so ist ja dieser Vorgang kein amorpher, wie etwa der des Schmerzes, sondern besteht nur darin, daß ich etwa jetzt gerade den Satz sage, „er wird kommen“. Man kann nicht *amorph* sehen, daß etwas der Fall ist, glauben, daß etwas der Fall ist, wünschen, befürchten, denken, etc.

⁹Der Ausdruck der Erwartung ist die Erwartung.

356 Die Vorbereitung ist quasi selbst die Sprache und kann nicht über sich selbst hinaus. (In dem „nicht über sich selbst hinauskönnen“ liegt die Ähnlichkeit meiner Betrachtungen und jener der Relativitätstheorie.)

¹⁰Wenn ich früher gesagt habe, es kommt darauf an, ob *dieses* Bild erwartet wird, d.h., ob wir gerade dieses Bild „verwenden“ („benützen“) so könnte ich jetzt sagen, es kommt darauf an, ob gerade *dieses* Bild zu unserer Sprache gehört.¹¹

Die Sprache als *Ausdruck* der Erwartung ist das Vorbereitete.

9 (M): ✓
10 (M): ///

11 (V): Bild unsere Sprache ist.

same goes for expectation, wish, etc., etc. When I'm expecting someone I'm not thinking all the while that he'll come, or some such thing. Indeed, even when I *am* thinking this, this process is not amorphous, like that of pain, but consists only in my saying, perhaps just now, the sentence "He'll come". You can't *amorphously* see that something is the case, believe that something is the case, wish, fear, think, etc.

⁷The expression of expectation is expectation.

In a way preparation is itself language, and it can't get beyond itself. (The similarity of my observations to those of the theory of relativity lies in this "not being able to get beyond themselves".)

⁸If I said earlier that what is important is whether *this* image is expected, i.e. whether we "use" ("utilize") this particular image, I could say now that what is important is whether *this* particular image belongs to our language.⁹

Language as an *expression* of expectation is what is prepared.

7 (M): ✓
8 (M): ///

9 (V): image is our language.

357 In der Erwartung wurde *das* erwartet,
was die Erfüllung brachte.

¹Die Erwartung und die Tatsache, die die Erwartung befriedigt, passen doch irgendwie zusammen. Man soll nun eine Erwartung beschreiben, und eine Tatsache, die zusammenpassen, damit man sieht, worin diese Übereinstimmung besteht. Da denkt man sofort an das Passen einer Vollform in eine entsprechende Hohlform. Aber wenn man nun hier die beiden beschreiben will, so sieht man, daß, soweit sie passen, eine Beschreibung für beide gilt. Vergleiche das Passen eines Hutes zu einem Kleid.

²Kann man den Vorgang des Verständnisses eines Befehls mit dem Vorgang der Befolgung³ vergleichen, um zu zeigen, daß *diese* Befolgung *diesem* Verständnis, dieser Auffassung, wirklich entspricht? und inwiefern sie übereinstimmen? Gewiß, – nämlich z.B. die Auffassung „p“⁴ mit der Befolgung p. „Ich habe mir das heller vorgestellt.“ Aber nicht die Vorstellung ist als solche heller als die Wirklichkeit.

358 ⁵Kann man denn die Erwartung mit der eingetroffenen Tatsache *vergleichen*? Man sagt ja, die Tatsache stimme mit der Erwartung überein oder nicht überein. Aber dieses Übereinstimmen bezieht sich nicht auf Eigenschaften der Erwartung als solcher (des Vorgangs der Erwartung) und Eigenschaften des Ereignisses als Realität.

Kann man eine Hohlform mit einer Vollform vergleichen.

⁶(Es ist aber nicht so als ob ich sagte: „ich habe Lust auf einen Apfel, was immer also diese Lust stillen wird, werde ich einen Apfel nennen“. (Also etwa auch ein Schlafmittel.))

⁷Das Seltsame ist ja darin ausgedrückt, daß, wenn dies⁸ der Fleck ist, den ich erwartet habe, er sich nicht von dem unterscheidet, den ich erwartet habe. Wenn man also fragt: „Wie unterscheidet sich denn der Fleck von dem, den Du erwartet hast, denn in Deiner Erwartung war doch der wirkliche Fleck nicht vorhanden, sonst hättest Du ihn nicht erwarten können“, so ist die Antwort dennoch: der Fleck *ist* der, den ich erwartet habe.

⁹Ich sage „genau so habe ich mir’s vorgestellt“. Und jemand antwortet etwa „das ist unmöglich, denn das eine war eine Vorstellung und das andere ist keine; und hast Du etwa Deine Vorstellung für Wirklichkeit gehalten?“

¹⁰„Ich erwarte mir einen Schuß.“ Der Schuß fällt. Wie, das hast Du Dir erwartet; war also dieser Krach irgendwie schon in Deiner Erwartung? „Der Knall ist leiser als ich mir ihn erwartet

1 (M): ✓ (R): ∇ S. 185/2

2 (M): ///

3 (V): Befolgung †

4 (O): Auffassung p⁴

5 (M): ///

6 (M): ✓

7 (M): ✓

8 (V): das

9 (M): ✓

10 (M): ✓

What Fulfilment Brought: *that* was what was Expected in Expectation.

¹Expectation and the fact that fulfils expectation do, after all, go together. Now to see what this correspondence consists in we are supposed to describe an expectation and a fact that goes with it. In this situation we immediately think of a convex shape fitting into a corresponding concave shape. But if we then want to describe the two shapes, we see that in so far as they fit into each other, the same description is valid for both. Compare a hat matching a dress.

²Can one compare the process of understanding a command with that of executing it to show that *this* act of execution really corresponds to *this* understanding, *this* interpretation – and to show in which respect they correspond? Certainly – that is, one can for example compare the understanding of “p” with the execution of p. “I imagined that as brighter.” But it isn’t the mental image itself that is brighter than reality.

³Can one really *compare* expectation with the fact that has occurred? One does say that a fact matches or doesn’t match an expectation. But this matching doesn’t refer to properties of expectation itself (properties of the process of expectation), nor to properties of the actual event.

Can one compare a concave shape with a convex one?

⁴(But it isn’t as if I said: “I have a craving for an apple, so whatever will satisfy this craving I’ll call an apple”. (Say, a sleeping pill as well.))

⁵The oddity is expressed in the fact that if this⁶ is the spot I expected, it doesn’t differ from the one I expected. So if one asks: “How *does* the spot differ from the one you were expecting? (for after all, the real spot wasn’t present in your expectation; otherwise you wouldn’t have been able to expect it)”, then all the same the answer is: The spot *is* the one I expected.

⁷I say: “That’s exactly the way I imagined it”. And someone might respond: “That’s impossible, because the one thing was a mental image and the other isn’t; and did you perhaps take your mental image for reality?”

⁸“I’m expecting a shot.” The shot rings out. So *that* was what you expected? So was this report somehow already present in your expectation? “The report is quieter than I expected” –

1 (M): ✓ (R): ∇ p. 185/2

2 (M): ///

3 (M): ///

4 (M): ✓

5 (M): ✓

6 (V): that

7 (M): ✓

8 (M): ✓

359 habe“ – „Hat es also in Deiner Erwartung lauter geknallt?“ Oder stimmt Deine Erwartung nur in anderer Beziehung mit dem Eingetretenen überein, war dieser Lärm nicht in Deiner Erwartung enthalten und kam nur als *Accidens* hinzu, als die Erwartung erfüllt wurde? Aber nein, wenn der Lärm nicht eingetreten wäre, so wäre meine Erwartung nicht erfüllt worden; der Lärm hat sie erfüllt, er kam nicht zu der Erfüllung *hinzu* wie ein zweiter Gast zu dem einen, den ich erwartete.

¹¹War das am Ereignis, was nicht auch in der Erwartung war, ein *Accidens*, eine Beigabe der Schickung?¹² Aber was war denn dann *nicht* Beigabe, kam denn irgend etwas vom Schuß schon in meiner Erwartung vor? Und was war denn Beigabe, denn hatte ich mir nicht den ganzen Schuß erwartet.

¹³Unterscheidet sich etwa ein vorgestellter Ton¹³ von dem gleichen, wirklich gehörten durch die Klangfarbe?!

¹⁴Es hat auch einen Sinn zu sagen, es sei nicht das geschehen, was ich erwartet habe, sondern etwas ähnliches; im Gegensatz aber zu dem Fall, wenn *das* geschieht, was erwartet wurde. Und das zeigt, welcher Art der Mißbrauch der Sprache ist, zu dem¹⁵ wir hier verleitet werden.

¹⁶Wenn man nun sagte: Das Rot, das Du Dir vorstellst,¹⁷ ist doch gewiß nicht dasselbe (dieselbe Sache) wie das, was Du wirklich vor Dir siehst, – wie kannst Du dann sagen „das ist dasselbe, was ich mir vorgestellt habe“? – Zeigt denn das nicht nur, daß, was ich „dieses Rot“ nenne, eben das ist, was meiner Vorstellung und der Wirklichkeit gemein ist? Denn das Vorstellen des Rot ist natürlich anders als das Sehen des Rot, aber darum heißt ja auch das eine „Vorstellen eines roten Flecks“ und das andre „Sehen eines roten Flecks“. In beiden (verschiedenen) Ausdrücken aber kommt dasselbe Wort „rot“ vor und so muß dieses Wort nur das bezeichnen, was *beiden* Vorgängen zukommt.

360 Ist es denn nicht dasselbe in den Sätzen „hier ist ein roter Fleck“ und „hier ist kein roter Fleck“? In beiden kommt das Wort „rot“ vor, *also* kann dieses Wort nicht das Vorhandensein von etwas Rotem bedeuten. – (Der Satz „das ist rot“ ist nur *eine* Anwendung des Wortes „rot“, gleichberechtigt mit allen anderen, wie mit dem Satz „das ist nicht rot“.)

(Das Wort „rot“ hat eben – wie jedes Wort – nur im Satzzusammenhang eine Funktion. Und ist das Mißverständnis das, in dem Wort allein schon den Sinn¹⁸ eines Satzes zu sehen glauben?)

¹⁹Wie komisch wäre es, zu sagen: ein Vorgang sieht anders aus, wenn er geschieht, als wenn er nicht geschieht. Oder: „Ein roter Fleck sieht anders aus, wenn er da ist, als wenn er nicht da ist, aber die Sprache abstrahiert von diesem *Unterschied*, denn sie spricht von einem roten Fleck, ob er da ist oder nicht“.

²⁰Wie unterscheidet sich das Rot eines Flecks, den wir vor uns sehen, von dem *dieses* Flecks, wenn wir ihn uns bloß vorstellen? – Aber wie wissen wir denn, daß es das Rot *dieses* Flecks ist, wenn es (von dem Ersten) verschieden ist? – Woher wissen wir denn, daß es dasselbe

11 (M): ✓
 12 (V): Beigabe des Schicksals
 13 (M): ///
 14 (M): ///
 15 (V): welchem

16 (M): ✓
 17 (O): vorstellt,
 18 (V): Sinn \neq
 19 (M): ✓
 20 (M): ///

“So was there a louder report in your expectation?” Or is it only in a different respect that your expectation corresponds to what happened? Was this noise not contained in your expectation, and did it merely accidentally supervene when the expectation was fulfilled? Certainly not – if the noise hadn’t occurred my expectation wouldn’t have been fulfilled; the noise fulfilled it; it didn’t just accompany the fulfilment, as a second guest accompanies the one I was expecting.

⁹Was the part of the event that wasn’t also in my expectation an accidental property, something extra contributed by providence¹⁰? But if so, then what *wasn’t* extra? Was there anything about the shot that had already occurred within my expectation? And what *was* extra, anyway, for hadn’t I expected the whole shot?

¹¹Does an imagined tone perhaps differ in timbre from the same tone that’s actually heard?!

¹²It also makes sense to say that what happened was not what I had expected, but something similar; but this would be in contrast to the case where precisely *what* was expected happens. And this shows into what kind of misuse of language we are here being lured.

¹³Now if one were to say: But surely the red you are imagining isn’t the same (the same thing) as the one you’re actually seeing in front of you – so how can you say “That is the same red I imagined”? – Doesn’t that merely show that what I am calling “this red” is precisely what is common to my mental image and reality? For of course imagining red is different from seeing it, but that’s the very reason the one thing is called “imagining a red patch” and the other “seeing a red patch”. But the same word “red” occurs in both (different) expressions, and so this word has to designate what belongs to *both* processes.

Isn’t it the same in the sentences “There’s a red patch here” and “There’s no red patch here”? The word “red” occurs in both sentences, and *therefore* it can’t mean the presence of something red. – (The sentence “That is red” is only *one* application of the word “red”, no more privileged than any other, including the sentence “That isn’t red”).

(As with any word, the word “red” has a function only in the context of a sentence. And is this the misunderstanding: To think you are already seeing the sense of a sentence in the word alone?)

¹⁴How funny it would be to say: An occurrence looks different when it happens from when it doesn’t happen. Or: “A red patch looks different when it is there from when it isn’t there, but language abstracts from this *difference*, for it talks about a red patch whether it’s there or not”.

¹⁵How does the red of a patch that we see in front of us differ from the red of this patch when we are merely imagining it? – But how do we know, anyway, that it is the red of *this*

9 (M): ✓

10 (V): fate

11 (M): ///

12 (M): ///

13 (M): ✓

14 (M): ✓

15 (M): ///

Rot ist, wenn es nicht dasselbe ist?²¹ – Dieser Galimathias²² zeigt, daß hier ein Mißbrauch der Sprache vorliegt.

²³Wie ist es möglich, daß ich erwarte, und das, was ich erwarte, kommt? Wie konnt' ich es erwarten, da es nicht da war?

Die Realität ist keine Eigenschaft, die dem Erwarteten noch fehlt und die nun hinzutritt, wenn es eintritt. – Sie ist auch nicht wie das Tageslicht, das den Dingen erst ihre Farbe gibt, wenn sie im Dunkeln schon gleichsam farblos vorhanden sind.

361 Wie konnte ich *es* erwarten, und *es* kommt dann wirklich; – als ob die Erwartung ein dunkles Transparent wäre und mit der Erfüllung das Licht dahinter angezündet würde. – Aber jedes solche Gleichnis ist falsch, weil es die Realität als einen²⁴ beschreibbaren Zusatz zur Erwartung²⁵ darstellt; was unsinnig ist.

(Es ist das im Grunde derselbe Unsinn, wie der, der die vorgestellte Farbe als *matt* im Vergleich zur wirklichen darstellt.)

²⁶Du siehst also, möchte ich sagen, an diesen Beispielen, wie die Worte wirklich gebraucht werden.

²⁷Ich habe etwas vorausgesagt, es tritt nun ein, und ich sage nun einfach „*es* ist eingetroffen“ und das beschreibt schon den Tatbestand vollkommen. Er ist also auch jetzt nur so weit beschrieben, als man ihn auch hat beschreiben können, ehe²⁸ er eingetreten war.

²⁹Wenn ich einfach sagen kann „*es* ist eingetroffen“ so kann ich *andrerseits* nicht³⁰ beschreiben, wie ein Tatbestand sein muß, um eine bestimmte Erwartung zu befriedigen.

³¹Das Befolgen des Befehls liegt darin, daß ich etwas tue – Kann ich aber auch sagen, „daß ich das tue, was er befiehlt“? Gibt es ein Kriterium dafür, daß das die Handlung ist, die ihn befolgt?

Was soll hier unter einem Kriterium verstanden werden.

³²Die Erwartung verhält sich eben zu ihrer Befriedigung nicht wie der Hunger zu seiner Befriedigung. Ich kann sehr wohl den Hunger beschreiben und das, was ihn stillt, und sagen, daß es ihn stillt.

362 ³³Wenn ich ein Ereignis erwarte und es kommt dasjenige, welches meine Erwartung erfüllt, hat es dann einen Sinn zu fragen, ob das wirklich das Ereignis ist, welches ich erwartet habe. D.h., *wie würde ein Satz, der das behauptet, verifiziert werden?*

³⁴„Wie weißt Du, daß Du einen *roten* Fleck erwartest?“ – d.h. „wie weißt Du, daß ein roter Fleck die Erfüllung dessen ist, was Du Dir erwartest“. Aber ebensogut könnte man fragen, „wie weißt Du, daß das ein roter Fleck *ist*?“

Wie weißt Du, daß, was Du getan hast, wirklich war, das Alphabet im Geist herzusagen? – Aber wie weißt Du, daß, was Du hersagst, nun wirklich das Alphabet³⁵ *ist*?

21 (V): es verschieden ist?

22 (O): Callimathias

23 (M): ✓

24 (V): Realität einen

25 (V): Zusatz zum Gedanken

26 (M): ✓

27 (M): ///

28 (V): bevor

29 (M): ///

30 (V): *andrerseits* nicht auch

31 (M): ///

32 (M): ✓

33 (M): ///

34 (M): ✓

35 (V): Alphabet ~~is~~?

patch, if it is different (from the first)? – How do we know that it’s the same red if it isn’t the same?¹⁶ – This gibberish shows that here there’s a misuse of language.

¹⁷How is it possible for me to expect something, and for what I am expecting to happen? How was I able to expect it, since it wasn’t here?

Reality isn’t a property that is missing so long as something is expected, and that then joins it when it happens. – Neither is it like daylight, which endows things with their colour, whereas in the dark they are actually in a colourless state, as it were.

How could I expect *it* and then *it* really happens? – as if expectation were a dark transparency and in fulfilling it a light were switched on behind it. – But every simile of that sort is wrong, because it portrays reality as a describable addendum to expectation,¹⁸ which is nonsense.

(This is essentially the same kind of nonsense as representing the imagined colour as *dull*, compared to the real one.)

¹⁹So in these examples, I’m inclined to say, you see how words are really used.

²⁰I predicted something and then it happens, and now I simply say “*It* has happened”, and that in itself describes the state of affairs perfectly. So even now it has only been described to the extent that was possible before it had happened.

²¹Although I can simply say “It has happened”, I can’t on the other hand²² describe what a state of affairs must be like in order to satisfy a particular expectation.

²³Obedying a command consists in my doing something. – But can I also say “that I am doing what it commands”? Is there a criterion for this being the act that obeys the command?

What is to be understood here by a criterion?

²⁴Expectation doesn’t relate to its fulfilment the way hunger does to its satisfaction. I can quite easily describe hunger and what satisfies it, and I can say that it satisfies it.

²⁵If I am expecting an event and what fulfils my expectation happens, does it then make sense to ask whether that really is the event I was expecting? That is, *how would a proposition that makes that claim be verified?*

²⁶“How do you know that you’re expecting a *red* patch?” – i.e. “How do you know that a red patch is the fulfilment of what you’re expecting?” But one could just as well ask “How do you know that that *is* a red patch?”

How do you know that what you did really was to recite the alphabet in your head? – But how do you know that what you are reciting really *is* the alphabet?

16 (V): if it’s different?

17 (M): ✓

18 (V): to thought;

19 (M): ✓

20 (M): ///

21 (M): ///

22 (V): I can’t on the other hand also

23 (M): ///

24 (M): ✓

25 (M): ///

26 (M): ✓

Das ist natürlich die gleiche Frage wie: Woher weißt Du, daß, was Du rot nennst, wirklich dasselbe ist, was der Andre so nennt. Und die eine Frage ist ebenso unsinnig wie die andere.³⁶

³⁷Was immer ich über die Erfüllung der Erwartung sagen mag, was sie zur Erfüllung dieser Erwartung machen soll, zählt sich zur Erwartung, ändert den *Ausdruck* der Erwartung. D.h., der Ausdruck der Erwartung ist der *vollständige* Ausdruck der Erwartung.

³⁸Wenn ich sage „das ist dasselbe Ereignis, welches ich erwartet habe“ und „das ist dasselbe Ereignis, was auch an jenem Ort stattgefunden hat“, so bedeutet hier das Wort „dasselbe“ jedesmal etwas anderes. (Man würde auch normalerweise nicht sagen „das ist dasselbe, was ich erwartet habe“, sondern „das ist das, was ich erwartet habe“.)³⁹

36 (O): wie andere.

37 (M): XXX

38 (M): XXX

39 (R): \forall S. 23/3 ✓

Of course that is the same question as: How do you know that what you are calling red is really the same thing as what someone else calls red? And the one question is just as nonsensical as the other.

²⁷Whatever I might say about the fulfilment of expectation, what is supposed to turn it into the fulfilment of this expectation counts as part of the expectation. It changes the *expression* of the expectation. That is, the expression of expectation is the *complete* expression of expectation.

²⁸If I say “That’s the same event I was expecting” and “That’s the same event that also happened at that other place”, then the words “the same” mean something different in the two cases. (Furthermore, normally one wouldn’t say “That’s the same thing I was expecting”, but “That’s what I was expecting”.)²⁹

27 (M): XXX

28 (M): XXX

29 (R): \forall p. 23/3 ✓

„Wie kann man etwas
wünschen, erwarten, suchen,
was nicht da ist?“
Mißverständnis des „etwas“.

¹Es könnte gesagt werden: Wie kann ich denn das Ereignis erwarten, es ist ja noch garnicht da?

²Man kann sich vorstellen, es sei etwas der Fall, was nicht ist: sehr merkwürdig! Denn, daß die Vorstellung nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmt, ist nicht merkwürdig, daß sie sie aber dann repräsentiert, ist merkwürdig.

³Sokrates: Wer also vorstellt, was nicht ist, der stellt nichts vor? – Theaitetos: So scheint es. – S: Wer aber nichts vorstellt, der wird gewiß überhaupt garnicht vorstellen? – Th.: Offenbar, wie wir sehen.⁴

Setzen wir in diesem Argument und dem ihm vorhergehenden statt⁵ „vorstellen“ etwa „töten“,⁶ so läuft es auf eine Regel der Verwendung dieses Wortes hinaus. Es hat keinen Sinn zu sagen⁷ „ich töte⁸ etwas, was nicht existiert“.

364 Ich kann mir einen Hirsch auf dieser Wiese vorstellen, der nicht da ist, aber keinen töten, der nicht da ist. – ⁹Und sich einen Hirsch vorstellen, der nicht da ist, heißt, sich vorstellen, daß ein Hirsch da ist, obwohl keiner da ist. Einen Hirsch töten aber, heißt nicht: töten, daß ein Hirsch da ist.¹⁰ Wenn aber jemand sagt: „um mir einen Hirsch vorzustellen, muß es ihn doch in einem gewissen Sinne geben“, so ist die Antwort: nein, es muß ihn dazu in keinem Sinne *geben*. Und wenn darauf gesagt würde: Aber z.B. die braune Farbe muß es doch geben, damit ich mir sie vorstellen kann, so ist zu sagen: „Es gibt die braune Farbe“ heißt überhaupt nichts, außer etwa, daß sie da oder dort¹¹ als Färbung eines Gegenstandes (Flecks) erscheint¹² und das ist nicht nötig, damit ich mir einen braunen Hirsch vorstellen kann.“

¹³„Ich stelle mir vor, wie das sein wird“ (wenn der Sessel weiß gestrichen sein wird) – wie kann ich es mir denn vorstellen, wenn es nicht ist?! Ist denn die Vorstellung eine Zauberei?

1 (M): ✓

2 (M): ///

3 (M): ✓

4 (E): Platon, *Theaitetos*, 189a.

5 (V): Setzen wir in diesem Argument statt

6 (V): „zerschneiden“,

7 (V): hinaus. Man dürfe nicht sagen:

8 (V): zerschneide

9 (M): XXX – Hirsch da ist.

10 (V): ist (also: verschiedene grammatische Regeln).

11 (V): dort d

12 (V): auftritt

13 (M): ///

“How can one Wish for,
Expect, Look for, Something
that isn’t There?”
Misunderstanding of the
“Something”.

¹It could be said: How *can* I expect an event, since it isn’t even here yet?

²One can imagine that something that is the case doesn’t exist: quite remarkable! For it isn’t remarkable that a mental image doesn’t correspond to reality; what is, is that it then represents it.

³Socrates: So whoever imagines what doesn’t exist, imagines nothing?

Theaetetus: So it seems.

Socrates: But he who imagines nothing certainly doesn’t imagine at all?

Theaetetus: Evidently, as we see.⁴

If in this and in the previous argument⁵ we put, say, “kill”⁶ in place of “imagine”, then that amounts to a rule for the use of this word. It makes no sense to say: “I’m killing⁷ something that doesn’t exist”.

I can imagine a stag on this meadow that isn’t there but I can’t kill one that isn’t there. – ⁸And to imagine a stag that isn’t there means to imagine that a stag is there even though there is none there. But to kill a stag does not mean: to kill that a stag is there.⁹ But if someone says: “In order for me to imagine a stag it must exist in a certain sense”, then the answer is: No, for this to happen it doesn’t have to *exist* in any sense. And if in answer to that someone said: But the colour brown, for example, must exist for me to be able to imagine it, then one ought to say: “The colour brown exists’ means nothing at all, except maybe that it appears here and there as the colour of an object (of a patch), but that isn’t necessary for me to be able to imagine a brown stag.”

¹⁰“I’m imagining what it will be like” (for the chair to be painted white) – how *can* I imagine it if it isn’t the case?! Is imagination perhaps a magic trick?

1 (M): ✓

2 (M): ///

3 (M): ✓

4 (E): Plato, *Theaetetus*, 189a.

5 (V): If in this argument

6 (V): “cut up”

7 (V): word. One is not allowed to say: “I’m cutting up

8 (M): XXX – is there.

9 (V): there. (~~thus: various grammatical rules~~).

10 (M): ///

¹⁴Man möchte fragen: Welcher außerordentliche Prozeß muß das Wollen sein, daß ich *das* schon jetzt wollen kann, was ich erst in 5 Minuten tun werde?!

¹⁵Die Antwort: Wenn Dir das sonderbar vorkommt, so vergleichst Du es mit etwas, womit es nicht zu vergleichen ist. – ¹⁶Etwa damit: Wie kann ich jetzt dem Mann die Hand geben, der erst in 5 Minuten hereintreten wird? (Oder etwa gar: Wie kann ich dem die Hand geben, den es¹⁷ vielleicht gar nicht gibt?)

365 ¹⁸Das „foreshadowing“ der Tatsache besteht offenbar darin, daß wir jetzt denken können, daß *das* eintreffen wird, was erst eintreffen *wird*. Oder, wie das irreführend ausgedrückt wird: daß wir (an) *das* denken können, was erst eintreffen *wird*.

¹⁹„Wenn immer ich über die Erfüllung eines Satzes rede, rede ich über sie im Allgemeinen. Ich *beschreibe* sie in irgendeiner Form. Ja, es liegt diese Allgemeinheit schon darin, daß ich die Beschreibung zum Voraus geben kann und jedenfalls unabhängig von dem Eintreten der Tatsache.“

364v Wir sagen, daß der Ausdruck der Erwartung die erwartete Tatsache beschreibt & denken an sie wie an einen Gegenstand oder Komplex der mit²⁰ der Erfüllung der Erwartung in die Erscheinung tritt.²¹

365 ²²Wenn wir sagen, daß wir die Tatsachen auf „allgemeine Art“ beschreiben,²³ so setzen wir diese Art im Geiste einer andern entgegen. (Diese Entgegenstellung nehmen wir aber natürlich von wo anders her.) Wir denken uns, daß bei der Erfüllung etwas Neues entsteht und nun da ist, was früher nicht da war. Das heißt, wir denken an einen Gegenstand oder Komplex, auf den wir nun zeigen können, beziehungsweise, der sich nun selbst repräsentieren kann, während die Beschreibung nur sein Bild war. Wie wenn ich den Apfel, der auf diesem Zweig wachsen wird, zum Voraus gemalt hätte, nun aber er selber kommt. Man könnte dann sagen, die Beschreibung des Apfels war allgemein, d.h. mit Wörtern, Farben, etc. bewerkstelligt, die schon vor dem Apfel und nicht speziell für ihn da waren. Gleichsam altes Gerümpel im Vergleich mit dem wirklichen Apfel. Vorläufer,²⁴ die alle abdanken müssen, wenn der Erwartete (selber) kommt.

²⁵Aber *der Erwartete* ist nicht die Erfüllung, sondern: daß er gekommen ist.

366 ²⁶Dieser Fehler ist tief in unserer Sprache verankert: Wir sagen „ich erwarte ihn“ und „ich erwarte sein Kommen“ und „ich erwarte, daß er kommt“.

²⁷Die Tatsache wird allgemein beschrieben heißt, sie wird aus alten Bestandteilen zusammengesetzt.

Sie wird beschrieben, das ist so, als wäre sie uns, außer durch die Beschreibung, noch anders gegeben.

²⁸Hier wird die Tatsache mit einem Haus oder einem sonstigen²⁹ Komplex gleichgestellt.

14 (M): ✓

15 (R): ∇ S. 23/2, 3✓

16 (M): ///

17 (V): ~~sie~~

18 (M): ✓

19 (M): ///

20 (V): bei

21 (V): Komplex der in die Erscheinung tritt.

22 (M): ///

23 (V): Wenn man sagt, daß die Tatsache auf „allgemeine Art“ beschrieben wird,

24 (V): Vorbilder,

25 (M): ✓

26 (M): ✓

27 (M): ////

28 (M): ///

29 (V): andern

¹¹One would like to ask: What kind of an extraordinary process must wanting be for me to be able to want now to do *what* I won’t do for another five minutes?!

¹²The answer: If that seems strange to you then you’re comparing it to something it can’t be compared to. – ¹³Say, with: How can I now shake the hand of the man who won’t arrive for another five minutes? (Or even: How can I shake the hand of someone who perhaps doesn’t exist at all?)

¹⁴The “foreshadowing” of a fact obviously consists in our being able to think now that *that* will happen which only *will* happen. Or as this is misleadingly expressed: in that we can think (of) *what* only *will* happen.

¹⁵“Whenever I talk about the fulfilment of a proposition I am talking about it in general. I’m *describing* it in some form. Indeed, this generality is already contained in my being able to provide the description in advance, and in any case independently, of the occurrence of the fact.”

We say that the expression of the expectation describes the expected fact, and we think of it as we think of an object or complex that enters the picture when the expectation is fulfilled.¹⁶

¹⁷When we say that we describe facts¹⁸ in a “general way”, then mentally we contrast that way with a different one. (But of course we’re taking this contrast from somewhere else.) We imagine that at the moment of fulfilment something new comes into being and is here which wasn’t here before. That is, we think of an object or complex to which we can now point, or which can now represent itself, whereas the description was merely its image. As if I had painted the apple that will grow on this branch in advance, but now it appears itself. Then one could say that the description of the apple was general, i.e. was brought about with words, colours, etc. that were already here before the apple, and weren’t created especially for it. Stuff, as it were, in comparison to the real apple. Precursors¹⁹, all of whom must abdicate when the Expected One (himself) arrives.

²⁰But *the Expected One* is not the fulfilment; rather: it is the fact that he has come.

²¹This mistake is deeply rooted within our language: We say “I’m expecting him” and “I’m expecting his arrival” and “I’m expecting that he’ll come”.

²²“The fact is described in general terms” means: it is cobbled together out of old parts. *It* is described: that’s as if it were given to us in a way other than through description.

²³Here a fact is equated to a house, or to some other²⁴ complex.

11 (M): ✓

12 (R): √ p. 23/2, 3 ✓

13 (M): ///

14 (M): ✓

15 (M): ///

16 (V): that enters the picture.

17 (M): ///

18 (V): When one says that the fact is described

19 (V): Prefigurations

20 (M): ✓

21 (M): ✓

22 (M): ////

23 (M): ///

24 (V): or with another

³⁰Noch einmal der Vergleich: der Mensch tritt ein – das Ereignis³¹ tritt ein: Als wäre das Ereignis³² schon vorgebildet vor der Tür der Wirklichkeit und würde nun in diese eintreten, wenn es³³ eintritt.

³⁴Das ganze Problem der Bedeutung der Worte ist darin aufgerollt, daß ich den A suche, *ehe* ich ihn gefunden habe. – Es ist darüber zu sagen, daß ich ihn suchen kann, auch wenn er in gewissem Sinne nicht existiert.

Wenn wir sagen, ein Bild ist dazu³⁵ nötig, wir müssen in irgend einem Sinne ein Bild von ihm herumtragen, so sage ich: vielleicht; aber was hat es für einen Sinn, zu sagen, es sei ein Bild von *ihm*. Das hat also auch nur einen Sinn, wenn ich ein weiteres Bild von ihm habe, das dem Wort „ihm“ entspricht.

367 ³⁶Man sagt etwa: Wenn ich von der Sonne spreche, muß ich ein Bild der Sonne in mir haben. – Aber wie kann man sagen, daß es ein Bild der Sonne ist. Hier wird doch die Sonne wieder erwähnt, im Gegensatz zu ihrem Bilde. Und damit ich sagen kann: „das ist ein Bild der Sonne“, müßte ich ein weiteres Bild der Sonne besitzen. u.s.w.

³⁷Man könnte nur sagen: Wenn er von der Sonne spricht, muß er ein visuelles Bild (oder Gebilde von der und der Beschaffenheit – rund, gelb, etc.) vor sich sehen. Nicht, daß das wahr ist, aber es hat Sinn, und dieses Bild ist dann ein Teil des Zeichens.

³⁸Wie seltsam, ich kann ihn suchen, wenn er nicht da ist, aber ich kann nicht auf ihn zeigen, wenn er nicht da ist. Das ist eigentlich das Problem des Suchens und zeigt den irreführenden Vergleich.

Man könnte sagen wollen: da muß er doch auch dabei sein, wenn ich ihn suche. – Dann muß er auch dabei sein, wenn ich ihn nicht finde, und auch, wenn es ihn nicht gibt.

³⁹*Ihn* (etwa meinen Stock) suchen, ist eine Art des Suchens und unterscheidet sich davon, daß man etwas andres sucht, durch das, was man beim Suchen tut (sagt, denkt), nicht durch das, was man findet.

⁴⁰Und trage ich beim Suchen ein Bild mit mir oder eine Vorstellung, nun gut. Und sage ich, das Bild sei das Bild des Gesuchten, so sagt das nur, welchen Platz das Bild im Vorgang des Suchens einnimmt. Und finde ich ihn und sage „da ist er! *den* habe ich gesucht“, so sind die letzten Worte nicht etwa eine Worterklärung für die Bezeichnung des gesuchten Gegenstandes (etwa für die Worte „mein Stock“), die erst jetzt, wo er gefunden ist, gegeben werden kann.⁴¹ – Wie man das, was man wünscht, nach der Erfüllung des Wunsches nicht besser weiß, oder erklären kann, als vorher.

368 ⁴²Man kann den Dieb nicht hängen *ehe* man ihn hat, wohl aber schon suchen.

⁴³„Du hast *den* Menschen gesucht? Wie war das möglich, er war doch gar nicht da!“

⁴⁴„Ich suche meinen Stock. – Da ist er!“ Dies letztere ist keine Erklärung des Ausdrucks „mein Stock“, die für das Verständnis des ersten Satzes wesentlich wäre und die ich daher

30 (M): ✓

31 (V): Mensch tritt ein – die Tatsache

32 (V): wäre die Tatsache

33 (V): sie

34 (M): ✓

35 (V): ~~dann~~

36 (M): ///

37 (M): ///

38 (M): ✓

39 (M): ✓

40 (M): ✓

41 (V): könnte.

42 (M): ✓

43 (M): ✓

44 (M): ///

²⁵Once again the comparison: A person comes in – an event²⁶ comes about. As if the event²⁷, already pre-formed, were standing outside the door of reality, and then entered into reality when it occurred.

²⁸The entire problem of the meaning of words is laid out in the fact that I look for *A* before I have found him. – In this connection we can say that I can look for him even if in a certain sense he doesn’t exist.

If we say that we need a picture to do this,²⁹ that in some sense we have to be carrying a picture of him around with us, then I say: Maybe, but what’s the point of saying that it’s a picture of *him*? That too makes sense only if I have an additional picture of him that corresponds to the word “him”.

³⁰One might say: If I’m going to talk about the sun I have to have a picture of the sun within me. – But how can one say that it is a picture of the sun? For here the sun, as opposed to its picture, is mentioned once again. And in order for me to say “That’s a picture of the sun” I’d have to possess an additional picture of the sun. Etc.

³¹All one can say is: If he’s talking about the sun he must be seeing a visual image (or a configuration of such and such qualities – round, yellow, etc.) in his mind’s eye. Not that this is true, but it makes sense, and then this image is part of the sign.

³²How strange that if he isn’t here I can look for him, but not point to him. That is really the problem of looking for something, and it shows the misleading comparison.

One might want to say: If I’m looking for him then surely he too has to be part of the process. – Then he also has to be part of the process if I don’t find him, and even if he doesn’t exist.

³³Looking for *it* (say my cane) is a kind of looking, and it differs from looking for something else because of what one does (says, thinks) while looking, not because of what one finds.

³⁴And if while I’m looking I carry a picture or a mental image around with me, fine. And if I say that that picture is a picture of what I’m looking for, then that simply expresses the place that the picture occupies in the process of looking. And if I find the object and say “Here it is! *This* is what I’ve been looking for”, then these last words are in no way a verbal explanation of the term for the object I was looking for (say of the words “my cane”), such that the explanation can³⁵ only be given now that it has been found. – Just as one doesn’t know or can’t explain what one wishes for any better after the wish has been fulfilled than before.

³⁶You can’t hang the thief before you’ve caught him, but you *can* be looking for him.

³⁷“You were looking for *that* man? How was that possible, he wasn’t even there!”

³⁸“I’m looking for my cane. – Here it is!” The latter is not an explanation of the expression “my cane” that’s essential to understanding the first sentence, and that therefore

25 (M): ✓

26 (V): in – the fact

27 (V): the fact

28 (M): ✓

29 (V): that a picture is ~~then~~ necessary,

30 (M): ///

31 (M): ///

32 (M): ✓

33 (M): ✓

34 (M): ✓

35 (V): could

36 (M): ✓

37 (M): ✓

38 (M): ///

nicht hätte geben können, ehe mein Stock gefunden war. Vielmehr muß der Satz „da ist er“, wenn er nicht eine Wiederholung der (auch) früher möglichen Worterklärung ist, ein neuer synthetischer Satz sein.

⁴⁵Das Problem entspricht einer Verwechslung eines⁴⁶ Wortes oder Ausdrucks mit dem Satz, der die Existenz, das Dasein, des Gegenstands behauptet.

⁴⁷„Den hast Du gesucht? Du konntest ja nicht einmal wissen, ob er da ist!“ (Vergleiche dagegen das Suchen nach der Dreiteilung des Winkels.)

⁴⁸Auch haben wir hier die Verwechslung zwischen der Bedeutung und dem Träger eines Wortes. Denn der Gegenstand, auf den ich bei dem Worte „den“ zeige, ist der Träger des Namens, nicht seine Bedeutung.

⁴⁹Kurz: ich suche den Träger des Namens, nicht dessen⁵⁰ Bedeutung.⁵¹

Aber andererseits: ich suche und hänge den Träger des Namens.⁵²

369 Man kann von dem Träger des Namens sagen, daß er (existiert oder) nicht existiert, und das ist natürlich keine Tätigkeit, obwohl man es mit einer verwechseln könnte und sagen, er müsse doch dabei sein, wenn er nicht existiert. (Und das ist von einem Philosophen bestimmt schon einmal geschrieben worden.)

⁵³(„Ich suche ihn“. – „Wie schaut er aus“. – „Ich weiß es nicht, aber (ich bin sicher) ich werde ihn wiedererkennen, wenn ich ihn sehe“.)

⁵⁴Der Gedanke, daß uns (erst) das Finden sagt,⁵⁵ was wir erwartet haben, heißt, den Vorgang so beurteilen, wie etwa die *Symptome der Erwartung* bei einem Andern. Ich sehe ihn etwa unruhig auf und ab gehen; da kommt jemand zur Tür herein und er wird ruhig und gibt Zeichen der Befriedigung; und nun sage ich: „er hat offenbar diesen Menschen erwartet“.

⁵⁶Die „Symptome der Erwartung“ sind nicht der Ausdruck der Erwartung.

Und zu glauben, ich wüßte erst nach dem Finden, was ich gesucht (nach der Erfüllung, was ich gewünscht) habe, läuft auf einen unsinnigen „behaviourism“ hinaus.

⁵⁷„Ich wünsche mir eine gelbe Blume“. – „Ja, ich gehe und suche Dir eine gelbe Blume. Hier habe ich eine gefunden“. – Gehört die Bedeutung von „gelbe Blume“ mehr zum letzten Satz, als zu den zwei vorhergehenden?

⁵⁸Die Bedeutung des Wortes „gelb“ ist nicht die Existenz eines gelben Flecks: Das ist es, was ich über das Wort „Bedeutung“ sagen⁵⁹ möchte.

370 ⁶⁰Die Vorstellung, die mit dem Wort rot verbunden ist, ist gewiß die, welche der Tatsache entspricht, daß etwas rot ist, – nicht die, die der Tatsache entspricht, daß etwas blau, also *nicht rot* ist. Statt der Worterklärung „das ↑ ist rot“ sollte ich sagen „so sieht es aus, wenn etwas rot ist“. Ja, die Vorstellung rot ist die Vorstellung, daß etwas rot ist. Und darauf beruht jene Verwechslung von Wort und Satz, von der ich früher sprach.«

45 (M): ✓

46 (V): ~~des~~

47 (M): ✓

48 (M): ///

49 (M): ////

50 (V): seine

51 (V): nicht die Bedeutung des Namens.

52 (M): (?)

53 (M): ///

54 (M): + ✓

55 (V): zeigt,

56 (M): ✓

57 (M): ///

58 (M): ///

59 (V): ~~suchen~~

60 (M): ///

I couldn’t have given before my cane had been found. Rather, the sentence “Here it is”, if it isn’t a repetition of a verbal explanation that could (also) have been given earlier, must be a new synthetic proposition.

³⁹This problem is equivalent to confusing a word or expression with a proposition that asserts the existence, the being, of an object.

⁴⁰“You were looking for *him*? You couldn’t even know whether he was there!” (Compare, on the other hand, looking for the trisection of an angle.)

⁴¹Here we also have the confusion of the meaning and the bearer of a word. For the object to which I point when I say “*that*” is the bearer of the name, not its meaning.

⁴²In short: I’m looking for the bearer of the name and not its meaning.⁴³
But on the other hand: I look for and hang the bearer of the name.⁴⁴

You can say of the bearer of a name that he (exists or) doesn’t exist, and of course that’s no activity, even though you could confuse it with one and say that he has to be involved if he doesn’t exist. (And most certainly that has been written by some philosopher at some point.)

⁴⁵(“I’m looking for him.” – “What does he look like?” – “I don’t know, but (I’m sure) I’ll recognize him when I see him.”)

⁴⁶The idea that it’s only finding something that tells⁴⁷ us what we have been expecting means that one judges this process as one judges, say, the *symptoms of expectation* in someone else. I might see him nervously pacing up and down; then someone comes in the door and he quiets down and shows signs of satisfaction; and then I say: “Evidently he was expecting this person”.

⁴⁸The “symptoms of expectation” aren’t the expression of expectation.

And to think that I couldn’t know what I had been looking for until after I had found it (what I had wished for until after it had been fulfilled) amounts to a nonsensical form of “behaviourism”.

⁴⁹“I wish I had a yellow flower”. – “Fine, I’ll go and look for one for you. Here, I’ve found one.” – Does the meaning of “yellow flower” belong more closely to the last sentence than to the first two?

⁵⁰The meaning of the word “yellow” is not the existence of a yellow patch: That is what I would like to say⁵¹ about the word “meaning”.

⁵²»The mental image that’s connected with the word red is certainly the one that corresponds to the fact that something is red – and not the one that corresponds to the fact that something is blue, i.e. *not red*. Instead of the verbal explanation “That ↑ is red” I should say “This is what it looks like when something is red”. Indeed, the mental image red is the mental image that something is red. And that is the basis of the confusion of word and proposition that I spoke of earlier.«

39 (M): ✓

40 (M): ✓

41 (M): ///

42 (M): ////

43 (V): and not the meaning of the name.

44 (M): (?)

45 (M): ///

46 (M): + ✓

47 (V): shows

48 (M): ✓

49 (M): ///

50 (M): ///

51 (V): **seek**

52 (M): ///

369v Könnte man zur Erklärung des Wortes „rot“ auf etwas hinweisen⁶¹ was *nicht rot* ist? Wie wenn man einem, der der deutschen Sprache nicht mächtig ist das Wort „bescheiden“ erklären sollte & man zeigte dazu auf einen sehr arroganten⁶² Menschen & sagte zur Erklärung:⁶³ „der ist das Gegenteil von bescheiden“. Es ist kein Argument gegen diese Erklärungsweise daß sie⁶⁴ vieldeutig ist. Mißverstanden werden kann jede Erklärung.

370 Das Mißverständnis äußert sich auch darin, daß es doppelsinnig ist vom „Vorkommen von rot“ zu reden.⁶⁵ In dem einen Fall heißt es, daß sowohl da wie dort etwas *rot ist* – d.h. die Eigenschaft rot hat. In dem andern handelt es sich nicht um eine Gemeinsamkeit der Farbe (die ja durch eine Farbangabe ausgedrückt würde).

Diese Gemeinsamkeit ist eben die Harmonie von⁶⁶ Wirklichkeit⁶⁷ und Gedanken, der⁶⁸ in Wahrheit eine Form⁶⁹ unserer Sprache⁷⁰ entspricht.⁷¹

61 (V): weisen,

62 (V): unbescheidenen

63 (V): & sagte:

64 (V): sie ~~mißverstehen~~

370 65 (V): Und hier ist, glaube ich, ein Hauptstoß zum Mißverständnis, daß das „Vorkommen von rot“ in zwei Tatbeständen als deren gemeinsamer Bestandteil einen doppelten Sinn

hat. // daß es einen doppelten Sinn hat, wenn ich vom „Vorkommen . . .“ rede.

66 (V): zwischen

67 (V): Welt

68 (V): ~~die~~

69 (V): Regel

70 (V): Ausdrucksweise

71 (V): und Gedanken, die nicht zu beschreiben ist.

Could you point to something that *isn’t red* to explain the word “red”? What if you were supposed to explain the meaning of the word “modest” to someone who didn’t know English, and to do this you were to point to a very arrogant⁵³ person and explain:⁵⁴ “He’s the opposite of modest”. That this way of explaining is ambiguous⁵⁵ isn’t an argument against it. Any explanation can be misunderstood.

A misunderstanding also comes out in the fact that talking about the “occurrence of red” is ambiguous.⁵⁶ In the one case it means that both here as well as there, something *is red* – i.e. has the property red. In the other case it is not a matter of a commonality of colour (which would, after all, be expressed by a specification of colour).

This commonality is precisely the harmony of⁵⁷ reality and⁵⁸ thought, to which a form of our language⁵⁹ in fact corresponds.⁶⁰

53 (V): immodest

54 (V): and say:

55 (V): explaining can be ~~misunderste~~

56 (V): And here, I believe, is the main trigger of a misunderstanding: that “The occurrence of red”, as the common component of two sets of circumstances, is ambiguous. // : that there

is an ambiguity in speaking about the “occurrence of red”.

57 (V): between

58 (V): harmony between world and

59 (V): a rule of our mode of expression

60 (V): thought, which cannot be described.

371 ¹Im Ausdruck der Sprache berühren
sich Erwartung und Erfüllung.

²In der Sprache berühren sich Erwartung und Ereignis.

³„Ich sagte, ‚geh‘ aus dem Zimmer‘ und er ging aus dem Zimmer“.

„Ich sagte, ‚geh aus dem Zimmer‘ und er ging langsam aus dem Zimmer“.

„Ich sagte, ‚geh aus dem Zimmer‘ und er sprang zum Fenster hinaus“.

Hier ist eine Rechtfertigung möglich, auch wo die Beschreibung der Handlung nicht die ist, die der Befehl gibt.

⁴Es ist doch offenbar nicht undenkbar,⁵ daß Einer die gelbe Blume so mit einem Phantasiebild sucht, wie ein Anderer mit dem farbigen Täfelchen, oder ein Dritter in irgendeinem Sinne, mit dem Bild einer Reaktion, die durch das, was er sucht, hervorgerufen werden soll (Klingel).

372 Womit immer aber er suchen geht (mit welchem Paradigma immer), nichts zwingt ihn, das als das Gesuchte anzuerkennen, was er am Schluß wirklich anerkennt, und die Rechtfertigung in Worten, oder andern Zeichen, die er dann von dem Ergebnis⁶ gibt, rechtfertigt wieder nur in⁷ Bezug auf eine andere Beschreibung in derselben Sprache.

⁸Die Schwierigkeit ist aufzuhören, „warum“ zu fragen (ich meine, sich dieser Frage zu enthalten).

⁹Du befiehlst mir „bringe mir eine gelbe Blume“; ich bringe eine und Du fragst: „warum hast Du mir so eine gebracht?“ Dann hat diese Frage nur einen Sinn, wenn sie zu ergänzen ist „und nicht eine von dieser (andern) Art“.

D.h., diese Frage bezieht sich schon auf¹⁰ ein System; und die Antwort muß¹¹ sich auf das gleiche System beziehen.

¹²Auf die Frage „warum tust Du *das* auf meinen Befehl?“ kann man fragen: „was?“

Da wäre es nun absurd zu fragen „warum bringst Du mir eine gelbe Blume, wenn ich Dir befohlen habe, mir eine gelbe Blume zu bringen“. Eher könnte man fragen „warum bringst Du eine rote Blume, wenn ich sagte, Du solltest¹³ eine gelbe bringen“ oder „warum bringst Du eine dunkelgelbe auf den Befehl ‚bring‘ eine gelbe?“

1 (M): ✓

2 (M): ✓

3 (M): ////

4 (M): ////

5 (V): unmöglich,

6 (V): Resultat

7 (V): ~~im~~

8 (M): ///

9 (M): ////

10 (V): Frage gehört schon in

11 (V): muß ~~man~~

12 (M): ////

13 (V): solltest

¹Expectation and Fulfilment Make Contact in Linguistic Expression.

²Expectation and event make contact *in language*.

³“I said, ‘Leave the room’ and he left the room.”

“I said, ‘Leave the room’ and he left the room slowly.”

“I said, ‘Leave the room’ and he jumped out of the window.”

A justification is possible here, even when the description of the action isn’t the same as that given by the command.

⁴In looking for a yellow flower, it’s obviously in no way inconceivable⁵ that one person might use a mental image, just as another might use a colour chip, or a third person might – in some way – use the image of a reaction that will be triggered by what he is looking for (a bell).

But whatever he uses in his search (whatever paradigm), nothing forces him to acknowledge what in the end he actually acknowledges as the thing he was looking for, and the justification he then gives for the result, whether in words or other signs, once again only justifies that thing in reference to a different description in the same language.

⁶The difficulty is to stop asking “Why?” (I mean, to abstain from this question).

⁷You give me the command “Bring me a yellow flower”; I bring one and you ask: “Why did you bring me one like that?” This question only makes sense if it is to be supplemented by “and not one of this (other) kind”.

That is, this question already refers to⁸ a system; and the answer has to refer to the same system.

⁹When asked “Why are you doing *this* in response to my command?” one can respond: “What?”

In this case it would be absurd to ask “Why are you bringing me a yellow flower when I ordered you to bring me a yellow flower?”. More likely one *could* ask “Why are you bringing a red flower when I said you should bring a yellow one?” or “Why are you bringing a dark yellow flower in response to the order ‘Bring a yellow one?’”

1 (M): ✓

2 (M): ✓

3 (M): ////

4 (M): ////

5 (V): impossible

6 (M): ///

7 (M): ////

8 (V): already belongs in

9 (M): ////

¹⁴Noch einmal: was ist das Kriterium dafür, daß der Befehl richtig ausgeführt wurde? Was ist das Kriterium, nämlich auch für den Befehlenden? Wie kann *er* wissen, daß der Befehl nicht richtig ausgeführt wurde. Angenommen, er ist von der Ausführung befriedigt und sagt nun: „von dieser Befriedigung lasse ich mich aber nicht täuschen, denn ich weiß, daß doch nicht das geschehen ist, was ich wollte“. Er erinnert sich in irgend einem Sinne daran, wie er den Befehl gemeint hatte. – In welchem Sinne? Woran erinnere ich mich, wenn ich mich 373 erinnere, *das* gewünscht zu haben.

¹⁵Man hat vielleicht das Gefühl: es kann doch nicht im Satz „ich glaube, daß p der Fall ist“ das „p“ dasselbe bedeuten, wie in der Behauptung „p“, weil ja in der Tatsache des Glaubens, daß p der Fall ist, die Tatsache daß p der Fall ist, nicht enthalten ist.

¹⁶Man hat das Gefühl, daß ich mich im Satz „ich erwarte, daß er kommt“ der Worte „er kommt“ in anderem Sinne bediene, als in der Behauptung „er kommt“. – Aber wäre es so, wie könnte ich davon reden, daß meine Erwartung durch die Tatsache befriedigt ist?

¹⁷Nun könnte man aber fragen: Wie schaut das aus, wenn er kommt? – „Es geht die Tür auf und ein Mann tritt herein, der . . .“. Wie schaut das aus, wenn ich erwarte, daß er kommt? – „Ich gehe auf und ab, sehe auf die Uhr, . . .“. – Aber der eine Vorgang hat ja mit dem anderen¹⁸ nicht die geringste Ähnlichkeit! Wie kann man dann dieselben Worte zu ihrer 372v Beschreibung gebrauchen? Diesen Vorgang würde ich nicht mit den Worten „ich erwarte daß er kommt“ beschreiben. Worin läge es denn z.B. daß ich gerade *ihn* erwarte? Ich sagte doch der Vorgang 373 der Erwartung sollte ein solcher sein, daß ich, ihn sehend, erkennen müßte was erwartet wird. Aber, auf-und-abgehen konnte ich ja auch, ohne zu erwarten,¹⁹ daß er kommen werde, auf die Uhr sehen auch, etc.; das ist also nicht das Charakteristische des Erwartens, daß er kommt. Das Charakteristische aber ist nur eben durch diese Worte gegeben. Und „er“ heißt dasselbe, wie in der Behauptung „er kommt“ und „kommt“ heißt dasselbe, wie in der Behauptung, und ihre Zusammenstellung bedeutet nichts anderes. D.h. z.B.: *eine* hinweisende Erklärung des Wortes „er“ gilt für beide Sätze.

²⁰Wenn ich $\sim p$ glaube, so glaube ich dabei nicht zugleich p, weil „p“ in „ $\sim p$ “ vorkommt. 374 p kommt in $\sim p$ in demselben Sinne vor, wie $\sim p$ in p.

Die Worte „vorkommen“ etc. sind eben unbestimmt, wie alle solche Prosa. Exakt und unzweideutig und unbestreitbar sind nur die grammatischen Regeln, die am Schluß zeigen müssen, was gemeint ist.

14 (M): ///

15 (R): [Zu: Behauptung, etc.]

16 (M) ✓

17 (M): ✓

18 (O): mit anderen

19 (V): warten,

20 (R): [Zu: Behauptung, etc.]

¹⁰Once again: What is the criterion for the command having been carried out correctly? That is, what is the criterion even for the person who gives the command? How can *he* know that the command was not carried out correctly? Let's assume that he's satisfied with the execution of his command, and he says: But I'm not going to be fooled by this satisfaction, for I know that what I wanted still hasn't happened. In some sense he remembers how he had meant the command. – In what sense? What do I remember when I remember that I wanted *that*?

¹¹Perhaps one has the feeling: In the sentence "I believe that p is the case", "p" cannot possibly mean the same thing as in the assertion "p", because the fact that p is the case is not contained in the fact that I believe that p is the case.

¹²One has the feeling that in the sentence "I expect that he's coming" I use the words "he's coming" in a different sense than in the assertion "He's coming". – But if this were so, how could I talk about my expectation having been satisfied by the fact?

¹³But now one could ask: What does it look like for him to come? – "The door opens and a man comes in who . . .". What does it look like when I'm expecting him to come? – "I pace back and forth, look at my watch, . . .". – But the one sequence of events doesn't have even the remotest similarity to the other! So how can one use the same words to describe them? I wouldn't use the words "I'm expecting that he is coming" to describe the one sequence of events. What would my expecting *him* and no one else, for example, consist in? I did say, after all, that the process of expectation should be of such a kind that in seeing it I would have to recognize what is being expected. Surely I could pace back and forth without expecting¹⁴ him to come, as well as look at my watch, etc.; so that isn't what characterizes expecting him to come. What *does* characterize it is given just by these very words. And "he" means the same thing as in the assertion "He is coming", and "is coming" means the same thing as in that assertion, and their combination means nothing different. That is to say: *one* ostensive explanation of the word "he" is good for both propositions.

¹⁵If I believe $\sim p$, then in that process I don't simultaneously believe p, just because "p" occurs in " $\sim p$ ".

p occurs in $\sim p$ in the same sense as $\sim p$ occurs in p.

The words "to occur", etc., are simply indefinite, as is all such prose. The only things that are exact and unambiguous and indisputable are the grammatical rules, which in the end must show what is meant.

10 (M): ///

11 (R): [To: Assertion, etc.]

12 (M): ✓

13 (M): ✓

14 (V): without waiting for

15 (R): [To: Assertion, etc.]

375 „Der Satz bestimmt, welche
 Realität ihn wahr macht.“
 Er scheint einen Schatten dieser
 Realität zu geben. Der Befehl scheint
 seine Ausführung in schattenhafter
 Weise voranzunehmen.

374v Denn es ist also als ob dieses Etwas, die Handlung, ein Ding wäre das¹ in der Befolgung des Befehls in die Existenz treten sollte & als ob der Befehl uns eben dieses Ding kennen lehrte,² zeigte, so daß er es also schon in irgend einem Sinne in die Existenz rief.³

Wie kann der Befehl die Erwartung uns den Menschen zeigen ehe er in unser Zimmer eingetreten ist?!

375 ⁴Die Beschreibung der Sprache muß dasselbe leisten wie die Sprache.

⁵Denn dann kann ich wirklich aus dem Satz, der Beschreibung der⁶ Wirklichkeit, ersehen, wie es sich in der Wirklichkeit verhält.

⁷(Aber nur *das* nennt man ja „Beschreibung“ und nur *das* nennt man ja „ersehen, wie es sich verhält“!)

⁸(Und etwas anderes ist es ja nicht, was wir alle damit sagen: daß wir aus der Beschreibung ersehen, wie es sich in Wirklichkeit verhält.)

⁹„Du beziehst von dem Befehl die Kenntnis dessen, was Du zu tun hast.

Und doch gibt Dir der Befehl nur sich selbst, und seine *Wirkung* ist gleichgültig.“

376 ¹⁰Das wird erst dann seltsam, wenn der Befehl etwa ein Glockenzeichen ist. – Denn, in welchem Sinne mir dieses Zeichen mitteilt, was ich zu tun habe, außer daß ich es eben¹¹ tue *und* das Zeichen da war – . Denn es ist auch nicht das, daß ich es erfahrungsgemäß immer tue, wenn das Zeichen gegeben wird.

1 (V): das ~~wir~~

2 (V): lehrte, ~~also~~

3 (V): Existenz rufen müßte.

4 (M): ✓ (R): ∇ S. 384/1,2

5 (M): ✓

6 (V): Beschreibung, der

7 (M): ✓

8 (M): ✓

9 (M): ✓

10 (M): ///

11 (V): einfach

“The Proposition Determines
which Reality Makes it True.”
It Seems to Provide a Shadow
of this Reality. A Command
Seems to Anticipate its Execution
in a Shadowy Way.

For it's as if this something, the action, were a thing that's supposed to enter into existence as the command is being obeyed, and as if the command were acquainting us with this very thing, were showing it to us, so that in some sense it *would* already be¹ calling it into existence.

How can the command, the expectation, show us a person before he has entered our room?!

²The description of language must accomplish the same thing as language.

³For then I really can learn from the proposition, from the description of reality, how things are in reality.

⁴(But *that* is really the only thing that is called “description”, and that is really the only thing that is called “learning how things are”!)

⁵(And what all of us mean by this is nothing more than: We learn from the description how things are in reality.)

⁶“You acquire the knowledge of what you are supposed to do from a command. And yet all the command does is to present itself to you; its *effect* is irrelevant.”

⁷That only becomes strange when the command is something like the ringing of a bell. – For in what sense this sign tells me what I am supposed to do, except that I just⁸ do it *and* the sign was there – . Nor is it the case that on the basis of experience I always do it when I'm given the sign.

1 (V): would have to be

2 (M): ✓ (R): \forall p. 384/1, 2

3 (M): ✓

4 (M): ✓

5 (M): ✓

6 (M): ✓

7 (M): ///

8 (V): simply

¹²Darum hat es ja auch ohne weiteres *keinen Sinn*, zu sagen: „Ich muß gehen, weil die Glocke geläutet hat“. Sondern, dazu muß noch etwas anderes gegeben sein.

¹³Wie kann man die Handlung von dem Befehl „hole eine gelbe Blume“ ableiten? – Wie kann man das Zeichen „5“ aus dem Zeichen „2 + 3“ ableiten?

¹⁴Kann man denn, und in welchem Sinne kann man, aus dem Zeichen plus dem Verständnis (also der Interpretation) die Ausführung ableiten, ehe sie geschieht? Alles was man ableitet, ist doch nur eine Beschreibung der Ausführung und auch diese Beschreibung war erst da, nachdem man *sie* abgeleitet hatte.

¹⁵Die *Ausführung* des Befehls leiten wir von diesem erst ab, wenn wir ihn ausführen.

¹⁶The bridge *can* only be crossed when we get there. (Gemeint ist die Brücke zwischen Zeichen und Realität.)

¹⁷Von der Erwartung zur Erfüllung ist ein Schritt einer Rechnung. Ja, die Rechnung $\frac{25 \times 25}{125}$ steht zu ihrem Resultat 625 genau im Verhältnis der Erwartung zur Erfüllung.

377 ¹⁸Und so weit – und nur so weit – als diese Rechnung ein Bild des Resultats ist, ist auch die Erwartung ein Bild der Erfüllung.

¹⁹Und so weit das Resultat von der Rechnung bestimmt ist, so weit²⁰ ist die Erfüllung durch die Erwartung bestimmt.

²¹„Der Befehl nimmt die Ausführung voraus.“ Inwiefern nimmt er sie denn voraus? Dadurch, daß er jetzt befiehlt,²² was später ausgeführt (oder nicht ausgeführt) wird. Oder: Das, was wir damit meinen, wenn wir sagen, der Befehl nimmt die *Ausführung* voraus, ist *dasselbe*, was dadurch ausgedrückt ist, daß der Befehl befiehlt, was später geschieht. Aber richtig: „geschieht, oder nicht geschieht“. Und das sagt nichts. (Der Befehl kann sein Wesen eben nur *zeigen*.)

²³Aber, wenn auch mein Wunsch nicht bestimmt, was der Fall sein wird, so bestimmt er doch sozusagen das Thema einer Tatsache, ob die nun den Wunsch erfüllt, oder nicht.

²⁴Muß er nun dazu etwas voraus wissen? Nein. $p \vee \sim p$ sagt wirklich *nichts*.

²⁵Wir wundern uns – sozusagen – nicht darüber, daß Einer die Zukunft weiß, sondern – darüber, daß er überhaupt (richtig oder falsch) prophezeien kann.

378 ²⁶Es ist, als würde die bloße Prophezeiung (gleichgültig ob richtig oder falsch) schon einen Schatten der Zukunft vorausnehmen. – Während sie über die Zukunft nichts weiß, und weniger als nichts nicht wissen kann. –

²⁷Worin besteht das Vorgehen nach einer Regel? – Kann man das fragen? –

12 (M): ///

13 (M): ///

14 (M): ✓

15 (M): ✓

16 (M): ✓

17 (M): ✓

18 (M): ✓

19 (M): ✓

20 (V): Und so weit das Resultat von der // durch die // Rechnung, so weit

21 (M): ✓

22 (V): daß er *das* befiehlt,

23 (M): ✓

24 (M): ///

25 (M): ✓

26 (M): ✓

27 (M): ////

⁹Therefore without further specification it really makes *no sense* to say: “I’ve got to go because the bell has rung”. Something else has to be given for that to make sense.

¹⁰How can you derive the action from the command “Get a yellow flower”? – How can you derive the sign “5” from the sign “2 + 3”?

¹¹Before it takes place, can you really derive the execution from the sign plus understanding (i.e. interpretation) – and in what sense can you do this? After all, everything you derive is just a description of the execution, and this description too was here only after you derived *it*.

¹²We don’t derive the *execution* of a command from the command until we execute it.

¹³The bridge *can* only be crossed when we get there. (What is meant is the bridge between sign and reality.)

¹⁴It is a step in a calculation that leads from expectation to fulfilment. Indeed, the calculation 25×25 is related to the result 625 exactly as expectation is to fulfilment.

¹⁵And to the extent – and only to the extent – that this calculation is a picture of the result, is expectation also a picture of fulfilment.

¹⁶And the extent to which the result is determined by¹⁷ the calculation – that’s the extent to which fulfilment is determined by expectation.

¹⁸“A command anticipates its execution.” In what way does it anticipate it? By ordering now what¹⁹ is carried out (or not carried out) later. Or: What we mean when we say that a command anticipates its *execution is the same thing* that is expressed by the command commanding what happens later. But put correctly: “happens or doesn’t happen”. And that doesn’t say anything. (All a command can do is to *show* its nature.)

²⁰But even if my wish doesn’t determine what is going to be the case, still it does determine the theme of the fact, so to speak, whether or not this fact then fulfils the wish.

²¹Now does my wish have to know something in advance in order to do this? No. $p \vee \sim p$ really says *nothing*.

²²We are surprised – as it were – not that someone knows the future, but at his being able to prophesy (correctly or incorrectly) at all.

²³It’s as if the mere prophecy (whether true or false) foreshadowed the future. – Whereas it knows nothing about the future, and can’t know less than nothing.

²⁴What does acting in accordance with a rule consist in? – Can one ask that? –

9 (M): ///

10 (M): ///

11 (M): ✓

12 (M): ✓

13 (M): ✓

14 (M): ✓

15 (M): ✓

16 (M): ✓

17 (V): determined through

18 (M): ✓

19 (V): now *that* which

20 (M): ✓

21 (M): ///

22 (M): ✓

23 (M): ✓

24 (M): ///

Ich gehe nach einer Regel vor heißt: ich gehe so vor, daß das, was herauskommt, . . . Daß das, was herauskommt, dieser Regel genügt.

Nach der Regel vorgehen, heißt *so* vorgehen, und das „so“ muß die Regel enthalten.

²⁸Wenn die Regel heißt „wo Du ein \uparrow siehst, schreib' ein ‚c‘“, so ist damit gegeben, was ich tun soll, so weit es überhaupt gegeben sein kann.

Denn mehr bestimmt, als durch eine genaue Beschreibung, kann etwas nicht sein. Denn, bestimmen kann nur *heißen*, es beschreiben.

Dann ist eine Handlung nicht bestimmt, wenn die Beschreibung noch etwas offen gelassen hat²⁹ (so, daß man sagen kann „ich weiß noch nicht ob . . .“), was³⁰ also die³¹ Beschreibung bestimmen kann. Ist die Beschreibung vollständig, so ist die Handlung bestimmt. Und das heißt, es kann der Beschreibung nur *eine* Handlung entsprechen. (Nur so können wir diesen Ausdruck³² gebrauchen.)

(Erinnern wir uns an die Argumentation über „Zahnschmerzen“.)

³³Hier ist auch der Zusammenhang mit der Frage: „sieht der Andere wirklich dieselbe Farbe, wenn er blau sieht, wie ich?“ Freilich, er sieht blau! Das ist ja eben dieselbe Farbe. – D.h., die Frage, ob er als blau dieselbe Farbe sieht, ist unsinnig, wenn angenommen ist, daß wir das Recht haben, was er sieht und ich sehe, als „blau“ zu bezeichnen. Läßt sich im gewöhnlichen Sinne – d.h. nach der gewöhnlichen Methode – konstatieren, daß er nicht dieselbe Farbe sieht, so kann ich nicht sagen, daß wir beide blau sehen. Und läßt es sich konstatieren, daß wir beide blau sehen, dann „sehen wir beide die gleiche Farbe“, denn dieser Satz hat ja nur auf diese Proben Bezug.³⁴

³⁵Und analog³⁶ verhält es sich mit der Frage: „ist das, was ich jetzt ‚gelb‘ nenne, gewiß die gleiche Farbe, die ich früher ‚gelb‘ genannt habe?“ – Gewiß, denn es ist ja gelb. – Aber woher weißt Du das? – Weil ich mich daran erinnere. – Aber kann die Erinnerung nicht täuschen? – Nein. Nicht, wenn ihr Datum gerade das ist, wonach ich mich richte.

³⁷Wenn man nun fragt: Ist also die Tatsache durch die Erwartung auf ja und nein bestimmt, oder nicht, d.h. ist es bestimmt, in welchem Sinne die Erwartung durch ein Ereignis – welches immer eintritt – beantwortet werden wird, so muß man antworten: *ja!* Unbestimmt wäre es etwa im Falle einer Disjunktion im Ausdruck der Erwartung.

³⁸Wenn ich sage „der Satz bestimmt doch schon im Voraus, was ihn wahr machen wird“: Gewiß, der Satz „p“ bestimmt, daß p der Fall sein muß, um ihn wahr zu machen; das ist aber auch alles, was man darüber sagen kann, und heißt nur: „der Satz p = der Satz, den die Tatsache p wahr macht“.

In der Sprache wird alles ausgetragen.

28 (M): ///

29 (V): offen läßt

30 (O): „ich weiß noch nicht ob . . .“ was

31 (V): eine

32 (V): wir das Wort

33 (M): ///

34 (O): bezug.

35 (R): [Zu: Erinnerungszeit]

36 (V): Und so

37 (M): ✓

38 (M): ✓

I act in accordance with a rule means: I act in such a manner that what results, . . . That what results satisfies the rule.

To act in accordance with a rule means to act *in such a way*, and this “in such a way” must contain the rule.

²⁵If the rule is “Wherever you see a \uparrow , write a ‘c’”, then what I’m supposed to do is thereby given, in so far as it can be given at all.

For a thing cannot be specified any further than it is by an exact description. For to specify something can only *mean* to describe it.

Then an action isn’t specified if its description has left²⁶ something open (such that one can say “I don’t know yet whether . . .”) that can *specify* the description.²⁷ If the description is complete, the action is specified. And that means, only *one* action can correspond to the description. (This is the only way we can use this expression.²⁸)

(Let’s remember the argument about “toothache”).

²⁹Here there is also a connection with the question: “When someone sees blue, does he really see the same colour as I do?” Of course, he’s seeing blue! It’s exactly the same colour. – That is to say, the question whether he sees the same colour as blue is nonsensical if it is assumed that we have the right to call what he and I see “blue”. If it can be ascertained in the usual sense – i.e. according to the usual method – that he isn’t seeing the same colour, then I can’t say that both of us are seeing blue. And if it can be ascertained that both of us are seeing blue then “Both of us are seeing the same colour”, for this proposition refers only to such tests.

³⁰And this question is analogous:³¹ “Is it certain that what I am now calling ‘yellow’ is the same colour that I called ‘yellow’ before?” – Certainly, because it *is* yellow. – But how do you know that? – Because I remember it. – But can’t memory deceive? – No. Not when its data are precisely what I’m being guided by.

³²Now if one asks: “So is a fact, or isn’t it, determined by an expectation right down to a yes or a no, i.e. is it determined in which sense the expectation will be answered by an event – whatever event occurs?” – then the answer has to be: *Yes!* It would be indeterminate, say, if the expression of the expectation contained a disjunction.

³³If I say: “But the proposition determines in advance what will make it true”, the answer is: To be sure, the proposition “p” determines that to make it true, p must be the case; but that’s all that can be said about this, and it just means: “The proposition p = the proposition that the fact p makes true”.

Everything is carried out *in language*.

25 (M): ///

26 (V): description leaves

27 (V): specify a description.

28 (V): use the word.

29 (M): ///

30 (R): [To: Memory-time]

31 (V): And that’s how it is with the question:

32 (M): ✓

33 (M): ✓

Intention.

¹Was für ein Vorgang ist sie? Man soll aus der Betrachtung dieses Vorgangs ersehen können, was intendiert wird.

²Wenn eine Vorrichtung als³ Bremse wirken *soll*, tatsächlich aber aus irgendwelchen Ursachen den Gang der Maschine beschleunigt, so ist die Absicht, der die Vorrichtung dienen sollte, aus ihr allein nicht zu ersehen.

Wenn man sagt „das ist der Bremshebel, er funktioniert aber nicht“, so spricht man von der Absicht. Ähnlich ist es, wenn man eine verdorbene Uhr doch eine Uhr nennt.

⁴Angenommen, das Anziehen des Bremshebels bewirkt manchmal das Abbremsen der Maschine und manchmal nicht. So ist daraus allein nicht zu schließen, daß er als Bremshebel gedacht war. Wenn nun eine bestimmte Person immer dann, wenn der Hebel nicht als Bremshebel wirkt, ärgerlich würde –. So wäre damit auch nicht das gezeigt, was ich zeigen will. Ja, man könnte dann sagen, daß der Hebel einmal die Bremse, einmal den Ärger betätigt. – Wie nämlich drückt es sich aus,⁵ daß die Person *darüber* ärgerlich wird, daß der Hebel die Bremse nicht betätigt hat?

381

⁶(Dieses *über etwas ärgerlich sein* ist nämlich scheinbar von ganz derselben Art, wie: etwas fürchten, etwas wünschen, etwas erwarten, etc.) Das „über etwas ärgerlich sein“ verhält sich nämlich zu dem, worüber man ärgerlich ist, nicht wie die Wirkung zur Ursache, also nicht wie Magenschmerzen zu der Speise mit der man sich den Magen verdorben hat. Man kann darüber im Zweifel sein, woran man sich den Magen verdorben hat und die Speise, die etwa die Ursache ist, tritt in die Magenschmerzen nicht als ein Bestandteil dieser Schmerzen ein; dagegen kann man, in einem gewissen Sinne, nicht zweifelhaft sein, worüber man sich ärgert, wovor man sich fürchtet, was man glaubt. (Es heißt nicht „ich weiß nicht, – ich glaube heute, aber ich weiß nicht woran“!) – Und hier haben wir natürlich das alte Problem, daß nämlich der Gedanke, daß das und das der Fall ist, nicht voraussetzt, daß es der Fall ist. Daß aber andererseits doch etwas von der Tatsache für den Gedanken selbst Voraussetzung sein muß. „Ich kann nicht denken, daß etwas rot ist, wenn rot garnicht existiert.“⁷Die Antwort

1 (M): ✓
 2 (M): ✓
 3 (V): ~~der~~
 4 (M): ✓

5 (V): Wie drückt es sich nämlich aus,
 6 (M): /// ?
 7 (M): ||

Intention.

¹What Kind of a Process is it? From an Examination of this Process one is Supposed to be Able to See What is Being Intended.

²If a device is *supposed* to function as a brake, but for whatever reasons it actually accelerates the workings of the machine, then the purpose the device was supposed to serve can't be understood from it alone.

If one says "That's the brake lever, but it isn't working", one is speaking of intention. It's similar to calling a broken watch a watch anyway.

³Let's assume that pulling the brake lever sometimes brings about the braking of the machine and sometimes doesn't. Then one can't conclude from this alone that it was intended as a brake lever. Now if a particular person were to become annoyed whenever the lever didn't function as a brake lever – that still wouldn't show what I want to show. Indeed, in that case one could say that the lever sometimes actuates the brake, sometimes the annoyance. – For how is it expressed that that person gets annoyed *by the fact* that the lever hasn't activated the brake?

⁴(For this *being annoyed about something* seems to be exactly the same kind of thing as fearing something, wishing something, expecting something, etc.) For "being annoyed about something" isn't related to what one is annoyed about as effect is to cause, that is, not as a stomach-ache is to the food that has upset one's stomach. You can be in doubt about what has upset your stomach, and the food that may be the cause doesn't enter your stomach-ache as part of that pain; on the other hand, in a certain sense you can't be in doubt about what annoys you, what you fear, what you believe. (We don't say "I don't know – I have a belief today, but I don't know in what"!)) – And here of course we have the old problem, namely, that although the thought that such and such is the case doesn't presuppose that it is the case, nevertheless some part of the fact must be a prerequisite for the thought itself. "I can't think that something is red if red doesn't even exist." ⁵The answer to this is that

1 (M): ✓
2 (M): ✓
3 (M): ✓

4 (M): ///?
5 (M): ||

darauf ist, daß die Gedanken im selben⁸ Raum sein müssen, wie das Zweifelhafte, wenn auch an einer andern Stelle. Im Raum der Sprache nämlich. In der Sprache wird alles ausgetragen.

380v Der Satz „ich könnte nicht denken daß etwas rot ist wenn Rot nicht existierte“ bezieht sich wirklich auf die Vorstellung von etwas Rotem oder die Existenz eines roten Musters *als Teil unserer Sprache*. Aber natürlich kann man auch nicht sagen, unsere Sprache *müsse* ein solches Muster enthalten. Enthält sie es nicht so ist sie eben eine Andere. Aber man kann sagen & betonen daß sie es enthält.

381 ⁹Darin, und nur darin besteht auch die (prästabilerte) Harmonie zwischen Welt und Gedanken.

Die Intention ist nun aber von genau derselben Art wie – z.B. – der Ärger. Und da scheint es irgendwie, als würde man die Intention von außen betrachtet nie als *Intention* erkennen; als müßte man sie selbst intendieren,¹⁰ um sie als Meinung zu verstehen.¹¹ Das hieße aber, sie nicht als Phänomen, nicht als Tatsache, zu betrachten! D.h. es hieße eine weitere (unklar angedeutete) Bedingung der Erfahrung allem hinzufügen.¹²

Und freilich, wenn Meinen¹³ eine Erfahrung ist so muß man eben diese haben um¹⁴ wirklich zu meinen & nicht eine andere die man nennen könnte die Meinung von außen sehen.

380v Und hier erinnert die Intention an den Willen (auch im Schopenhauerschen Sinn).

Woher die Idee¹⁵ man könne etwas „nicht als Phänomen“ betrachten? Wie kommt denn hier das Subjekt in die Betrachtung?

Und einerseits ist das so als wollte man sagen, man könne Zahnschmerzen nur von innen betrachtet als solche erkennen. Von außen betrachtet wären sie¹⁶ z.B. gar nicht unangenehm. Die Zahnschmerzen geben einem¹⁷ aber gar kein solches Problem.

Das Problem¹⁸ aber ist: wie kann man die Intention, wenn man sie nun hat in die Worte übersetzen, sie sei die Intention *das & das zu tun*? Denn daß die Intention nur kennt wer sie erlebt hat (siehe Zahnschmerzen) gebe ich zu; warum aber nennst Du sie die Intention *das zu tun*. Das hat mit ihrem unbeschreibbaren Charakter offenbar nichts zu tun.

381 Das ist natürlich wieder das vorige Problem, denn der Witz ist, daß man es dem¹⁹ Gedanken
382 (als selbständige Tatsache betrachtet) ansehen muß, daß er der Gedanke ist, daß das und das der Fall ist. Kann man es ihm nicht ansehen (so wenig wie den Magenschmerzen woher sie rühren), dann hat er kein logisches Interesse.²⁰ – Das kommt auch darauf hinaus, daß man den Gedanken mit der Realität muß unmittelbar vergleichen können und es nicht erst einer Erfahrung bedürfen kann, daß diesem Gedanken diese Realität entspricht. (Darum unterscheiden sich auch Gedanken nach ihrem Inhalt, aber Magenschmerzen nicht nach dem, was sie hervorgerufen hat.)

381v ²¹Wie kommt es daß ich hier etwas der Erfahrung entgegensetzen will?

382 Meine Auffassung scheint unsinnig, wenn man sie *so* ausdrückt: man soll sehen können, worüber Einer denkt, wenn man ihm den Kopf aufmacht; wie ist denn das möglich? Die

8 (V): Gedanken ~~in demselben~~

9 (M): ✓

10 (V): meinen.

11 (V): verstehen (von innen).

Da ist zuerst zu sagen daß es hier kein außen & innen gibt.

12 (V): Bedingung hinzufügen.

13 (V): wenn die Meinung

14 (V): um ~~zu~~

15 (V): Woher der Gedanke

16 (O): betrachtet wäre er

17 (O): eiem // Eiem

18 (V): Die Frage

19 (O): den

20 (V): Interesse, ~~oder vielmehr, dann gibt es keine Logik.~~

21 (M): ✓ /

thoughts must be in the same space as what admits of doubt, although at a different location. That is, in the space of language. Everything is carried out in language.

The proposition "I couldn't think that something was red if red didn't exist" really does refer to the mental image of something red, or to the existence of a red pattern, *as a part of our language*. But of course on the other hand one can't say that our language *has* to contain such a pattern. If it doesn't contain it, then it's just another language. But one can say, and emphasize, that it does contain this red pattern.

⁶In the space of language, and only therein, does the (pre-established) harmony between world and thought consist.

Intention, however, is exactly the same kind of thing as – for example – annoyance. And here it seems somehow that one can never recognize an intention, when viewed from the outside, as an *intention*; as if one has to intend⁷ it oneself in order to understand it as an intention.⁸ But that would mean not to view it as a phenomenon, as a fact! That is to say, that would mean adding a further (unclearly indicated) condition of experience to everything.⁹

And of course, if meaning something is an experience, then one must have precisely this experience in order to really mean something, and not a different experience, which might be called "seeing the meaning from the outside".

And here intention reminds us of the will (in Schopenhauer's sense as well).

Where does the idea¹⁰ come from that you can view something "not as a phenomenon"? For then how does the subject enter into consideration?

On the one hand it's as if you wanted to say that you could recognize a toothache as a toothache only from the inside. Viewed from the outside, for instance, it wouldn't be at all unpleasant. But a toothache doesn't present us with any such problem.

The problem,¹¹ though, is: How can one translate intention, once one has it, into the words that it is the intention *to do this or that*? For I admit that intention can only be known by someone who has experienced it (cf.: toothache); but why do you call it the intention *to do this*? – Obviously that has nothing to do with its being indescribable.

Of course this is the previous problem again, because the funny thing about it is that you have to be able to tell by looking at a thought (viewed as an independent fact) that it is the thought that such and such is the case. If you can't tell this by looking at it (just as you can't tell from a stomach-ache what caused it) then it's of no logical interest.¹² – This also amounts to saying that you have to be able to compare a thought to reality directly, and that there can't first be need of an experience for this reality to correspond to this thought. (That's also why thoughts differ according to their content, but stomach-aches don't vary according to what caused them.)

¹³Why is it that I want to oppose something to experience here?

My conception seems nonsensical if one expresses it *this way*: One is supposed to be able to see what someone is thinking about by opening up his head; how is that possible?

6 (M): ✓

7 (V): mean

8 (V): intention (from the inside).

At this point the first thing to be said is that there is no outside and inside here.

9 (V): condition to everything.

10 (V): the thought

11 (V): *The question*,

12 (V): interest, ~~or rather, then there is no logic.~~

13 (M): ✓ /

Gegenstände, über die er denkt, sind ja garnicht in seinem Kopf (ebensowenig wie in seinen Gedanken)!

Man muß nämlich die Gedanken, Intentionen (etc.) von außen betrachtet als solche verstehen, *ohne* über die *Bedeutung* von etwas unterrichtet zu werden. Denn auch die Relation des Bedeutens wird ja dann als ein Phänomen gesehen (und ich darf²² dann nicht wieder auf eine Bedeutung des Phänomens hinweisen müssen, da ja dieses Bedeuten wieder in dem Phänomen mit inbegriffen²³ ist).

²⁴Wenn man den Gedanken betrachtet, so kann also von einem Verstehen keine Rede mehr sein, denn, sieht man ihn, so muß man ihn als den Gedanken dieses Inhalts erkennen, es ist nichts zu deuten. – Aber so ist es ja wirklich, wenn wir denken, da wird nicht gedeutet. –

381v ²⁵Kann man Magenschmerzen von außen betrachtet als solche verstehen? Und was sind²⁶ „Magenschmerzen von außen betrachtet“. Es sind Magenschmerzen gemeint die man hat nicht die des Andern deren Wirkungen man *sieht*.

²⁷Freilich, sofern das Meinen eine spezifische²⁸ Erfahrung ist kann man keine Andere das Meinen nennen. Nur erklärt keine besondere Erfahrung die *Richtung* der Meinung. Und wenn wir sagten „von außen betrachtet . . .“ so wollten wir auch gar nicht²⁹ sagen die Meinung sei eine besondere Erfahrung sondern sie sei nicht etwas was geschähe oder uns geschähe,³⁰ („denn das wäre ja tot“) sondern etwas, was wir tun.

³¹Das Subject falle hier nicht aus der Erfahrung heraus sondern sei so in ihr involviert daß sich die Erfahrung nicht beschreiben ließe.

³²Es ist beinahe als sagte man wir können uns nicht dorthin gehen sehen da wir³³ selbst gehen. (Und also nicht stehen & zuschauen können.)³⁴ Aber hier laborieren wir eben wie so sehr oft³⁵ an einer Ausdrucksweise die inadäquat ist die wir abschütteln wollen aber zugleich doch gebrauchen³⁶ & kleiden den Protest gegen unsere eigene Ausdrucksweise in einen verneinenden Satz in dieser Ausdrucksweise. Denn wenn man sagt „wir sehen uns dorthin gehen“ so meint man eben daß wir
382 sehen was man sieht wenn man selbst geht & nicht was man sieht wenn ein Anderer geht. Und man³⁷ hat ja auch eine bestimmte Seherfahrung wenn man selbst geht.

³⁸Die kausale³⁹ Erklärung des Bedeutens und Verstehens lautet im Wesentlichen so: einen Befehl verstehen heißt, man würde ihn ausführen, wenn ein gewisser Riegel zurückgezogen würde. – Es würde jemandem befohlen, einen Arm zu heben, und man sagt: den Befehl verstehen heißt, den Arm zu heben. Das ist klar, wenn auch gegen unseren Sprachgebrauch
383 (wir nennen das „den Befehl befolgen“). Nun sagt man [Frege] aber:⁴⁰ den Befehl verstehen heißt, entweder den Arm heben, oder, wenn das nicht, etwas bestimmtes Anderes tun – etwa das Bein heben. Nun heißt das aber nicht „verstehen“ im ersten Sinn, denn der Befehl war nicht „den Arm oder das Bein zu heben“. Der Befehl bezieht sich also (nach wie vor) auf

22 (V): kann

23 (V): in den Phänomenen inbegriffen

24 (M): ✓

25 (M): ✓

26 (V): was heißt *es*

27 (M): ✓

28 (O): spezifische

29 (V): auch nicht

30 (V): geschähe, *sondern*

31 (M): ✓

32 (M): ✓

33 (V): wir *nicht*

34 (V): gehen (also nicht stehen & zuschauen können).

35 (V): wie so oft

36 (V): an einer Ausdrucksweise die wir abschütteln wollen & doch gebrauchen

37 (V): man *sieht ja*

38 (M): ///

39 (V): kausale *Bedeutung-d*

40 (V): man # Frege # aber:

The things he's thinking about aren't in his head at all (any more than they're in his thoughts)!

For looking at them from the outside, one has to understand thoughts, intentions (etc.), as such *without* being informed of the *meaning* of anything. For then the relation of meaning is also seen as a phenomenon (and then I mustn't be forced to¹⁴ point to a meaning of the phenomenon in turn, because once again, this meaning is included in the phenomenon¹⁵).

¹⁶So when one looks at a thought, there can no longer be any talk about understanding, for if one sees the thought then one has to recognize it as the thought with this content; there is nothing to interpret. – But that's really the way it is when we think; there's no interpreting going on there. –

¹⁷Can one understand a stomach-ache, viewed from outside, as a stomach-ache? And what is "a stomach-ache viewed from outside"?¹⁸ What is meant is one's own stomach-ache, not someone else's, the effects of which one sees.

¹⁹To be sure, in so far as meaning something is a specific experience one can't call any other experience meaning. Except that no specific experience explains the *direction* of meaning. And when we said "seen from outside . . .", we didn't in any way want to say that meaning something is a specific experience; rather, we wanted to say that it isn't something that happens, or happens to us ("for that would be dead"), but something that we do.

²⁰We wanted to say that here the subject doesn't drop out of experience; but is involved in it in such a way that the experience can't be described.

²¹It's almost as if we said that we can't see ourselves walking towards that point over there, since it is we who are doing the walking. (And so we can't stand and watch.)²² But here, as so very often²³, we labour under a form of expression that is inadequate. We want to shake it off, yet at the same time we use it;²⁴ and we clothe our protest against our own form of expression in a denial that is couched in this very form of expression. For when we say "we see ourselves walking over in that direction" we mean precisely that we see what we see when we ourselves are walking over in that direction, and not what we see when someone else is walking. And we do have a particular visual experience when we ourselves are walking.

²⁵The causal explanation of meaning and understanding goes essentially like this: Understanding a command means that one would carry it out if a certain bolt were pulled back. Let's say someone were ordered to raise his arm and it is said: Understanding the command means raising his arm. That is clear, although contrary to our use of language (we call that "obeying the command"). However, one (Frege) does²⁶ say: Understanding the command means either to raise an arm, or if not that, to carry out some other specific action – for instance to lift a leg. But this isn't what "understanding" means in the first sense, for the command was not "Lift an arm or a leg". So the command refers to an action that has

14 (V): then I can't

15 (V): phenomena

16 (M): ✓

17 (M): ✓

18 (V): what does "a stomach-ache viewed from outside" mean?

19 (M): ✓

20 (M): ✓

21 (M): ✓

22 (V): walking (and so we can't stand and watch).

23 (V): as so often

24 (V): labour under a way of expressing ourselves that we want to shake off but still use;

25 (M): ///

26 (V): one # Frege # does

eine Handlung, die *nicht* geschehen ist. Mit andern Worten, es bleibt der Unterschied bestehen zwischen dem Verstehen und dem Befolgen des Befehls. Und weiter [Frege]:⁴¹ ein unverständener Befehl ist gar kein Befehl. – Dieses Verstehen des Befehls kann nicht irgend eine Handlung sein, (etwa den Fuß heben), sondern⁴² sie muß das Wesen des Befehls selbst enthalten.

⁴³„In dem Faktum des Verstehens muß das Verstehen (was immer es ist) seinen Ausdruck finden.

In dem Vorgang des Verstehens (welcher immer der sei) muß das Verstehen *ausgedrückt* sein.“

(Wenn ich Einem in die Seele sähe,⁴⁴ müßte ich sehen, woran er denkt. Siehe Vorgang des Denkens.)

⁴⁵*In der Sprache* wird alles ausgetragen.

382v Wenn ich in der Sprache denke so schweben mir nicht neben dem sprachlichen Ausdruck noch Bedeutungen vor sondern die Sprache selbst ist das Vehikel der Gedanken.

383 ⁴⁶Warum scheint mir mein Gedanke ein so exceptionelles Stück Wirklichkeit zu sein? Doch nicht, weil ich ihn „von innen“ kenne, das heißt nichts; sondern offenbar, weil ich alles in Gedanken ausmache, und über das Denken auch nur wieder denke.

382v Alles⁴⁷ wird auf den gemeinsamen Nenner der Sprache gebracht & dort verglichen.

41 (V): weiter # Frege # :

42 (O): heben) sondern

43 (M): ////

44 (V): sehe,

45 (M): ✓

46 (M): ///

47 (V): ~~Die Spra~~ Alles

not taken place. In other words, the difference between understanding and carrying out the command remains. And furthermore (Frege):²⁷ A command that isn't understood is no command at all. – The understanding of a command can't be some random action (say, lifting one's foot); rather, the action must contain the essence of the command itself.

²⁸“Understanding (whatever it is) must find its expression in the fact of understanding.

Understanding must be *expressed* in the process of understanding (whatever that might be).”

(If I were to look²⁹ into someone's soul I'd have to see what he is thinking about. Cf. the process of thinking.)

³⁰Everything is carried out *in language*.

When I'm thinking in a language I don't have additional meanings in mind running alongside the linguistic expression; rather, language itself is the vehicle of thought.

³¹Why does my thought strike me as such an exceptional piece of reality? Certainly not because I know it “from within”; that means nothing. Rather, obviously because I use thought to find out everything; even concerning thinking, all I can do is to think.

Everything is brought to the common denominator of language and compared there.

27 (V): furthermore # Frege # :

28 (M): ////

29 (V): If I look

30 (M): ✓

31 (M): ///

Kein Gefühl der Befriedigung (kein Drittes) kann das Kriterium dafür sein, daß die Erwartung erfüllt ist.

¹Man könnte nämlich denken, wie ist es; der Gedanke und die Tatsache sind verschieden; aber wir nennen den Gedanken *den*, daß die Tatsache der Fall ist; oder die Tatsache: die, welche den Gedanken wahr macht. Ist da das Eine eine Beschreibung mit Hilfe des Anderen? Wird der Gedanke mittels der Tatsache, die ihn wahr macht, *beschrieben*, also einer äußeren Eigenschaft nach beschrieben, wie wenn ich von jemandem sage, er sei mein Onkel?

²Wenn man den Ausdruck „der Gedanke, daß . . . der Fall ist“ als *Beschreibung* erklärt, so ist damit wieder nichts erklärt, weil es sich fragt: wie ist eine solche Beschreibung möglich, sie setzt³ selber wieder das Wesen des Gedankens voraus, denn sie enthält den Hinweis auf eine Tatsache, die nicht geschehen ist, also gerade das, was problematisch war.

⁴Die Erfüllung der Erwartung besteht nicht darin, daß ein Drittes geschieht, das man außer eben als „die Erfüllung der Erwartung“ auch noch anders beschreiben könnte, also z.B. als ein Gefühl der Befriedigung, oder der Freude, oder wie immer.

Denn die Erwartung, daß p der Fall sein wird, muß das Gleiche sein, wie⁵ die Erwartung der Erfüllung dieser Erwartung, dagegen wäre, wenn ich unrecht habe, die Erwartung, daß p eintreffen wird, verschieden von der Erwartung, daß die Erfüllung dieser Erwartung eintreffen wird.

⁶Könnte denn die Rechtfertigung lauten: „Du hast gesagt ‚bring‘ etwas Rotes‘ und dieses hier hat mir daraufhin ein Gefühl der Befriedigung gegeben,⁷ darum habe ich es gebracht“?

⁸Müßte man da nicht antworten: Ich habe Dir doch nicht geschafft, mir das zu bringen, was Dir auf meine⁹ Worte hin ein solches Gefühl geben wird!

¹⁰Ich gehe die gelbe Blume suchen. Auch wenn mir während des Gehens ein Bild vorschwebt, brauche ich es denn, wenn ich die gelbe Blume – oder eine andere – sehe? – Und wenn ich sage „sobald ich eine gelbe Blume sehe, schnappt, gleichsam, etwas in dem Gedächtnis¹¹ ein“: kann ich denn dieses Einschnappen eher voraussehen, erwarten, als die gelbe Blume? Ich wüßte nicht, warum. D.h., wenn es in einem bestimmten Fall wirklich so

1 (R): [Zu § 80 S. 375]

2 (M): ///

3 (O): selbst

4 (M): ✓

5 (V): wie ~~der~~

6 (M): ✓

7 (V): erzeugt,

8 (M): ✓

9 (V): ~~Deine~~

10 (M): ✓

11 (V): in der Erinnerung

No Feeling of Satisfaction (no Third Thing) Can Be the Criterion that Expectation has been Fulfilled.

¹For one might think, how can this be: Thoughts and facts are different; but we call *the thought* that a fact is the case a thought; or we call the fact that verifies a thought a fact. Is each of these a description in terms of the other? Is a thought *described* by way of the fact that verifies it, i.e. is it described according to an external property, as if I say of someone that he is my uncle?

²If one declares that the expression “the thought that . . . is the case” is a *description*, then once again nothing has been explained, for the question arises: How is such a description possible? It itself presupposes the nature of thought, for it contains a reference to a fact that hasn’t happened, which is just what was problematical.

³The fulfilment of expectation doesn’t consist in the occurrence of some third thing that, in addition to being described as “the fulfilment of the expectation”, could also be described as something else, i.e. as a feeling of satisfaction, for instance, or of joy or whatever.

For the expectation that p will be the case has to be the same thing as the expectation of the fulfilment of this expectation. On the other hand, if I’m wrong, the expectation that p will happen would be different from the expectation that the fulfilment of this expectation will happen.

⁴Could my justification perhaps run like this: “You said ‘Bring something red’ and as a result this thing gave me a feeling of satisfaction⁵, and that’s why I brought it”?

⁶Wouldn’t one have to answer: But I didn’t tell you to bring me whatever produces such a feeling as a result of my⁷ words!

⁸I go looking for a yellow flower. Even if I have a mental image while I’m walking, do I really need it when I see a yellow flower – or some other one? – And if I say “As soon as I see a yellow flower, something as it were clicks in my memory”, can I really foresee, expect, this clicking more easily than the yellow flower? I don’t know why. That is, if in a

1 (R): [To § 80 p. 375]

2 (M): ///

3 (M): ✓

4 (M): ✓

5 (V): thing produced a feeling of satisfaction in me

6 (M): ✓

7 (V): your

8 (M): ✓

ist, daß ich nicht die gelbe Blume, sondern ein anderes (indirektes) Kriterium erwarte, so ist dies¹² jedenfalls keine Erklärung des Erwartens.

386 ¹³Aber geht nicht mit dem Eintreffen des Erwarteten immer ein Phänomen der Bejahung¹⁴ (oder Befriedigung)¹⁵ Hand in Hand? Dann frage ich: Ist dieses Phänomen ein anderes, als das Eintreten des Erwarteten? Wenn ja, dann weiß ich nicht, ob so ein anderes Phänomen die Erfüllung immer begleitet. – Oder ist es dasselbe, wie die Erfüllung? Wenn ich sage: Der, dem die Erwartung erfüllt wird, *muß* doch nicht sagen „ja, das ist es“ (oder dergleichen), so kann man mir antworten: „gewiß, aber er muß doch *wissen*, daß die Erwartung erfüllt ist“. – Ja, soweit das Wissen dazu gehört,¹⁶ *daß* sie¹⁷ erfüllt ist. In diesem Sinne: wüßte er's nicht, so wäre sie nicht erfüllt. – „Wohl, aber, wenn einem eine Erwartung erfüllt wird, so tritt doch immer eine Entspannung auf!“ – Woher weißt Du das? –

¹⁸Beim Versteckenspiel erwarte ich, den Fingerhut zu finden. Wenn ich ihn finde, gebe ich ein Zeichen der Befriedigung von mir, oder ich fühle doch (eine) Befriedigung. Dieses Phänomen mag ich auch erwartet haben (oder auch nicht), aber diese Erwartung ist nicht die, den Fingerhut zu finden. Ich kann beide Erwartungen haben und die sind offenbar ganz getrennt.

¹⁹Es ist nicht so, daß wir das Phänomen einer Unbefriedigung²⁰ bemerken,²¹ die dann durch Finden²² des Fingerhutes vergeht,²³ und nun sagen: „also war jenes Phänomen die Erwartung den Fingerhut zu finden“.²⁴

Nein, das erste Phänomen ist die Erwartung den Fingerhut zu finden²⁵ so sicher, wie²⁶ das zweite das Finden des Fingerhutes ist. Der Ausdruck „Finden²⁷ des Fingerhutes“²⁸ gehört zu der Beschreibung des ersten so notwendig, wie zur Beschreibung des zweiten. Nur verwechseln wir nicht „die Bedeutung des Wortes ‚Fingerhut‘“ (den Ort dieses Worts im grammatischen Raume) mit der Tatsache, daß ein Fingerhut hier ist.

12 (V): das

13 (M): ✓

14 (V): Zustimmung

15 (V): Befriedigung)

16 (V): gehört, ~~da~~

17 (V): die

18 (M): ///

19 (M): ////

20 (V): wir eine Unbefriedigung

21 (V): spüren // merken //,

22 (O): finden

23 (V): Fingerhutes aufgehoben wird

24 (V): die Erwartung des Fingerhutes“.

25 (V): die Erwartung des Fingerhutes

26 (V): als

27 (O): „finden

28 (V): Fingerhutes ist. Das Wort „Fingerhut“

particular instance it really is the case that I'm not expecting the yellow flower but another (indirect) criterion, then in any case this⁹ isn't an explanation of expecting.

¹⁰But doesn't a phenomenon of affirmation¹¹ (or satisfaction) always go hand in hand with the occurrence of what was expected? Then I ask: Is this phenomenon different from the occurrence of what was expected? If it is then I don't know whether such a different phenomenon always accompanies fulfilment. – Or is it the same thing as fulfilment? If I say: "After all, the person whose expectation is fulfilled doesn't *have* to say 'Yes, that's it' (or some such thing)", then someone can answer: "Certainly, but he must surely *know* that his expectation is fulfilled". – True, in so far as knowing is part of its *being* fulfilled. In this sense: If he didn't know that the expectation had been fulfilled then it wouldn't have been fulfilled. – "All right, but when someone's expectation is fulfilled, it's always accompanied by a release of tension!" – How do you know that? –

¹²When playing hide and seek, I expect to find the thimble. When I find it I signal satisfaction or at least I feel (a) satisfaction. I may very well have expected this phenomenon (or not), but this expectation isn't that of finding the thimble. I can have both expectations, but they are obviously quite separate.

¹³It isn't the case that we notice¹⁴ the phenomenon of dissatisfaction¹⁵, that it disappears¹⁶ when we find the thimble, and then we say: "So that phenomenon was the expectation of finding the thimble".¹⁷

No, the first phenomenon is as surely the expectation of finding the thimble¹⁸ as the second one is the finding of the thimble. The expression "finding the thimble"¹⁹ is just as necessarily a part of the description of the first phenomenon as it is of the description of the second phenomenon. Let's just not confuse "the meaning of the word 'thimble'" (the location of this word in grammatical space) with the fact that there is a thimble here.

9 (V): that
 10 (M): ✓
 11 (V): approval
 12 (M): ///
 13 (M): ////
 14 (V): sense // feel //

15 (V): notice a dissatisfaction
 16 (V): it is cancelled
 17 (V): of the thimble".
 18 (V): of the thimble
 19 (V): The word "thimble"

387 **Der Gedanke – Erwartung, Wunsch,
etc. – und die gegenwärtige Situation.**

¹„Wenn der Gedanke ein Bild ist, so erscheint die Beschäftigung mit diesem Bild als Spielerei,² wenn sie sich nicht mit der uns interessierenden Wirklichkeit befaßt. Wenn ich hoffe, daß er zur Tür hereinkommen wird, so beschäftige ich mich mit *dieser* Tür, etwa mit dem Boden, auf den er treten wird. Und das Übrige, was die Phantasie tut, ist nicht Spiel, sondern eine Art Vorbereitung, eine Tätigkeit (sozusagen eine Arbeit), die die Form des Bildes in sich trägt. Etwa so (nur nicht unbedingt so explicit), wie wenn ich seinen Weg mit einem Teppich belegen und an einer bestimmten Stelle einen Stuhl herrichten wollte.“

Denn warum sollen wir uns gerade für dieses Bild interessieren, wo wir uns doch sonst mit Seelenzuständen, Magenschmerzen, etc. nicht befassen.

386v Der Kalkül des Denkens knüpft mit der Wirklichkeit an.

Die Erwartung ist eine vorbereitende Handlung. Eine vorbereitende Handlung innerhalb der Sprache (Berechnung des Dampfkessels.)

³Die Erwartg. ist eine Vorbereitung auf etwas eine Vorbereitung innerhalb d. Sprache.⁴

387 ⁵(Der Plan kann mich nur leiten, wenn ich auch auf dem Plan bin.)

⁶Wenn ich mit verbundenen Augen die Richtung verloren habe und man mir nun sagt: geh' dort und dort hin, so hat dieser Befehl keinen Sinn für mich.

388 ⁷Ich erwarte mir, daß der Stab *im selben Sinne* 2 m hoch sein wird, in dem er jetzt 1 m 99 cm hoch ist.

In der Spr. wird alles ausgetr.

In *demselben* Sinne, in dem er jetzt 1m hoch ist, wird er später 1,5 m hoch sein.

⁸Wäre der Gedanke sozusagen eine Privatbelustigung und hätte nichts mit der Außenwelt zu tun, so wäre er für uns ohne jedes Interesse (wie etwa die Gefühle bei einer Magenverstimmung). Was wir wissen wollen ist: Was hat der Gedanke mit dem zu tun, was außer dem Gedanken vorfällt. Denn seine Bedeutung, ich meine seine Wichtigkeit, bezieht er ja nur daher.

1 (M): ✓

2 (V): “Die Beschäftigung mit dem Bild erscheint als Spielerei,

3 (R): [gehört zur Erklärung des Wesens der Erwartg. Erwartg als Hohlform eine Vollform fordernd.]

4 (V): Die Erwartung ist eine vorbereitende, erwartende, Handlung // eine vorbereitende

Handlung. // Eine Vorb. H. innerhalb der Sprache. *In der Sprache* wird alles ausgetragen. (R): Siehe S. 354

5 (M): ///

6 (M): ///

7 (R): [Zu S. 102]

8 (M): ///

Thought – Expectation, Wish, etc. – and the Present Situation.

¹“If a thought is a picture, then occupying oneself with this picture seems like idle play² if it doesn’t concern itself with the reality that we’re interested in. But when I’m hoping that he’ll come in the door, I’m occupying myself with *that* door, perhaps with the floor that he’ll step on. And everything else that imagination does is not a game, but a kind of preparation, an activity (work, so to speak) that contains in it the form of a picture. More or less (just not necessarily as explicitly) as if I wanted to lay a carpet in his path and set up a chair at a certain spot.”

For why should it be precisely this picture that we’re interested in, when otherwise we’re not concerned with psychological states, stomach-aches, etc.?

The calculus of thinking ties up with reality.

Expectation is a preparatory action. A preparatory action within language (calculation of the boiler).

³Expectation is a preparation for something, a preparation within language.⁴

⁵(The map can only guide me if I too am on it.)

⁶If I’m blindfolded and have lost my orientation and am now told “Go here or there”, that command makes no sense to me.

⁷I expect that the bar will be 2 m high *in the same sense* in which it’s now 1 m 99 cm high.

Everything is carried out in language.

In the *same* sense in which it is now 1 m high, it will be 1.5 m high later.

⁸If a thought were a private amusement, so to speak, and didn’t have anything to do with the outside world, it would lack all interest for us (like, say, the feelings accompanying an upset stomach). What we want to know is: What does a thought have to do with what happens outside it? Because after all it is only from there that it derives its meaning, I mean – its importance.

1 (M): ✓

2 (V): “Occupying oneself with the picture seems like idle play

3 (R): [belongs to the explanation of the nature of expectation. Expectation as a concave shape requiring one that is convex.]

4 (V): Expectation is a preparatory, expecting, action // a preparatory action. // A preparatory action within

language. Everything is carried out *in language*.

(R): See p. 354

5 (M): ///

6 (M): ///

7 (R): [To p. 102]

8 (M): ///

⁹Was hat das, was ich denke, mit dem zu tun, was der Fall ist.

¹⁰Das Denken als Ganzes mit seiner Anwendung¹¹ geht sozusagen automatisch d.h. als Kalkül vor sich. – Wieviele Zwischenstufen ich auch zwischen den Gedanken und die Anwendung setze, immer folgt eine Zwischenstufe der nächsten – und die Anwendung der letzten – ohne Zwischenglied. Und hier haben wir den gleichen Fall, wie wenn wir zwischen Entschluß und Tat durch Zwischenglieder vermitteln wollen.

¹²Wenn ich gehe, so enthält der einzelne Schritt nicht das Ziel, wohin mich das Gehen bringen wird. Komme ich ans Ziel, so war jeder Schritt ein Schritt zu diesem Ziel.

¹³„Worin besteht es, sich eine gelbe Blume zu wünschen? Wesentlich darin, daß man in dem, was man sieht, eine gelbe Blume vermißt? Also auch darin, daß man erkennt, was in dem Satz ausgedrückt ist ‚ich sehe jetzt keine gelbe Blume‘.“

389 ¹⁴Könnte man auch sagen: Man kann die Erwartung *nicht* beschreiben, wenn man die gegenwärtige Realität nicht beschreiben kann oder, man kann die Erwartung nicht beschreiben, wenn man nicht eine *vergleichende* Beschreibung von Erwartung und Gegenwart geben kann in der Form: Jetzt sehe ich hier einen roten Kreis und erwarte mir später dort ein blaues Viereck.

D.h., der Sprachmaßstab muß an dem Punkt der Gegenwart angelegt werden und deutet dann über ihn hinaus – etwa in der Richtung der Erwartung.

388v Ich will sagen um den Ort des Gewünschten zu bestimmen muß mein Satz wie ein Maßstab auf die gegenwärtige Situation in gewisser Richtung aufgesetzt¹⁵ werden, denn wie sollte er sonst den Punkt im Raum zeigen wo das Gewünschte sein soll?

Aber auch wenn so der Maßstab an der Wirklichkeit aufsitzt¹⁶ warum muß ich ihn dann als gerade diesen Wunsch interpretieren? Die Schwierigkeit die man hier lösen will ist wieder: „wie bestimmt der Wunsch das Gewünschte“. Und man trachtet wieder vergebens die Erfüllung des Wunsches im Wunsche schon vorwegzunehmen.

389 ¹⁷Ich will sagen: wenn ich über eine gelbe Blume rede, muß ich zwar keine sehen, aber ich muß *etwas* sehen und das Wort „gelbe Blume“ hat quasi nur in Übereinstimmung mit oder im Gegensatz zu dem Bedeutung, was ich sehe. Seine Bedeutung würde quasi nur von dem aus bestimmt, was ich sehe, entweder als das, was ich sehe, oder als das, was davon in der und der Richtung so und so weit liegt. Hier meine ich aber weder Richtung noch Distanz räumlich im gewöhnlichen Sinn, sondern es kann die Richtung von Rot nach Blau und die Farbdistanz von Rot auf ein bestimmtes Blaurot gemeint sein. – Aber auch so stimmt meine Auffassung nicht. Es ist schon richtig, daß der Satz „ich wünsche eine gelbe Blume“ den Gesichtsraum voraussetzt, nämlich nur insofern, als er in unserer Sprache voraussetzt, daß der Satz „ich sehe jetzt eine gelbe Blume“ und sein Gegenteil Sinn hat.¹⁸ Ja, es muß auch Sinn haben, oder vielmehr, es hat auch Sinn, zu sagen „das Gelb, was ich mir wünsche, ist grünlicher als das, welches ich sehe“. Aber andererseits wird der grammatische Ort des Wortes „gelbe Blume“ nicht durch eine Maßangabe, bezogen auf das, was ich jetzt sehe, bestimmt. Obwohl, soweit von einer solchen Entfernung und Richtung die Rede überhaupt sein kann,

9 (M): ✓

10 (M): ✓

11 (V): als Ganzes und seine Anwendung

12 (M): ///

13 (R): [Zu S. 102 § 29]

14 (R): [Zu S. 102]

15 (V): auf die gegenwärtige Situation aufgesetzt

16 (V): aufsteht

17 (R): [Zu S. 102]

18 (V): Sinn haben muß.

⁹What does what I think have to do with what is the case?

¹⁰Thinking as a whole, together with its¹¹ application, proceeds automatically, so to speak, i.e. as a calculus. – No matter how many intermediate steps I place between a thought and its application, one intermediate step always follows the next – and the application follows the last one – without an intermediate link. And it's the same here as when we want to mediate between decision and action with intermediate links.

¹²When I walk, an individual step does not contain the goal that walking will get me to. When I get to the goal, then each step was a step towards that goal.

¹³“What does wishing for a yellow flower consist in? In essence, missing a yellow flower in what one sees? And therefore also in realizing what is expressed in the sentence ‘Now I don't see a yellow flower?’”

¹⁴Could one say as well: One can *not* describe expectation if one can't describe present reality, or one can't describe expectation if one can't give a *comparative* description of expectation and the present in the form: I see a red circle here now, and I'm expecting a blue quadrangle over there later.

That is, the linguistic measuring stick has to be applied at the point of the present, and then it points beyond it – for instance in the direction of the expectation.

I want to say: To determine the location of what I'm wishing for, my proposition has to be superimposed on the present situation like a measuring stick, but pointing in a certain direction.¹⁵ For how else could it be expected to show that point in space where what I'm wishing for is supposed to be?

But even if the measuring stick sits¹⁶ alongside reality in that way, why do I then have to interpret it as just that wish? Once again, the difficulty that one wants to solve here is: “How does the wish specify what I'm wishing for?”. And once again one tries in vain to anticipate the fulfilment of the wish in the wish.

¹⁷I want to say: When I talk about a yellow flower I don't have to see one, to be sure, but I do have to see *something*, and the word “yellow flower” has meaning as it were only in agreement with or in opposition to what I see. Its meaning can only be specified, so to speak, in reference to what I see, either as what I see or as what is situated in such and such a direction and at such and such a distance from it. But here I don't mean either direction or distance in the usual spatial sense; rather, for example, the direction from red to blue, or the colour distance from red to a particular bluish red. – But even put this way, my understanding isn't right. It is true, to be sure, that the proposition “I want a yellow flower” presupposes visual space, i.e. it does so only in so far as it presupposes that in our language the proposition “Now I see a yellow flower” and its opposite make¹⁸ sense. Indeed to say “The yellow that I'm wishing for has more green in it than the yellow I'm seeing” must also make sense, or rather – it does make sense. But on the other hand the grammatical location of the words “yellow flower” isn't specified by a measurement that refers to what I am now seeing. In so far as such distance and direction can be considered at all, they must already

9 (M): ✓

10 (M): ✓

11 (V): whole, and its

12 (M): ///

13 (R): [To p. 102 § 29]

14 (R): [To p. 102]


15 (V): like a measuring stick.

16 (V): stick has been placed

17 (R): [To p. 102]

18 (V): opposite must make

have been given within grammatical space by a description of the present visual image and of what I'm wishing for.

¹⁹I have the feeling that only our attitude towards the picture can turn it into a reality for us. That is, because picture and reality mean the same thing to it, it can link the former with the latter – like a fishplate, as it were –  ²⁰establishing the transition from picture to reality, holding them in the right position to each other.

Fear connects the picture to the terror of reality.²¹

²²I might also ask: What is it that gives the picture its meaning?

The continuity of the calculus within me. I behave towards the picture in a similar way as towards reality, and the calculus within me – the thought process – occurs as *one* take on it, or as a continuous series of takes. That is to say, I experience the picture in its way as I do reality in its way.

²³Our attitude towards the picture, that we have an experience of the picture, turns it²⁴ into reality for us.

²⁵That is, it connects it to reality by establishing a continuity.

²⁶What is meant by the picture is a proposition. And the problem was: What does my thought have to do with what is the case? The problem of depiction, of a portrait, etc. Or (better): "I am this cross on the map".

I am outraged when I read about a murder²⁷, just as I am when I see a murder.²⁸

²⁹The problem seemingly admits of two solutions: one can say that the calculus connects thought to reality.

³⁰I used to say that a proposition gets its meaning by engaging with us, as it were.

³¹In this context as well: We think, foresee, consider, because we can't do otherwise.

³²What turns expectation into expectation for us?

³³One could ask: What turns a picture, a thought, into reality for us?

³⁴Or: What turns *belief* into reality for us?

³⁵Well, believing is a natural act for humans.

Making pictures for ourselves is part of our lives.

19 (M): ✓

20 (F): MS 108, p. 274.

21 (V): to reality.

22 (M): XXXX

23 (M): XXX

24 (M): That we *experience* the picture turns the thought

25 (M): XXX

26 (M): ✓

27 (V): read the description of a murder

28 (V): when I am a witness to a murder.

29 (M): ///

30 (M): ///

31 (M): ///

32 (M): ///

33 (M): ///

34 (M): ✓ ||

35 (M): ✓

391 **Glauben. Gründe des Glaubens.**

¹Glauben. Hiermit verwandt ist: erwarten, hoffen, fürchten, wünschen. Aber auch: zweifeln, suchen, etc.

Man sagt: „Ich habe ihn von 5 bis 6 Uhr erwartet“, „ich habe den ganzen Tag gehofft, er werde kommen“, „in meiner Jugend habe ich gewünscht . . .“, etc. Daher der falsche Vergleich mit in der Zeit amorphen Zuständen (Zahnschmerz, das Hören eines Tones, etc., obwohl diese unter sich wieder verschieden sind).

²Was heißt es nun: „ich glaube, er wird um 5 Uhr kommen“? oder: „er glaubt N werde um 5 Uhr kommen“? Nun, woran erkenne ich, daß er das glaubt? Daran, daß er es sagt? oder aus seinem übrigen Verhalten? oder aus beiden? Danach wird man dem Satz „er glaubt . . .“ verschiedenen Sinn geben können.

390v ³Man kann in Worten glauben.

391 ⁴Hat es einen Sinn zu fragen: „Woher weißt Du, daß Du das glaubst“? Und ist etwa die Antwort: „ich erkenne es durch Introspection“?

In *manchen* Fällen wird man so etwas sagen können, in *manchen* aber nicht.

⁵Es hat einen Sinn, zu fragen: „liebe ich sie wirklich? mache ich mir das nicht nur vor?“ Und der Prozeß der Introspection ist hier das Aufrufen von Erinnerungen, das Vorstellen möglicher Situationen und der Gefühle, die man hätte, etc.

392 ⁶Introspection nennt man einen Vorgang⁷ des *Schauens*, im Gegensatz zum *Sehen*.

⁸„Wie⁹ weiß ich, daß ich das glaube?“, „wie weiß ich, daß ich Zahnschmerzen habe?“: in mancher Beziehung sind diese Beispiele¹⁰ ähnlich.

¹¹Man konstruiert hier nach dem Schema: „Woher weißt Du, daß jemand im andern Zimmer ist?“ – „Ich habe ihn drin singen gehört“.

„Ich weiß, daß ich Zahnschmerzen habe, weil ich es fühle“ ist nach diesem Schema konstruiert und heißt nichts.

1 (M): XXXX

2 (M): ///

3 (M): ✓

4 (M): ✓

5 (M): ///

6 (M): ✓ (E): Das Material von hier ab bis einschließlich S. 398 hat Wittgenstein dem TS 211 entnommen. Ab „Man könnte nun die Sache so (falsch) auffassen . . .“ ist jede der darin enthaltenen Bemerkungen mit der Zahl 36

überschrieben. TS 213 enthält zwei leicht voneinander abweichende Versionen der S. 392, von denen wir die gewählt haben, die wir für die spätere halten.

7 (V): ~~Prozeß~~

8 (M): ✓

9 (V): „Woher

10 (V): Fälle

11 (M): ✓

Belief. Grounds for Belief.

¹Believing. Related to this is: expecting, hoping, fearing, wishing. But also: doubting, searching, etc.

We say: “Between 5 and 6 o’clock I expected him”, “I hoped all day long that he would come”, “When I was young I wished . . .”, etc. Hence the incorrect comparison to states that are amorphous in time (a toothache, hearing a sound, etc., even though these differ from each other in turn).

²Now what does this mean: “I believe he’ll come at 5 o’clock”? or “He believes that N will come at 5 o’clock”? Well, how do I tell that he believes that? By his saying so? Or by the way he otherwise behaves? Or by both? Depending on this, one can give different senses to the proposition “He believes . . .”.

³One can believe with words.

⁴Does it make sense to ask: “How do you know that you believe that”? And might the answer be: “I know it by introspection”?

In *some* cases one will be able to say something like that, but not in others.

⁵It does make sense to ask: “Do I really love her? Or am I only deceiving myself?” And here the process of introspection consists in calling up memories, imagining possible situations and feelings that one would have, etc.

⁶Introspection is called a process of *looking*, as opposed to *seeing*.

⁷“How⁸ do I know that I believe that?”, “How do I know that I have a toothache?”: in some respects these examples⁹ are similar.

¹⁰Here we are proceeding according to the schema: “How do you know that there is someone in the other room?” – “I heard him singing in there”.

“I know that I have a toothache because I feel it” is constructed according to this schema, and means nothing.

1 (M): XXXXX

2 (M): ///

3 (M): ✓

4 (M): ✓

5 (M): ///

6 (M): ✓ (E): Beginning at this point and continuing through Wittgenstein’s p. 398, the remarks come from copies of pages from TS 211. Beginning with “Now one could (mis)understand

the matter”, below, each remark is preceded by the handwritten number 36. TS 213 contains two versions of p. 392, which differ slightly. We have chosen what we consider the second of these two versions.

7 (M): ✓

8 (V): “Whence

9 (V): cases

10 (M): ✓

Vielmehr: ich habe Zahnschmerzen = ich fühle Zahnschmerzen = ich fühle, daß ich Zahnschmerzen habe (ungeschickter und irreführender Ausdruck). „Ich weiß, daß ich Zahnschmerzen habe“ sagt dasselbe, nur noch ungeschickter, es sei denn, daß unter „ich habe Zahnschmerzen“ eine Hypothese verstanden wird. Wie in dem Fall: „ich weiß, daß die Schmerzen vom schlechten Zahn herrühren und nicht von einer Neuralgie“.

Denken wir¹² an die Frage „wie merkst Du, daß Du Zahnschmerzen hast?“, oder gar: „wie merkst Du, daß Du fürchterliche Zahnschmerzen hast?“ (Dagegen: „wie merkst Du, daß Du Zahnschmerzen bekommen wirst“.)

¹³(Hierher gehört die Frage: welchen Sinn hat es, von der Verifikation des Satzes „ich habe Zahnschmerzen“ zu reden? Und hier sieht man deutlich, daß die Frage „wie wird dieser Satz verifiziert“ von einem Gebiet der Grammatik zum andern ihren Sinn ändert.)

391v ¹⁴In dem Sinn von „Z.“, in dem man geneigt ist zu sagen „ich kann nicht Z. haben ohne es zu wissen“ heißt es eben darum nichts zu sagen: „ich weiß daß ich Z. habe“ es sei denn daß dies ein ungeschickter Ausdruck ist statt des Satzes „ich habe Z.“.

¹⁵Ist „Ich glaube . . .“ der Ausdruck des Glaubens oder die Beschreibung des Geisteszustandes?¹⁶

¹⁷Ist der Satz „es regnet“ die Beschreibung meines Geisteszustandes? Da es doch die Wiedergabe meines¹⁸ Gedankens ist daß es regnet. Wir werden nicht so leicht geneigt sein, den Satz die Beschreibung des Geisteszustands zu nennen, wenn wir bedenken,¹⁹ daß das Denken im Reden bestehen kann, keine Begleitung des Gedankenausdrucks ist.

²⁰Man kann in Worten glauben.

392v ²¹Andererseits warum sollen wir *nicht* sagen, daß die Aussage²² „Ich glaube . . .“ die Beschreibung des Geisteszustandes ist? es ist ja damit nichts verredet. Denn „Geisteszustand“ & „Beschreibung eines²³ Geisteszustands“ heißt²⁴ eben so Vieles.

392, 393 ²⁵Man könnte nun die Sache so (falsch) auffassen: Die Frage „wie weißt Du, daß Du Zahnschmerzen hast“ wird darum nicht gestellt, weil man dies von den Zahnschmerzen (selbst) aus erster Hand erfährt, während man, daß ein Mensch im andern Zimmer ist, aus zweiter Hand, etwa durch ein Geräusch, erfährt. Das eine weiß ich durch unmittelbare Beobachtung, das andere erfahre ich indirekt. Also: „Wie weißt Du, daß Du Zahnschmerzen hast“ – „Ich weiß es, weil ich sie habe“ – „Du entnimmst es daraus, daß Du sie hast; aber mußt Du dazu nicht schon wissen, daß Du sie hast?“. – Der Übergang von den Zahnschmerzen zur Aussage „ich habe Zahnschmerzen“ ist eben ein ganz anderer, als der vom Geräusch zur Aussage „in diesem Zimmer ist jemand“. Das heißt, die Übergänge gehören zu ganz verschiedenen Sprachspielen.²⁶

²⁷Ist, daß ich Zahnschmerzen habe *ein Grund* zur Annahme, daß ich Zahnschmerzen habe?

12 (V): wir ~~steh~~

13 (M): ✓

14 (M): ///

15 (M): ✓

16 (V): Ist „Ich glaube . . .“ der Ausdruck oder die Beschreibung des Geisteszustandes ~~des Glaubens~~?

17 (M): ✓

18 (V): ~~es~~

19 (V): sehen,

20 (M): ✓

21 (M): ✓

22 (V): daß ~~der Satz~~

23 (V): ~~es~~

24 (O): Geisteszustands heißt

25 (M): ✓

26 (V): gehören ganz andern Sprachspielen an.

27 (M): 1

Rather: I have a toothache = I'm feeling a pain in my tooth = I feel that I have a toothache (a clumsy and misleading expression). "I know that I have a toothache" says the same thing, only more clumsily still, unless we take "I have a toothache" to be a hypothesis. As in the case: "I know that the pain stems from my bad tooth and not from neuralgia".

Let's think¹¹ about the question "How do you notice that you have a toothache?" or even: "How do you notice that you have a horrible toothache?" (On the other hand: "How do you notice that you will get a toothache?")

¹²(This question is relevant here: What sense is there in talking about the verification of the proposition "I have a toothache"? And here one sees clearly that the question "How is this proposition verified?" changes its sense from one area of grammar to another.)

¹³From the very sense of "toothache" that we're inclined to express by saying "I cannot have a toothache without knowing it", it follows that it means nothing to say "I know that I have a toothache", unless this is a clumsy replacement for the sentence "I have a toothache".

¹⁴Is "I believe . . ." an expression of belief, or a description of one's mental state?¹⁵

¹⁶Is the proposition "It's raining" a description of my mental state? After all, it's the expression of my¹⁷ thought that it is raining. We will not be so readily inclined to call that proposition a description of a mental state if we consider¹⁸ that thinking can consist in speaking, and that it isn't an accompaniment of an expression of thought.

¹⁹One can believe with words.

²⁰On the other hand, why should we *not* say that the statement²¹ "I believe . . ." is the description of a mental state? For nothing has been misspoken in saying that. For "mental state" and "description of a mental state" mean so many things.

²²Now one could (mis)understand the matter in the following way: The question "How do you know that you have a toothache?" doesn't get asked because we get this information first-hand from the toothache (itself), whereas one finds out second-hand that someone is in the room next door, say because of a noise. I know the one thing by immediate observation, the other I find out indirectly. Thus: "How do you know that you have a toothache?" – "I know it because I have it" – "You deduce this from the fact that you have a toothache; but to do this, don't you already have to know that you have one?" – The transition from the toothache to the statement "I have a toothache" is completely different from that between a noise and the statement "There's someone in this room". That means that the transitions belong to completely different language-games.

²³Is the fact that I have a toothache *a reason* to assume that I have a toothache?

11 (V): think ~~also~~

12 (M): ✓

13 (M): ///

14 (M): ✓

15 (V): Is "I believe . . ." an expression or a description of a mental state ~~of belief?~~

16 (M): ✓

17 (V): ~~of the~~

18 (V): see

19 (M): ✓

20 (M): ✓

21 (V): ~~the proposition~~

22 (M): ✓

23 (M): 1

²⁸(Man kann die Philosophen dadurch verwirren (confound), daß man nicht bloß da Unsinn spricht, wo auch sie es tun, sondern auch solchen, den zu sagen sie sich scheuen (würden).)

²⁹Erschließt man aus der Wirklichkeit einen Satz? Also etwa „aus den wirklichen Zahnschmerzen, darauf, daß man Zahnschmerzen hat“? Aber das ist doch nur eine unkorrekte Ausdrucksweise; es müßte heißen: man schließt, daß man Zahnschmerzen hat daraus, daß man Zahnschmerzen hat (offenbarer Unsinn).

³⁰„Warum glaubst Du, daß Du Dich an der Herdplatte verbrennen wirst?“ – Hast Du Gründe für diesen Glauben, und brauchst Du Gründe?

394 Hast Du diese Gründe – gleichsam – immer bei Dir, wenn Du es glaubst?
Und glaubst Du es immer – ausdrücklich – wenn Du Dich etwa wehrst, die Herdplatte anzurühren?

Meint man mit „Gründen für den Glauben“³¹ dasselbe, wie mit „Ursachen des Glaubens“ (Ursachen des Vorgangs des Glaubens)?

³²Was für einen Grund habe ich, anzunehmen, daß mein Finger, wenn er den Tisch berühren, einen Widerstand spüren wird? Was für einen Grund, zu glauben, daß dieser Bleistift sich nicht schmerzlos durch meine Hand stecken läßt? Wenn ich dies frage, melden sich hundert Gründe, die einander gar nicht zu Wort kommen lassen wollen. „Ich habe es doch selbst ungezählte Male erfahren; und ebenso oft von ähnlichen Erfahrungen gehört; wenn es nicht so wäre, würde . . . ; etc.“

³³Glaube ich, wenn ich auf meine Türe zugehe, ausdrücklich, daß sie sich öffnen lassen wird, – daß dahinter ein Zimmer und nicht ein Abgrund sein wird, etc.?

Setzen wir statt des Glaubens den Ausdruck des Glaubens. –

³⁴Was heißt es, etwas aus einem bestimmten Grunde glauben? Entspricht es, wenn wir statt des Glaubens den Ausdruck des Glaubens setzen, dem, daß man³⁵ den Grund sagt, ehe man³⁶ das Begründete sagt?

395 ³⁷„Hast Du es aus diesen Gründen geglaubt?“ ist dann eine ähnliche Frage, wie: „hast Du, als Du mir sagtest, 25×25 sei 625, die Multiplikation wirklich ausgeführt?“

³⁸Die Frage „aus welchen Gründen glaubst Du das“³⁹ könnte bedeuten: „aus welchen Gründen leitest Du das jetzt ab (hast Du es jetzt abgeleitet)“; aber auch: „welche Gründe kannst Du mir nachträglich für diese Annahme angeben“.

⁴⁰Ich könnte also unter „Gründen“ zu einer Meinung tatsächlich das allein⁴¹ verstehen, was der Andere sich vorgesagt hat, ehe er zu der Meinung kam. Die Rechnung, die er tatsächlich ausgeführt hat.

28 (M): 2

29 (M): 3

30 (M): 4

31 (V): „Gründen des Glaubens“

32 (M): 1

33 (M): 2

34 (M): 3

35 (V): Einer

36 (V): er

37 (M): 4

38 (M): 1

39 (V): Frage „warum glaubst Du das“

40 (M): 2

41 (V): tatsächlich nur das

²⁴(One can confuse (confound) philosophers not only by talking nonsense where they do, but also by saying the kinds of nonsensical things they (would) hesitate to say.)

²⁵Do we infer a proposition from reality? Do we, for instance, “infer that we have a toothache from the real toothache”? But that’s nothing other than an incorrect way of expressing oneself; we’d have to say: From having a toothache we conclude that we have a toothache (which is obvious nonsense).

²⁶“Why do you believe that you’ll get burned on the hotplate?” – Do you have reasons for this belief, and do you need reasons?

Do you have these reasons constantly on your person – as it were – when you believe this? And do you always – explicitly – believe this, say when you refuse to touch the hotplate? Does one mean the same thing by “reasons for believing”²⁷ and “causes of believing” (causes of the process of believing)?

²⁸What kind of a reason do I have for assuming that my finger will feel resistance when it touches the table? What kind of a reason for believing that this pencil will not pierce my hand without pain? When I ask this hundreds of reasons arise that try to shout each other down. “I myself have experienced it countless times; and have heard of similar experiences as often; if it weren’t like that then . . . would . . . ; etc.”.

²⁹When I approach my door, do I explicitly believe that it can be opened – that there will be a room behind it and not an abyss, etc.?

Let’s substitute “expression of belief” for “belief”. –

³⁰What does it mean to believe something for a particular reason? If we substitute “expression of belief” for “belief”, does that correspond to stating the reason before stating³¹ what it is a reason for?

³²Then “Did you believe it for these reasons?” is a similar question to: “Did you really carry out the multiplication when you told me that 25×25 was 625?”

³³The question “What reasons do you have for believing that?”³⁴ could mean: “What reasons do you now have for inferring that (did you just now have for having inferred it)?”; but it could also mean: “What reasons can you subsequently give me for this assumption?”.

³⁵So by “reasons” for an opinion I could in fact understand solely what someone else said to himself before he arrived at his opinion. The calculation that he actually carried out.

24 (M): 2

25 (M): 3

26 (M): 4

27 (V): “grounds of belief”

28 (M): 1

29 (M): 2

30 (M): 3

31 (V): to someone stating the reason before he states

32 (M): 4

33 (M): 1

34 (V): question “Why do you believe that?”

35 (M): 2

⁴²Frage ich jemand: „warum glaubst Du, daß diese Armbewegung einen Schmerz mit sich bringen wird?“, und er antwortet: „weil sie ihn einmal hervorgebracht und einmal nicht hervorgebracht hat“, so werde ich sagen: „das ist doch kein Grund zu Deiner Annahme“.

Wie nun, wenn er mir darauf antwortet: „oh doch! ich habe diese Annahme noch immer gemacht, wenn ich diese Erfahrung gemacht hatte“? – Da würden wir doch sagen: „Du scheinst mir die Ursache (psychologische Ursache) Deiner Annahme anzugeben, aber nicht den Grund“.

⁴³„Warum glaubst Du, daß das geschehen wird?“ – „Weil ich es zweimal beobachtet habe.“

Oder: „Warum glaubst Du, daß das geschehen wird?“ – „Weil ich es mehrmals beobachtet habe; und es geht offenbar *so* vor sich: . . .“ (es folgt eine Darlegung einer umfassenden Hypothese). Aber diese Hypothese, dieses Gesamtbild, muß Dir einleuchten. Hier geht die Kette der Gründe *nicht* weiter. – (Eher könnte man sagen, daß sie sich schließt.)

396 ⁴⁴Man möchte sagen: Wir schließen nur dann aus der früheren Erfahrung auf die zukünftige, wenn wir die Vorgänge verstehen (im Besitze der richtigen Hypothese sind). Wenn wir den richtigen, tatsächlichen, Mechanismus zwischen den beiden beobachteten Rädern annehmen. Aber denken wir doch nur: Was ist denn unser⁴⁵ Kriterium dafür, daß unsere Annahme die richtige ist? –

Das Bild und die Daten überzeugen uns und führen uns nicht wieder weiter – zu andern Gründen.

⁴⁶Wir sagen: „diese Gründe sind überzeugend“; und dabei handelt es sich nicht um Prämissen, aus denen das *folgt*, wovon wir überzeugt wurden.

⁴⁷Wenn man sagt: „die gegebenen Daten sind insofern Gründe, zu glauben, p werde geschehen, als dies aus den Daten zusammen mit dem angenommenen Naturgesetz folgt“, – dann kommt das eben darauf hinaus, zu sagen, das Geglaubte folge aus den Daten *nicht*, sondern komme vielmehr einer neuen Annahme gleich.

⁴⁸Wenn man nun fragt: wie *kann* aber frühere Erfahrung ein Grund zur Annahme sein, es werde später das und das eintreffen, – so ist die Antwort: welchen allgemeinen Begriff vom Grund zu solch einer Annahme haben wir denn? Diese Art Angabe über die Vergangenheit nennen wir eben Grund zur Annahme, es werde das in Zukunft geschehn. – Und wenn man sich wundert, daß wir ein solches Sprachspiel⁴⁹ spielen, dann berufe ich mich auf die *Wirkung* einer vergangenen Erfahrung (daß ein gebranntes Kind das Feuer fürchtet).

397 ⁵⁰Wer sagt, er ist durch Angaben über Vergangenes nicht davon zu überzeugen, daß in Zukunft etwas geschehen wird, der muß etwas anderes mit dem Wort „überzeugen“ meinen, als wir es tun. – Man könnte ihn fragen: Was willst Du denn hören? Was für Angaben nennst Du Gründe dafür, das zu glauben?⁵¹ Was nennst Du „überzeugen“? Welche Art des „Überzeugens“ erwartest Du Dir. – Wenn *das* keine Gründe sind, was sind denn Gründe? – Wenn Du sagst, das seien⁵² keine Gründe, so muß Du doch angeben können, was der

42 (M): 3

43 (M): 4

44 (M): 1

45 (V): das

46 (M): 2

47 (M): 3

48 (M): 4

49 (V): Spiel

50 (M): 1

51 (V): Gründe um, das zu glauben?

52 (V): sind

³⁶If I ask somebody: “Why do you believe that this movement of your arm will be accompanied by pain?” and he answers: “Because sometimes it produces it and sometimes it doesn’t”, then I’ll say: “But that isn’t any reason for your assumption”.

Now what if he answers me: “Oh yes it is! Whenever I’ve had this experience, I’ve always made that assumption”? – Then surely we’d say: “You seem to be giving the cause (the psychological cause) for your assumption, but not the reason”.

³⁷“Why do you believe that that will happen?” – “Because I’ve observed it twice.”

Or: “Why do you believe that that will happen?” – “Because I’ve observed it several times; and evidently *this is how* it happens: . . .” (and now an *extensive* hypothesis is laid out). But this hypothesis, this total picture, must make sense to you. Here the chain of reasons does *not* continue. – (It would be more correct to say that it comes to an end.)

³⁸One wants to say: We only infer a future experience from a past one when we understand the processes (have the correct hypothesis). If we assume the correct, actual mechanism between the two wheels we’re observing. But let’s just consider: What *is* our³⁹ criterion for our assumption being the right one? –

The picture and the data convince us, but they don’t lead us further – towards other reasons.

⁴⁰We say: “These reasons are convincing”; and here it isn’t a matter of premises, from which what we were convinced of *follows*.

⁴¹If one says: “The data we’re given are reasons for believing that p will happen, in so far as this follows from the data, together with the assumption of a certain natural law” – then this simply amounts to saying that what is believed does *not* follow from the data, but rather is tantamount to a new assumption.

⁴²Now if one asks: But how *can* a previous experience be a reason for assuming that later on this or that will happen? – the answer is: What general concept of a reason for such an assumption do we really have? Well, this kind of a statement about the past is simply what we call a reason for assuming that this will happen in the future. – And if you are surprised that we are playing such a language-game⁴³, then I refer you to the *effect* of a past experience (to the fact that a child who has been burned fears fire).

⁴⁴Whoever says that information about what happened in the past could not convince him that something will happen in the future, must mean something else by the word “convince” than we do. – One could ask him: What *do* you want to hear? What sort of information do you call reasons for believing⁴⁵ that? What do you call “convincing someone”? What kind of “convincing” are you expecting? – If *these* aren’t reasons, what *are*? – If you are saying that these are not reasons then you surely must be able to state what would have to be the case

36 (M): 3

37 (M): 4

38 (M): 1

39 (V): the

40 (M): 2

41 (M): 3

42 (M): 4

43 (V): game

44 (M): 1

45 (V): reasons to believe

Fall sein müßte, damit wir mit Recht sagen könnten, es seien Gründe für unsern Glauben⁵³ vorhanden. „Keine Gründe“ – im⁵⁴ Gegensatz wozu?

⁵⁵Denn, wohlgermerkt: Gründe sind hier nicht Sätze, aus denen das Geglaubte *folgt*.

⁵⁶Aber nicht, als ob wir sagen wollten:⁵⁷ Für's Glauben genügt eben weniger, als für das Wissen. – Denn hier handelt es sich nicht um eine Annäherung an das logische Folgen.

⁵⁸Irreführt werden wir durch die Redeweise:⁵⁹ „Dieser Grund ist gut, denn er macht das Eintreffen des Ereignisses wahrscheinlich.“⁶⁰ Hier ist es, als ob wir nun etwas weiteres über den Grund ausgesagt hätten, was ihn als (guten) Grund rechtfertigt;⁶¹ während mit dem Satz, daß dieser Grund das Eintreffen wahrscheinlich macht, nichts gesagt ist, wenn nicht, daß dieser Grund einem⁶² bestimmten Standard des guten Grundes entspricht, – der Standard aber nicht begründet ist!

398 ⁶³Ein guter Grund ist einer der *so* aussieht.

⁶⁴„Das ist ein guter Grund, denn er macht das Eintreffen wahrscheinlich“ erscheint uns so wie: „das ist ein guter Hieb, denn er macht den Gegner kampfunfähig“.

⁶⁵Man ist versucht zu⁶⁶ sagen: „ein guter Grund ist er nur darum, weil er das Eintreffen *wirklich* wahrscheinlich macht“. Weil er sozusagen wirklich einen Einfluß auf das Ereignis hat, also quasi einen erfahrungsmäßigen.

⁶⁷„Warum nimmst Du an, daß er besserer Stimmung sein wird, weil ich Dir sage, daß er gegessen hat? ist denn das ein Grund?“ – „Das ist ein guter Grund, denn das Essen hat erfahrungsgemäß einen Einfluß auf seine Stimmung.“ Und das könnte man auch so sagen: „Das Essen macht es wirklich wahrscheinlicher, daß er guter Stimmung sein wird“.

Wenn man aber fragen wollte: „Und ist alles das, was Du von der früheren Erfahrung vorbringst, ein guter Grund, anzunehmen, daß es sich auch diesmal so verhalten wird“, so kann ich nun nicht sagen: ja, denn das macht das Eintreffen der Annahme wahrscheinlich. Ich habe oben meinen Grund mit Hilfe des Standards für den guten Grund gerechtfertigt; jetzt kann ich aber nicht den Standard rechtfertigen.

⁶⁸Wenn man sagt „die Furcht ist begründet“, so ist nicht wieder begründet, daß wir das als guten Grund zur Furcht ansehen. Oder vielmehr: es kann hier nicht wieder von einer Begründung die Rede sein.

399 ⁶⁹Wenn die Begründung eines Glaubens⁷⁰ eine erfahrungsgemäße Beziehung wäre, so müßte man weiter fragen „und warum ist *das* ein Grund gerade für *diesen* Glauben“. Und so ginge es weiter. (Z.B. „warum nehmen wir das Gedächtnis als Grund für den Glauben, daß etwas in der Vergangenheit geschehen ist“.)

53 (V): für unsere Annahme

54 (V): Gründe“ – † im

55 (M): 2

56 (M): 3

57 (V): als ob man sagen könnte (~~kön~~:

58 (M): 4

59 (V): Ausdrucksweise:

60 (V): „Das ist ein guter // richtiger // Grund zu unserer Annahme, denn er macht das Eintreffen des Ereignisses wahrscheinlich“.

61 (V): was seine Zugrundelegung rechtfertigt;

62 (V): dem

63 (M): 1

64 (M): 2

65 (M): 3

66 (V): Man möchte

67 (M): 4

68 (M): 5

69 (M): ✓

70 (V): Wenn der Grund, etwas zu glauben,

for us to be justified in saying that reasons do exist for our belief.⁴⁶ “Not reasons” – as opposed to what?

⁴⁷For, mind you: Here reasons are not propositions from which what is believed *logically follows*.

⁴⁸But it isn't as if we wanted to say:⁴⁹ Less will do for belief than for knowledge. – For here it isn't a matter of an approximation to logical inference.

⁵⁰We are misled by this way of speaking:⁵¹ “This reason is good because it makes the occurrence of the event probable.”⁵² Now here it seems as if we had said something further about the reason, which justifies it as a (good) reason;⁵³ whereas saying that this reason makes the occurrence probable says nothing except that this reason comes up to a⁵⁴ particular standard for a good reason – but that that standard has no rational basis!

⁵⁵A good reason is one that looks *like this*.

⁵⁶“That's a good reason, since it makes the occurrence probable” seems to us like: “That's a good blow, since it disables the enemy”.

⁵⁷One is tempted⁵⁸ to say: “It's a good reason only because it makes the occurrence *really* probable”. Because so to speak it really has an influence on the event, i.e. an empirical one, as it were.

⁵⁹“Why do you assume that he'll be in a better mood because I told you that he's just eaten? Is that any kind of reason?” – “That's a good reason because, based on past experience, eating influences his mood.” And that could also be put this way: “Eating really does make it more probable that he will be in a good mood”.

But if one wanted to ask: “And is everything you put forth about past experience a good reason to assume that this time too this is the way it will be?” then I can't say: “Yes, because that makes the occurrence of the assumption probable.” In what I said earlier I justified my reason using a standard for a good reason; but now I can't justify the standard.

⁶⁰If one says “That fear is justified” then that doesn't in turn justify that we view this justification as a good reason to be afraid. Or rather: Here there can be no further talk of justification.

⁶¹If the justification for a belief⁶² were an empirical relationship, one would have to go on to ask “And why is *that* a reason for just *this* belief?”. And it would go on in this way. (For example, “Why do we take memory as a reason for the belief that something happened in the past?”.)

46 (V): assumption.

47 (M): 2

48 (M): 3

49 (V): if one could say:

50 (M): 4

51 (V): this mode of expression:

52 (V): “That is a correct // good // reason for our assumption because it makes the occurrence of the event probable.”

53 (V): justifies using it as a basis;

54 (V): to the

55 (M): 1

56 (M): 2

57 (M): 3

58 (V): One would like

59 (M): 4

60 (M): 5

61 (M): ✓

62 (V): If the reason for believing something

Wenn die Beziehung des Grundes zum Begründeten eine wäre, die die Erfahrung lehrt, so müßte man weiter fragen: und mit welchem Recht nimmst Du das als Grund für *diesen* Glauben? Und so ginge es weiter; & der Glaube wäre nie gerechtfertigt.

Vergleiche damit: „Wenn eine Verbindung zweier Dinge immer⁷¹ in einer Vermittlung durch ein drittes Ding besteht, dann sind zwei Dinge nie miteinander verbunden.“ Das ist falsch; dagegen könnte man sagen: „Wenn eine Verbindg. zweier Dinge – immer in einer Vermittlg. durch ein drittes Ding besteht, das mit jedem der zwei verbunden ist, dann sind zwei Dinge nie mit einander verbunden“. Das heißt⁷² aber *nicht*: eine Verbindung wird nie erreicht, sondern es hat keinen Sinn zu sagen „die Verbindung wird erreicht“ (& also auch nicht das Gegenteil). D.h., es hat keinen Sinn von⁷³ „Verbindung“ zu reden; der Begriff der „Verbindung“ ist gar nicht erklärt worden.

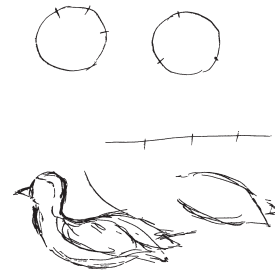
399v Wir meinen, wir müssen⁷⁴ den endlosen Regress ein paar Stufen weit⁷⁵ durchlaufen & ihn dann in Verzweiflung aufgeben. Während die Definitionsgleichung einfach *keine* Auflösung hat. Wir haben keine solche Methode zu ihrer Auflösung festgelegt.

Die Erfahrung lehrt daß die Ursache von B A ist. Und also ist es ein guter Grund⁷⁶ zur Annahme⁷⁷ daß B geschehen wird⁷⁸ daß A geschehen ist.

Aber man kann nicht sagen die Erfahrung lehre daß die wiederholte Erfahrung der Koinzidenz ein guter Grund zur Annahme weiterer Koinzidenzen sei.⁷⁹

-
- 71 (V): „Wenn eine Verbindung immer
 72 (O): verbunden“, & das heißt ~~eigentlich~~:
 73 (V): von ~~einer~~
 74 (V): ~~müßten~~
 75 (V): ein ~~paarmal~~
 76 (V): Grund ~~e~~
 77 (V): Grund ~~anzunehmen~~
 78 (V): wird ~~wenn~~

79 (M):



If the relationship of a reason to what it is a reason for were taught by experience, one would have to ask the next question: "And what is your justification for taking that as a reason for *this* belief?" And it would go on in this way; and belief would never be justified.

Compare this to: "If a connection between two things always⁶³ consists in a mediation by a third thing, then two things are never connected to each other." That is false; on the other hand one could say: "If a connection between two things always consists in a mediation by a third thing that is connected to each of the two, then two things are never connected to each other." But that *doesn't* mean: A connection is never achieved; it's just that it makes no sense to say "A connection is achieved" (and therefore neither does its opposite). That is, it makes no sense to talk about "connection"; the concept of "connection" has in no way been explained.

We believe that we have to proceed a few steps⁶⁴ along an infinite regress, and then have to give up in despair. Whereas the defining equation simply has *no* solution. We haven't established any method for its solution.

Experience teaches that A is the cause of B. And therefore that A has happened is a good reason for the assumption⁶⁵ that B will happen.

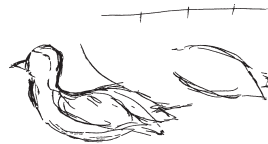
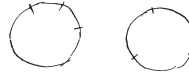
But we can't say that experience teaches that a repeated experience of coincidence is a good reason to assume further coincidences.⁶⁶

63 (V): "If a connection always

64 (V): a few ~~times~~

65 (V): reason ~~to assume~~

66 (M):



Grund, Motiv, Ursache.

400

¹Ich lege meine Hand auf die Herdplatte, fühle unerträgliche Hitze und ziehe die Hand schnell zurück: War es nicht möglich, daß die Hitze der Platte im nächsten Augenblick aufgehört hätte? konnte ich es wissen? Und war es nicht möglich, daß ich gerade durch meine Bewegung mich weiterem² Schmerz aussetzte?

Es müßte also kein guter Grund sein³ zu sagen: „Ich mußte die Hand zurückziehen,⁴ weil die Platte zu heiß war“⁵ –

Wie kann man sicher sein, es *darum* getan zu haben?

Denken wir uns daß Hitze die Wirkung hätte uns zu zwingen die Hand gegen⁶ den heißen Gegenstand zu pressen (etwa ähnlich wie man einen Leitungsdraht nicht auslassen kann)

⁷Wenn man nun fragte: Bist Du sicher, daß Du es *deswegen* getan hast? Würde ich⁸ da nicht schwören, daß ich⁹ es nur deswegen getan habe?¹⁰ Und ist es nicht doch Hypothese?¹¹ Sollte man sagen: ich weiß daß ich es deshalb tun wollte,¹² nicht, daß der Arm sich aus dieser Ursache zurückgezogen hat? Man weiß¹³ das Motiv, nicht die Ursache.

„Ich hab’ es nicht mehr (länger) ausgehalten.“

401 „Ich halte es nicht mehr aus; ich muß die Hand zurückziehen.“ Aber worin besteht dieses Zurückziehen, als in dem Wunsch, die Hand möchte sich zurückziehen, während sie sich wirklich zurückzieht? Zieht sie sich nicht zurück, so können wir auch nichts machen. Jedenfalls, möchte ich sagen, ist „sie zurückziehen wollen“ eine Erfahrung, die wir zwar wünschen können, aber nicht herbeiführen. „Wie was?“ muß ich fragen. Ich meinte mit dem Herbeiführen¹⁴ nicht: Verursachen, sondern¹⁵ ein direktes (nichtkausales) Bewegen.¹⁶ (Denke an die Erfahrung beim Zeichnen eines Quadrats mit seinen Diagonalen durch den Spiegel.)

400v

401

¹⁷Wenn ich sage, die Erfahrung des Wollens könne ich zwar wünschen, aber nicht herbeiführen, so bin ich da wieder bei einem, für die Erkenntnistheorie so¹⁸ charakteristischen Unsinn. Denn in dem Sinne, in welchem ich überhaupt etwas herbeiführen kann (etwa Magenschmerzen durch Überessen), kann ich auch das Wollen herbeiführen. (In diesem Sinne führe ich das Schwimmen-Wollen herbei, indem ich in’s tiefe Wasser springe.) Ich wollte

1 (M): ✓

2 (V): einem

3 (V): Es ist also in gewissem Sinne keine gute Begründung

4 (V): „Ich zog die Hand zurück,

5 (V): war“!

6 (V): hätte ~~daß~~ uns zu zwingen gegen

7 (M): ✓

8 (V): man

9 (V): man

10 (V): hat?

11 (V): ~~Erfahrung?~~

12 (V): ~~Müßte~~ man nicht sagen: man würde schwören, daß man es deshalb tun *wollte*;

13 (V): beschwört

14 (V): mit Herbeiführen

15 (V): nicht ~~ein kausales sondern~~

16 (V): ~~Herbeiführen.~~

17 (M): ✓ zwangsläufiger Mechanismus

18 (V): sehr

Reason, Motive, Cause.

¹I place my hand on a hotplate, feel unbearable heat and quickly pull my hand back: Mightn't the heat have stopped the very next moment? Could I know this? And mightn't my very motion have exposed me to further pain²?

So, saying "I had to pull³ my hand back because the hotplate was too hot" wouldn't necessarily be a good reason?⁴ –

How can you be sure you've done it *for that reason*?

Let's imagine that heat had the effect of forcing us to press our hand against the hot object (in the same way you can't let go of a live wire).

⁵Now if someone asked: Are you sure you did it *because of that*? Wouldn't I swear that I⁶ had done it only because of that? And yet, isn't this a hypothesis⁷? Should one say: I know that I wanted to do it because of that⁸; and not – that this was the cause of my arm's drawing back? One knows⁹ the motive, but not the cause.

"I couldn't stand it any (longer)."

"I can't stand it any more; I have to pull back my hand." What else does this pulling back consist in other than the wish that our hand should pull back while it's actually pulling back? If it doesn't pull back, then there's nothing we can do. In any case, I would like to say that "wanting to pull it back" is an experience that we *can* wish for, to be sure, but can't bring about. "Like *what?*", I have to ask. By "bringing about" I don't mean "causing", but¹⁰ "directly (non-causally) moving". (Think about the experience of drawing a square and its diagonals using a mirror.)

¹¹If I say that I can wish for but not bring about the experience of wanting, then once again I have arrived at a piece of nonsense that is so¹² characteristic of epistemology. For in the sense in which I can bring about anything at all (say a stomach-ache by overeating), I can also bring about wanting. (In this sense I can bring about wanting to swim by jumping into deep water.) No doubt I wanted to say that I couldn't want wanting; that is, it makes

1 (M): ✓

2 (V): to pain

3 (V): "I pulled

4 (V): "hot" is, in a certain sense, not a good justification!

5 (M): ✓

6 (V): Wouldn't one swear that one

7 (V): this an ~~experience~~

8 (V): ~~Mustn't~~ one say: One would swear that one *wanted* to do it because of that

9 (V): invokes

10 (V): mean a ~~causal~~ but

11 (M): ✓ ineluctable mechanism

12 (V): quite

wohl sagen: ich könnte das Wollen nicht wollen; d.h., es hat keinen Sinn, vom Wollen-wollen zu sprechen. Und hier denkt man sich das Wollen als ein direktes – d.h. nicht-kausales – Herbeiführen.¹⁹ Und den kausalen Nexus²⁰ als eine Verbindung zweier Maschinenteile durch einen zwangsläufigen Mechanismus (etwa durch eine Reihe von Zahnrädern), die auslassen kann,²¹ wenn der Mechanismus gestört wird), während der Nexus des Willens mit . . . ? etwa dem des Innern mit dem²² Äußern entspricht, oder dem der Bewegung des physikalischen Körpers mit der²³ Bewegung seines Gesichtsbildes.²⁴

²⁵Man denkt nur an die Störungen, denen ein Mechanismus normalerweise ausgesetzt ist; nicht daran, daß die Zahnräder plötzlich weich werden könnten, oder einander durchdringen, etc.

²⁶„Wie weißt Du, daß Du es aus diesem Motiv getan hast?“ – „Ich erinnere mich daran, es darum getan zu haben“. – „Woran erinnerst Du Dich? – Hast Du es Dir damals gesagt; oder erinnerst Du Dich an die Stimmung in der Du warst; oder daran, daß Du Mühe hattest, einen Ausdruck Deines Gefühls zu unterdrücken?“ Daraus wird sich zeigen worin es bestand es aus diesem Motiv getan zu haben.

402 Und wenn man etwa einen Ausdruck seines Gefühls nur mit Mühe unterdrückt hat, – wie war das? Hatte man sich ihn damals leise vorgesagt? etc. etc.

²⁷Das Motiv ist nicht eine Ursache „von innen gesehen“! Das Gleichnis von „innen und außen“ ist hier – wie so oft – gänzlich irreleitend. – Es ist von der Idee der Seele (eines Lebewesens) im Kopfe (als Hohlraum vorgestellt) hergenommen.²⁸ Aber diese Idee ist²⁹ darin mit andern unverträglichen³⁰ vermengt, wie die Metaphern in dem Satz: „der Zahn der Zeit, der alle Wunden heilt, etc.“.

401v ³¹Man nimmt an daß ein Mensch das Motiv seiner Tat weiß; – das zeigt uns, wie wir das Wort „Motiv“ gebrauchen.³²

402 „Wie weißt Du, daß das wirklich der Grund ist, weswegen Du es glaubst? – (das) ist, als fragte ich: „wie weißt Du, daß es *das* ist, was Du glaubst“. Denn er gibt nicht die Ursache eines Glaubens an, die er nur vermuten könnte, sondern beschreibt ein Operieren mit Gedanken, das zu dem Geglaubten führt (und ihn etwa geführt hat).³³ Einen Vorgang, der seiner Art nach zu dem des Glaubens gehört. – Der Unterschied zwischen der Frage nach

19 (V): direktes (d.h. nicht-kausales) Herbeiführen.

401 20 (V): Herbeiführen. & hier denkt man sich den kaus. Nexus . . .

401 21 (V): zu sprechen. Und mein falscher Ausdruck kam daher, daß man sich das Wollen als ein direktes, // unmittelbares, // nicht-kausales, Herbeiführen // Bewegen // denken will. Dieser Idee aber // ~~Und dem wieder~~ // liegt ~~wieder~~ eine falsche Analogie zugrunde, etwa, daß der kausale Nexus // Und dieser Idee liegt die Vorstellung zu Grund daß der kausale Nexus // durch eine Reihe von Zahnrädern gebildet wird (die auslassen kann, // liegt die irreführende Analogie zugrunde, in der der kausale Nexus als eine Reihe von Zahnrädern erscheint // zugrunde, die den kausalen Nexus als eine Reihe von Zahnrädern sieht // zugrunde, der kaus. Nex. werde etwa durch eine Reihe von Z. gebildet // zugrunde; der kausale Nexus erscheint als ein Mechanismus der // erscheint durch

einen Mechan. hergestellt, der // zwei Maschinenteile verbindet. Die Verbindung kann auslassen,

22 (V): Innern ~~zum~~

23 (V): Körpers ~~zum~~ // & der

24 (V): Bewegung seiner Erscheinung.

25 (M): ✓

26 (M): ✓ / / / /

27 (M): ✓

28 (V): hergeleitet.

29 (V): Es ist die Idee von der Seele, einem Lebewesen, im Kopfe. Aber sie ist

30 (V): unvereinbaren

31 (M): ✓

32 (V): – das ~~zeigt~~ sagt uns ~~was~~ etwas über die Bedeutung des Wortes „Motiv“.

33 (V): beschreibt einen Vorgang von Operationen, die zu dem Geglaubten führen (und etwa geführt haben).

no sense to talk about wanting to want. And here one thinks of wanting as a direct – i.e. non-causal – bringing¹³ about. And of the causal nexus¹⁴ as a connection of two parts of a machine by an interlocking mechanism (say by a series of cogwheels). This is a connection that can fail if the mechanism malfunctions,¹⁵ whereas the nexus of the will and . . . ? corresponds, say, to the nexus of the inner with the¹⁶ external world, or to that of the movement of a physical body with¹⁷ the movement of its visual image.¹⁸

¹⁹One thinks only of the malfunctions that a mechanism is usually subject to; but not of the possibility that the cogwheels could suddenly turn soft, or interpenetrate, etc.

²⁰“How do you know that you did it from this motive?” – “I remember having done it for that reason.” – “*What* are you remembering? – Did you say that to yourself then; or do you remember the mood you were in; or that you had trouble suppressing an expression of your feeling?” These things will show what having done it from this motive consisted in.

And if perhaps you suppressed an expression of your feeling only with difficulty – how did you do that? Did you at that time utter the expression softly to yourself? etc., etc.

²¹A motive is not a cause “seen from within”! Here the simile of “inside and outside” is totally misleading – as it so often is. – It is taken²² from the idea of the soul (of a living being) in one’s head (imagined as a hollow space). But this idea has been mixed²³ with other incompatible ideas, like the mixed metaphors in the sentence: “The tooth of time that heals all wounds, etc.”.

²⁴We assume that a person knows the motive for his action; – that shows us how we use the word “motive”.²⁵

“How do you know that this is really the reason you believe that?” – That’s like asking: “How do you know that *this* is what you believe?”. For he isn’t stating the cause for a belief, which cause he could only surmise; rather, he is describing an operation with thoughts that leads²⁶ to his belief (and may have led him there), a process that belongs inherently to the process of believing. – The difference between asking for the cause of a belief and

13 (V): direct (i.e. non-causal) bringing

14 (V): about. And here one thinks of the causal nexus . . .

15 (V): wanting to want. And my false expression originates from wanting to think of wanting as a direct, // immediate, // non-causal bringing about // moving //. However, underlying this idea // ~~And~~ underlying ~~this in turn~~ // is a false analogy, for instance, // And underlying this idea is the mental image // that the causal nexus is formed by a series of cogwheels. // And underlying this idea is the misleading analogy in which the causal nexus appears as a series of cogwheels. // analogy that sees the causal nexus as a series of cogwheels. // analogy, that the causal nexus is formed by a series of cogwheels. // However, underlying this idea is a false analogy; the causal nexus appears as a mechanism that //

appears to be created through a mechanism that // connects two parts of a machine. This connection can fail

16 (V): inner ~~to the~~

17 (V): body ~~to the~~ // body and the

18 (V): its appearance.

19 (M): ✓

20 (M): ✓ / / / /

21 (M): ✓

22 (V): derived

23 (V): It is the idea of the soul, a living being, in one’s head. But it is mixed

24 (M): ✓

25 (V): – that ~~shows~~ says to us ~~what~~ something about the meaning of the word “motive”.

26 (V): describing a process of operations that lead

der Ursache und der (Frage) nach dem Grund des Glaubens ist etwa³⁴ der, zwischen den Fragen: „was ist die physikalische Ursache davon, daß Du von A nach B gekommen bist“ und: „auf welchem Wege³⁵ bist Du von A nach B gekommen“.³⁶ – Und hier sieht man sehr klar, wie auch die Angabe der Ursache als Angabe eines Weges aufgefaßt werden kann, aber in ganz anderem Sinne.

403 „Man kann die Ursache einer Erscheinung nur vermuten“ (nicht *wissen*). – Das muß eine Aussage die Grammatik betreffend sein. Sie³⁸ sagt nicht,³⁹ daß wir mit dem besten Willen⁴⁰ die Ursache nicht wissen können. Der Satz ist insofern ähnlich dem: „wir können in der Zahlenreihe, soweit wir auch zählen, kein Ende erreichen“. Das heißt: von einem „Ende der Zahlenreihe“ kann keine Rede sein; und dies ist – irreführend – in das Gleichnis gekleidet von Einem, der wegen der großen Länge des Weges das Ende nicht erreichen kann. – So gibt es einen Sinn, in dem ich sagen kann: „ich kann die Ursache dieser Erscheinung nur vermuten“ d.h.: es ist mir noch nicht gelungen, sie (im gewöhnlichen Sinne) „festzustellen“. Also im Gegensatz zu dem Fall, in dem es mir gelungen ist, in dem⁴¹ ich also die Ursache weiß. – Sage ich nun aber, im metaphysischen Sinn,⁴² „ich kann die⁴³ Ursache immer nur vermuten“, so sagt das eigentlich:⁴⁴ ich will im Falle der Ursache immer nur von „vermuten“ und nicht von „wissen“ sprechen & so Fälle verschiedener Grammatik voneinander unterscheiden.⁴⁵ (Das ist also so, als sagte ich:⁴⁶ ich will in einer Gleichung das Zeichen „=“ und nicht das Wort „ist“ gebrauchen.) Was an unserem Satz irreführend ist, ist das „nur“,⁴⁷ aber freilich gehört das eben ganz zu dem Gleichnis, das schon im Gebrauch des Wortes „können“ liegt.

⁴⁸Nach den Gründen zu einer Annahme gefragt, *besinnt* man sich auf diese Gründe. Geschieht hier dasselbe, wie, wenn man (darüber) nachdenkt, was die Ursachen eines Ereignisses gewesen sein mögen?⁴⁹

⁵⁰„Diese Gegend macht mich melancholisch.“ Woher weißt Du, daß es die Gegend ist? Ist das eine Hypothese – wie Du auch nur *glaubst*, daß es jene Speise war, die die Magenschmerzen verursachte, oder gehört es zur unmittelbaren Erfahrung. Wäre es also widerlegt, wenn Du, in eine andere Gegend versetzt, melancholisch bliebest; oder ist es nicht durch eine künftige Erfahrung zu widerlegen, da es die Beschreibung der gegenwärtigen ist?

404 Ja, wie bist Du auf den Gedanken gekommen, daß es die Gegend ist, die diese Stimmung hervorruft? Oder handelt es sich eben gar nicht um einen durch sie hervorgerufenen Zustand meiner Person, sondern, etwa, darum, daß das Bild der Gegend melancholisch *ist*? (Dies hängt unmittelbar zusammen mit dem Problem: Motiv und Ursache.)

⁵¹„Das ist ein furchtbarer Anblick“. – *Das* kannst Du nicht wissen. Vielleicht hättest Du auch sonst gezittert.

34 (V): etwa so, wie

35 (O): gekommen bist und der Frage „auf welchem Wege

36 (V): der, zwischen der Frage: „was ist die physikalische Ursache davon, daß Du da bist“ und der Frage: „auf welchem Wege bist Du hergekommen“.

37 (M): ✓

38 (O): sein. Er

39 (V): muß ein Satz der Grammatik sein. Es ist nicht gemeint,

40 (V): wir „mit dem besten Willen“

41 (V): gelungen ist, wo

42 (V): aber, als metaphysischen Satz,

43 (V): eine

44 (V): so heißt das:

45 (V): sprechen, um so Fälle verschiedener Grammatik voneinander (zu) unterscheiden.

46 (V): so, wie wenn ich sage:

47 (V): Was also an unserem ersten Beispiel falsch ist, ist das Wort „nur“,

48 (M): ✓

49 (V): wie, wenn man über die Ursachen eines Ereignisses nachdenkt?

50 (M): /// – Ursache.)

51 (M): ✓

(asking) for the reason for a belief is rather like the one between the questions:²⁷ “What is the physical cause for your having got from A to B²⁸?” and²⁹ “Which path led you from A to B³⁰?”. – And here one sees very clearly how specifying a cause can also be understood as specifying a path, but in an entirely different sense.

³¹“One can only surmise the cause of a phenomenon” (but not *know* it). – That is a statement that refers to grammar. It doesn’t say³² that even with the firmest of intentions³³ we can’t know the cause. In this respect, the proposition is similar to this: “No matter how far we count, we can’t get to an end of the numerical progression”. And that means: There can be no talk of an “end to the numerical progression”; and this is – misleadingly – dressed up in the simile of someone who can’t get to the end of the road because it’s so long. – So there is a sense in which I can say: “I can only surmise the cause of this phenomenon”, i.e. I haven’t yet succeeded in “ascertaining” it (in the usual sense). That is in contrast to the case in which I have succeeded, in which³⁴ I therefore know the cause. – But if I say, in a metaphysical sense,³⁵ “I can never do more than surmise the³⁶ cause”, that really means:³⁷ When it comes to causes I want to talk only of “surmising” and not of “knowing”, in order to distinguish cases with different grammars from each other. (As if I were to say:³⁸ I want to use the sign “=” in an equation and not the word “is”.) What is misleading about our proposition is “only”³⁹, but of course that’s an integral part of the simile that’s already inherent in the use of the word “can”.

⁴⁰If we’re asked about the reasons for an assumption, we *give some thought to* these reasons. Does the same thing happen here as when we think (about) what the causes of an event might have been?⁴¹

⁴²“This part of the country makes me melancholy.” How do you know that it is the region that is doing that? Is that a hypothesis – just as you only *believe* that it was that food that caused your stomach-ache, or is it a part of immediate experience? So would it be disproved if you remained melancholy after moving to a different region; or is it not disprovable by a future experience because it is the description of a present one?

How *did* you arrive at the thought that it is the region that evokes this mood? Or is it simply not a matter of one’s mental state being brought about by the region but, say, of the fact that a picture of the region *is* melancholy? (This is immediately connected with the problem: motive and cause.)

⁴³“That’s a terrible sight.” – You can’t know *that*. Maybe you would have trembled anyway.

27 (V): question:

28 (V): your being here

29 (V): and the question

30 (V): “Which path did you take to get here

31 (M): ✓

32 (V): That is a proposition of grammar. It doesn’t mean

33 (V): with “the firmest of intentions”

34 (V): succeeded, where

35 (V): say, as a metaphysical proposition,

36 (V): ✖

37 (V): cause”, then that means:

38 (V): As if I say:

39 (V): So what is wrong with our first example is the word “only”

40 (M): ✓

41 (V): about the causes of an event?

42 (M): /// – and cause.)

43 (M): ✓

Wie hängt die Furcht mit dem Anblick zusammen? oder mit der furchtbaren Vorstellung? Oder soll ich etwa sagen: „sich vor dieser Vorstellung fürchten“ *heißt*, sie haben und sich fürchten? Wenn man nun aber mehrere Vorstellungen hat, während man sich fürchtet (mehrere sieht oder hört), ist da ein Zweifel darüber, was das Furchtbare ist? Oder weiß man es eben aus früherer Erfahrung, wovor (von allen diesen Sachen) man sich fürchtet? Ich möchte auch sagen „das Fürchten ist eine Beschäftigung mit dem Anblick“.

Kann ich sagen; es sei ein sehr komplizierter Vorgang, in welchem die Vorstellung an charakteristischen Stellen eintritt?

⁵²Denken wir an ein furchtbares Antlitz. Welche Rolle spielt der Anblick im Vorgang der Furcht.

⁵³Ich will sagen: die Furcht *begleitet* nicht den Anblick. Sondern das Furchtbare und die Furcht haben die Struktur des Gesichtes. Denken wir, daß wir den Zügen eines Gesichts mit den Augen in *Aufregung* folgen. Sie gleichsam zitternd nachfahren. So daß die Schwingungen der Furcht den Linien des Gesichts superponiert wären.

How is fear connected to what one sees? Or to a terrifying mental image? Or should I perhaps say: “to be afraid of this mental image” *means* having it and being afraid? But now what if you have (see or hear) several mental images while you’re afraid? Is there any doubt about what it is that’s terrifying? Or does one simply know from previous experience what (among all of these things) one is afraid of? I’m also inclined to say “Being afraid is a way of occupying yourself with a sight”.

Can I say: It’s a very complicated process, into which a mental image enters at characteristic points?

⁴⁴Let’s think about a terrifying face. What role does that sight play in the process of fear?

⁴⁵I want to say: Fear doesn’t *accompany* the sight. Rather, what is frightening as well as fear have the structure of the face. Let’s imagine that we’re alarmed, and we’re following the features of a face with our eyes. It’s as if we’re tracing them with a trembling hand. So that the tremors of our fear are superimposed on the lines of the face.

44 (M): ///

45 (M): ✓

Philosophie.

Philosophy.

Schwierigkeit der Philosophie, nicht die intellektuelle Schwierigkeit der Wissenschaften, sondern die Schwierigkeit einer Umstellung.¹ Widerstände des *Willens* sind zu überwinden.

Wie ich oft gesagt habe, führt die Philosophie mich zu keinem Verzicht, da ich mich nicht entbreche, etwas zu sagen, sondern eine gewisse Wortverbindung als sinnlos aufgebe. In anderem Sinne aber erfordert die Philosophie dann eine Resignation, aber des Gefühls, nicht des Verstandes. Und das ist es vielleicht, was sie Vielen so schwer macht. Es kann schwer sein, einen Ausdruck nicht zu gebrauchen, wie es schwer ist, die Tränen zurückzuhalten, oder einen Ausbruch der Wut.²

407 |(Tolstoi: die Bedeutung (Bedeutsamkeit) eines Gegenstandes liegt in seiner allgemeinen Verständlichkeit. – Das ist wahr und falsch. Das, was den Gegenstand schwer verständlich macht ist – wenn er bedeutend, wichtig, ist – nicht, daß irgendeine besondere Instruktion über abstruse Dinge zu seinem Verständnis erforderlich wäre, sondern der Gegensatz zwischen dem Verstehen des Gegenstandes und dem, was die meisten Menschen sehen *wollen*. Dadurch kann gerade das Naheliegendste am allerschwersten verständlich werden. Nicht eine Schwierigkeit des Verstandes, sondern des Willens ist zu überwinden.³)|

Die Arbeit an der Philosophie ist – wie vielfach die Arbeit in der Architektur – eigentlich mehr eine⁴ Arbeit an Einem selbst. An der eignen Auffassung. Daran, wie man die Dinge sieht. (Und was man von ihnen verlangt.)

1 (E): Vgl. die folgende Bemerkung (MS 153b, S. 30r):

Difficulty of our investigation: great length of chain of thoughts. The difficulty is here essential to the thought not as in the sciences ~~com~~ due to its novelty. It is a difficulty which I can't remove if I try to make you see the problems.

I can't give you a startling solution which suddenly will remove all your difficulties. I can't find one key which will unlock the door of our

safe. The unlocking must be done in you by a difficult process of synoptizing certain facts.

2 (V): Ausbruch des Zorns.

3 (E): Vgl. die folgende Bemerkung (MS 158, S. 34v):

Schopenhauer: „If you find yourself stumped trying to convince someone of something and not ~~being able to~~ getting anywhere, tell yourself that it's the will & not the intellect you're up against.“

4 (V): die

Difficulty of Philosophy not the Intellectual Difficulty of the Sciences, but the Difficulty of a Change of Attitude.¹ Resistance of the *Will* Must be Overcome.

As I have often said, philosophy does not lead me to any renunciation, since I do not abstain from saying something, but rather abandon a certain combination of words as senseless. In another sense, however, philosophy does require a resignation, but one of feeling, not of intellect. And maybe that is what makes it so difficult for many. It can be difficult not to use an expression, just as it is difficult to hold back tears, or an outburst of rage.²

|(Tolstoy: the meaning (meaningfulness) of a subject lies in its being generally understandable. – That is true and false. What makes a subject difficult to understand – if it is significant, important – is not that it would take some special instruction about abstruse things to understand it. Rather it is the antithesis between understanding the subject and what most people *want* to see. Because of this the very things that are most obvious can become the most difficult to understand. What has to be overcome is not a difficulty of the intellect, but of the will.³)|

As is frequently the case with work in architecture, work on philosophy is actually closer to working on oneself. On one's own understanding. On the way one sees things. (And on what one demands of them.)

1 (E): Cf. this remark (from MS 153b, p. 30r), which Wittgenstein wrote in English:

Difficulty of our investigation: great length of chain of thoughts. The difficulty is here essential to the thought not as in the sciences ~~com~~ due to its novelty. It is a difficulty which I can't remove if I try to make you see the problems.

I can't give you a startling solution which suddenly will remove all your difficulties. I can't find one key which will unlock the door of our

safe. The unlocking must be done in you by a difficult process of synoptizing certain facts.

2 (V): anger.

3 (E): Cf. this remark (from MS 158, p. 34v), which Wittgenstein wrote in English:

Schopenhauer: "If you find yourself stumped trying to convince someone of something and not ~~being able to~~ getting anywhere, tell yourself that it's the will & not the intellect you're up against."

Beiläufig gesprochen, hat es nach⁵ der alten Auffassung – etwa der, der (großen) westlichen Philosophen – zweierlei⁶ Arten von Problemen im wissenschaftlichen Sinne gegeben: wesentliche, große, universelle, und unwesentliche, quasi accidentelle Probleme. Und dagegen ist unsere Auffassung, daß es kein *großes*, wesentliches Problem im Sinne der Wissenschaft gibt.

5 (V): in

6 (V): zwei

Roughly speaking, according to the⁴ old conception – for instance that of the (great) western philosophers – there have been two kinds of⁵ intellectual problems: the essential, great, universal ones, and the non-essential, quasi-accidental problems. We, on the other hand, hold that there is no such thing as a *great*, essential problem in the intellectual sense.

4 (V): speaking, in the

5 (V): been two

Die Philosophie zeigt die irreführenden Analogien im Gebrauch unsrer Sprache auf.

Ist die Grammatik, wie ich das Wort gebrauche, nur die Beschreibung der tatsächlichen Handhabung der Sprache?¹ So daß ihre Sätze eigentlich wie Sätze einer Naturwissenschaft aufgefaßt werden könnten?

Das könnte man die descriptive Wissenschaft vom Sprechen nennen, im Gegensatz zu der vom Denken.

Es könnten ja auch die Regeln des Schachspiels als Sätze aus der Naturgeschichte des Menschen aufgefaßt werden. (Wie die Spiele der Tiere in naturgeschichtlichen Büchern beschrieben werden.)

409 Wenn ich einen philosophischen Fehler rektifiziere und sage, man hat sich das immer so vorgestellt, aber so ist es nicht, so muß ich immer eine Analogie aufzeigen, nach der man gedacht hat, die man aber nicht als Analogie erkannt hat.²

Die Wirkung einer in die Sprache aufgenommenen falschen Analogie: Sie bedeutet einen ständigen Kampf und Beunruhigung (quasi einen ständigen Reiz). Es ist, wie wenn ein Ding aus der Entfernung ein Mensch zu sein scheint, weil wir dann Gewisses nicht wahrnehmen, und in der Nähe sehen wir, daß es ein Baumstumpf ist. Kaum entfernen wir uns ein wenig und verlieren die Erklärungen aus dem Auge, so erscheint uns *eine* Gestalt; sehen wir daraufhin³ näher zu, so sehen wir eine andere; nun entfernen wir uns wieder, etc. etc.

(Der aufregende Charakter der grammatischen Unklarheit.)

Philosophieren ist: falsche Argumente zurückweisen.

⁴Der Philosoph trachtet, das erlösende Wort zu finden, das ist das Wort, das uns endlich erlaubt, das zu fassen, was bis dahin⁵ immer, ungreifbar, unser Bewußtsein belastet hat.

(Es ist, wie wenn man ein Haar auf der Zunge liegen hat; man spürt es, aber kann es nicht ergreifen⁶ und darum nicht loswerden.)

Der Philosoph liefert uns das Wort, womit man⁷ die Sache ausdrücken und unschädlich machen kann.

1 (V): Sprachen?

2 (V): so zeige ich immer auf eine Analogie // so muß ich immer . . . zeigen //, nach der man sich gerichtet hat, und, daß diese Analogie nicht stimmt.

3 (O): darauf-hin

4 (M): ✎

5 (V): jetzt

6 (V): erfassen

7 (V): ich

Philosophy Points out the Misleading Analogies in the Use of our Language.

Is grammar, as I use the word, nothing but the description of the actual use of a language?¹
So that its propositions could really be understood like the propositions of a natural science?
That could be called the descriptive science of speaking, in contrast to that of thinking.

Indeed, the rules of chess too could be taken as propositions that belong in the natural history of man. (As the games animals play are described in books on natural history.)

If I rectify a philosophical mistake and say that this is the way it has always been conceived, but this is not the way it is, I must always point out an analogy according to which one had been thinking, but which one did not recognize as an analogy.²

The effect of a false analogy accepted into language: it means a constant battle and uneasiness (a constant irritant, as it were). It is as if something seems to be a human being from afar, because at that distance we don't perceive certain things, but from close up we see that it is a tree stump. The moment we move away a little and lose sight of the explanations, *one* figure appears to us; if after that we look more closely, we see a different figure; now we move away again, etc., etc.

(The upsetting character of grammatical unclarity.)

Philosophizing is: rejecting false arguments.

³The philosopher strives to find the liberating word, and that is the word that finally permits us to grasp what until then⁴ had constantly and intangibly weighed on our consciousness.

(It's like having a hair on one's tongue; one feels it, but can't get hold of⁵ it, and therefore can't get rid of it.)

The philosopher provides us with the word with which we⁶ can express the matter and render it harmless.

1 (V): of languages?

2 (V): it is, I always point out an analogy // have to point out an analogy // that one has taken as a guideline and show // have to show // that this analogy is incorrect.

3 (M): ✎

4 (V): now

5 (V): can't grasp

6 (V): I

410 (Die Wahl unserer Worte ist so wichtig, weil es gilt, die Physiognomie der Sache genau zu treffen, weil nur der genau gerichtete Gedanke auf die richtige Bahn führen kann. Der Wagen muß haargenau auf die Schiene gesetzt werden, damit er richtig weiterrollen kann.)

⁸Eine der wichtigsten Aufgaben ist es, alle falschen Gedankengänge so charakteristisch auszudrücken, daß der Leser sagt „ja, genau so habe ich es gemeint“. Die Physiognomie jedes Irrtums nachzuzeichnen.

⁹Wir können ja auch nur dann den Andern eines Fehlers überführen, wenn er diesen Ausdruck (wirklich) als den richtigen Ausdruck seines Gefühls anerkennt.¹⁰

¹¹Nämlich, nur wenn er ihn als solchen anerkennt, *ist* er der richtige Ausdruck. (Psychoanalyse.)

¹²Was der Andre anerkennt, ist die Analogie die ich ihm darbiere, als Quelle seines Gedankens.

8 (M): \

11 (M): \

9 (M): \

12 (M): \

10 (V): wenn er anerkennt, daß dies wirklich der Ausdruck seines Gefühls ist.

(The choice of our words is so important, because the point is to hit the physiognomy of the matter exactly; because only the thought that is precisely targeted can lead the right way. The railway carriage must be placed on the tracks exactly, so that it can keep on rolling as it is supposed to.)

⁷One of the most important tasks is to express all false thought processes so true to character that the reader says, “Yes, that’s exactly the way I meant it”. To make a tracing of the physiognomy of every error.

⁸Indeed, we can only prove that someone made a mistake if he (really) acknowledges this expression as the correct expression of his feeling.⁹

¹⁰For only if he acknowledges it as such, *is* it the correct expression. (Psychoanalysis.)

¹¹What the other person acknowledges is the analogy I’m presenting to him as the source of his thought.

7 (M): \

8 (M): \

9 (V): if he acknowledges that this really is the expression of his feeling.

10 (M): \

11 (M): \

Woher das Gefühl des Fundamentalen unserer grammatischen Untersuchungen?

¹(Es beschäftigen uns Fragen verschiedener Art, etwa „wie groß ist das spezifische Gewicht dieses Körpers“, „wird es heute schön bleiben“, „wer wird als nächster zur Tür hereinkommen“, etc. Aber unter unseren Fragen finden sich solche von besonderer Art. Wir haben hier ein anderes Erlebnis. Die Fragen scheinen fundamentaler zu sein als die anderen. Und nun sage ich; wenn wir dieses Erlebnis haben, dann sind wir an der Grenze der Sprache angelangt.)

²Woher nimmt die Betrachtung ihre Wichtigkeit, da sie doch nur alles Interessante, d.h. alles Große und Wichtige, zu zerstören scheint? (Gleichsam alle Bauwerke; indem sie nur Steinbrocken und Schutt übrig läßt.)

³Woher nimmt die Betrachtung ihre Wichtigkeit,⁴ die uns darauf aufmerksam macht, daß man eine Tabelle auf mehr als *eine* Weise brauchen kann, daß man sich eine Tabelle als Anleitung zum Gebrauch einer Tabelle ausdenken kann, daß man einen Pfeil auch als Zeiger der Richtung von der Spitze zum Schwanzende auffassen kann, daß ich eine Vorlage auf mancherlei Weise als Vorlage benutzen kann?

Wir führen die Wörter von ihrer metaphysischen, wieder auf ihre normale⁵ Verwendung in der Sprache zurück.

(Der Mann, der sagte, man könne nicht zweimal in den gleichen Fluß steigen, sagte etwas Falsches; man *kann* zweimal in den gleichen Fluß steigen.)

Und so sieht die Lösung aller philosophischen Schwierigkeiten aus. Unsere⁶ Antworten müssen, wenn sie richtig sind, gewöhnliche & triviale sein.⁷ Aber man muß sie im richtigen Geist anschauen, dann macht das nichts.

[„Schlichter Unsinn“]

Woher nehmen⁸ die alten philosophischen Probleme ihre Bedeutung?

⁹Der Satz der Identität z.B. schien eine fundamentale Bedeutung zu haben. Aber der Satz, daß dieser „Satz“ ein Unsinn ist, hat diese Bedeutung übernommen.

1 (M): \ (R): Gehört zu „müssen“, „können“

2 (M): ✕

3 (M): ✕

4 (V): Wichtigkeit:

5 (V): richtige

6 (V): Ihre

7 (V): sind, hausbacken und gewöhnlich sein.

8 (V): nahmen

9 (M): ✕

Whence the Feeling that our Grammatical Investigations are Fundamental?

¹(Questions of different kinds occupy us. For instance, “What is the specific weight of this body?”, “Will the weather stay nice today?”, “Who will come through the door next?”, etc. But among our questions there are those of a special kind. Here we have a different experience. These questions seem to be more fundamental than the others. And now I say: When we have this experience, we have arrived at the limits of language.)

²Where does our investigation get its importance from, since it seems only to destroy everything interesting, that is, all that is great and important? (All the buildings, as it were, leaving behind only bits of stone and rubble.)

³Where does this observation get its importance from – the one⁴ that calls our attention to the fact that a table can be used in more than *one* way, that we can think up a table that instructs us how to use a table, that one can also understand an arrow as indicating the direction from tip to tail, that I can use a model as a model in several different ways?

We’re bringing words back from their metaphysical to their normal⁵ use in language.

(The man who said that one cannot step into the same river twice was wrong; one *can* step into the same river twice.)

And this is what the solution of all philosophical difficulties looks like. Our answers⁶, if they are correct, must be ordinary and trivial.⁷ But one must look at them in the proper spirit, and then that doesn’t matter.

[“Plain nonsense”]

Where do⁸ the old philosophical problems get their importance from?

⁹The Law of Identity, for example, seemed to be of fundamental importance. But now the proposition that this “Law” is nonsense has taken over this importance.

1 (M): \ (R): Belongs to “must”, “can”

2 (M): ✗

3 (M): ✗

4 (V): from: the one

5 (V): correct

6 (V): Their answers

7 (V): be homespun and ordinary.

8 (V): did

9 (M): ✗

¹⁰Ich könnte fragen: Warum empfinde ich einen grammatischen Witz in gewissem Sinne als tief? (Und das ist natürlich die philosophische Tiefe.)

¹¹Warum empfinden wir die Untersuchung der Grammatik als fundamental?

¹²(Das Wort „fundamental“ kann auch nichts metalogisches, oder philosophisches bedeuten, wo es überhaupt eine Bedeutung hat.)

413 ¹³Die Untersuchung der Grammatik ist im selben Sinne fundamental, wie wir die Sprache fundamental – etwa ihr eigenes Fundament – nennen können.

¹⁴Unsere grammatische Untersuchung unterscheidet sich ja von der eines Philologen etc.: uns interessiert z.B. die Übersetzung von einer Sprache in andre, von uns erfundene Sprachen. Überhaupt interessieren uns Regeln, die der Philologe gar nicht betrachtet. Diesen Unterschied können wir also wohl hervorheben.

¹⁵Andererseits wäre es irreführend zu sagen, daß wir das Wesentliche der Grammatik behandeln (er, das Zufällige).

¹⁶„Aber das ist ja nur eine äußere Unterscheidung“.¹⁷ Ich glaube, eine andere gibt es nicht.

¹⁸Eher könnten wir sagen, daß wir doch etwas Anderes Grammatik nennen, als er. Wie wir eben Wortarten unterscheiden, wo für ihn kein Unterschied (vorhanden) ist.

¹⁹Die Wichtigkeit der Grammatik ist die Wichtigkeit der Sprache.

Man könnte auch ein Wort z.B. „rot“²⁰ wichtig nennen insofern, als es oft und zu Wichtigem gebraucht wird, im Gegensatz etwa zu dem Wort „Pfeifendeckel“. Und die Grammatik des Wortes „rot“ ist dann wichtig, weil sie die Bedeutung des Wortes „rot“ beschreibt.

(Alles, was die Philosophie tun kann ist, Götzen zerstören. Und das heißt, keinen neuen – etwa in der „Abwesenheit eines Götzen“ – zu schaffen.)

10 (M): ✕

11 (M): ✕

12 (M): ✕

13 (M): ✕ |

14 (M): \

15 (M): \

16 (M): \

17 (V): nur ein äußerer Unterschied“.

18 (M): \

19 (M): ✕ | |

20 (V): „rot“

¹⁰I could ask: Why do I feel that a grammatical joke is in a certain sense deep? (And of course what I mean is philosophical depth.)

¹¹Why do we feel that the investigation of grammar is fundamental?

¹²(When it has a meaning at all, the word “fundamental” cannot mean anything meta-logical, or philosophical.)

¹³The investigation of grammar is fundamental in the same sense in which we can call language fundamental – can call it its own foundation, for example.

¹⁴After all, our grammatical investigation differs from that of a philologist, etc.: what interests us, for instance, is the translation from one language into other languages we have invented. In general the rules that the philologist totally ignores are the ones that interest us. Thus we are justified in emphasizing this difference.

¹⁵On the other hand it would be misleading to say that we deal with what is essential about grammar (and that he deals with what is accidental).

¹⁶“But that is only an external differentiation.”¹⁷ I believe there is no other.

¹⁸We could come closer by saying that we are calling something else “grammar” than he is. Just as we differentiate between kinds of words where for him there is no difference (present).

¹⁹The importance of grammar is the importance of language.

One could also call a word important – for instance “red” – in so far as it is used frequently and for important things, in contrast, for instance, to the words “officer’s orderly”. And then the grammar of the word “red” is important, because it describes the meaning of the word “red”.

(All that philosophy can do is to destroy idols. And that means not creating a new one – say in the “absence of an idol”.)

10 (M): ✎

11 (M): ✎

12 (M): ✎

13 (M): ✎ |

14 (M): \

15 (M): \

16 (M): \

17 (V): difference.”

18 (M): \

19 (M): ✎ ||

Methode der Philosophie: die übersichtliche Darstellung der grammatischen¹ Tatsachen. Das Ziel: Durchsichtigkeit der Argumente. Gerechtigkeit.

²Es hat Einer gehört, daß der Anker eines Schiffes durch eine Dampfmaschine aufgezogen werde. Er denkt nur an die, welche das Schiff treibt (und nach welcher es Dampfschiff heißt) und kann sich, was er gehört hat, nicht erklären. (Vielleicht fällt ihm die Schwierigkeit auch erst später ein.) Nun sagen wir ihm: Nein, es ist nicht *diese* Dampfmaschine, sondern außer ihr gibt es noch eine Reihe anderer an Bord und eine von diesen hebt den Anker. – War sein Problem ein philosophisches? War es ein philosophisches, wenn er von der Existenz anderer Dampfmaschinen auf dem Schiff gehört hatte und nur daran erinnert werden mußte? – Ich glaube, seine Unklarheit hat zwei Teile: Was der Erklärende ihm als Tatsache mitteilt, hätte der Fragende sehr wohl als Möglichkeit sich selber ausdenken können, und seine Frage in bestimmter Form, statt in der des bloßen Zugeständnisses der Unklarheit vorlegen können. Diesen Teil des Zweifels hätte er selber beheben können, dagegen konnte ihn 415 Nachdenken nicht über die Tatsachen belehren. Oder: Die Beunruhigung, die davon herkommt, daß er die Wahrheit nicht wußte, konnte ihm kein Ordnen seiner Begriffe nehmen.

Die andere Beunruhigung und Unklarheit wird durch die Worte „hier stimmt mir etwas nicht“ gekennzeichnet und die Lösung, durch (die Worte): „Ach so, Du meinst nicht *die* Dampfmaschine“ oder – für einen andern Fall – „... Du meinst mit Dampfmaschine nicht nur Kolbenmaschine“.

³Die Arbeit des Philosophen ist ein Zusammentragen von Erinnerungen zu einem bestimmten Zweck.

⁴Eine philosophische Frage ist ähnlich der nach der Verfassung einer bestimmten Gesellschaft. – Und es wäre etwa so, als ob eine Gesellschaft ohne klar geschriebene Regeln zusammenkäme, aber mit einem Bedürfnis nach⁵ solchen: ja, auch mit einem Instinkt, durch welchen sie gewisse Regeln in ihren Zusammenkünften einhalten;⁶ nur, daß dies dadurch erschwert wird, daß nichts hierüber klar ausgesprochen ist und keine Einrichtung getroffen,

1 (V): sprachlichen

2 (R): \forall S. 40/3 ?

3 (M): \rightarrow

4 (M): \setminus

5 (V): nach **einem**

6 (V): **begut** beobachten;

The Method of Philosophy: the
Clearly Surveyable Representation
of Grammatical¹ Facts.
The Goal: the Transparency of
Arguments. Justice.

²Someone has heard that a ship's anchor is hauled up by a steam engine. He thinks only of the one that powers the ship (and for which it is called a steamship) and cannot explain to himself what he has heard. (Perhaps the difficulty doesn't occur to him until later.) Now we tell him: No, it is not *that* steam engine; besides it there are a number of other ones on board, and one of these hoists the anchor. – Was his problem a philosophical one? Was it a philosophical one if he had heard that there were other steam engines on the ship and only had to be reminded of it? – I believe his confusion has two parts: what the explainer tells him as fact the questioner could easily have conceived of as a possibility by himself, and he could have put his question in a definite form instead of in the form of a simple admission of confusion. He could have removed this part of his doubt by himself; however, reflection couldn't instruct him about the facts. Or: no ordering of his concepts could free him from the uneasiness that comes from not having known the truth.

The other uneasiness and confusion is characterized by the words “Something's wrong here”, and the solution is characterized by (the words): “Oh, you don't mean *that* steam engine” or – in another case – “. . . By 'steam engine' you don't mean just a piston engine.”

³The work of the philosopher consists in assembling reminders for a particular purpose.

⁴A philosophical question is similar to one about the constitution of a particular society. – And it's as if a group of people came together without clearly written rules, but with a need for them; indeed also with an instinct that caused them to observe certain rules at their meetings; but this is made difficult by the fact that nothing has been clearly articulated about

1 (V): Linguistic

2 (R): \forall p. 40/3 ?

3 (M): \forall

4 (M): \setminus

die die Regeln klar hervortreten läßt.⁷ So betrachten sie tatsächlich Einen von ihnen als Präsidenten, aber er sitzt nicht oben an der Tafel, ist durch nichts kenntlich und das erschwert die Verhandlung. Daher kommen wir und schaffen eine klare Ordnung: Wir setzen den Präsidenten an einen leicht kenntlichen Platz und seinen Sekretär zu ihm an ein eigenes Tischchen und die übrigen gleichberechtigten Mitglieder in zwei Reihen zu beiden Seiten des Tisches etc. etc.

416 ⁸Wenn man die Philosophie fragt: „was ist – z.B. – Substanz?“ so wird um eine Regel gebeten. Eine allgemeine Regel, die für das Wort „Substanz“ gilt, d.h.: nach welcher ich zu spielen entschlossen bin. – Ich will sagen: die Frage „was ist . . .“ bezieht sich nicht auf einen besonderen – praktischen – Fall, sondern wir fragen sie von unserem Schreibtisch aus. Erinnere Dich nur an den Fall des Gesetzes der Identität, um zu sehen, daß es sich bei der Erledigung einer philosophischen Schwierigkeit nicht um das Aussprechen neuer Wahrheiten über den Gegenstand der Untersuchung (der Identität) handelt.

Die Schwierigkeit besteht nun⁹ darin, zu verstehen, was uns die Festsetzung einer Regel hilft. Warum die uns beruhigt, nachdem wir so tief¹⁰ beunruhigt waren. Was uns beruhigt ist offenbar, daß wir ein System sehen, das diejenigen Gebilde (systematisch) ausschließt, die uns immer beunruhigt haben, mit denen wir nichts anzufangen wußten und die wir doch respektieren zu müssen glaubten. Ist die Festsetzung einer solchen grammatischen Regel in dieser Beziehung nicht wie die Entdeckung einer Erklärung in der Physik? z.B., des Copernicanischen Systems? Eine Ähnlichkeit ist vorhanden. – Das Seltsame an der philosophischen Beunruhigung und ihrer Lösung möchte scheinen, daß sie ist, wie die Qual des Asketen, der, eine schwere Kugel unter Stöhnen stemmend, da stand und den ein Mann erlöste, indem er ihm sagte: „lass’ sie fallen“. Man fragt sich: Wenn Dich diese Sätze beunruhigten,¹¹ Du nichts mit ihnen anzufangen wußtest, warum ließest Du sie nicht schon früher fallen, was hat Dich daran gehindert? Nun, ich glaube, es war das falsche System, dem er sich anbequemen zu müssen glaubte, etc.

Henne & Kreidestrich

¹²(Die besondere Beruhigung, welche eintritt, wenn wir einem Fall, den wir für einzigartig hielten, andere ähnliche Fälle an die Seite stellen können, tritt in unseren Untersuchungen immer wieder ein, wenn wir zeigen, daß ein Wort nicht nur *eine* Bedeutung (oder, nicht nur zwei) hat, sondern in fünf oder sechs verschiedenen (Bedeutungen) gebraucht wird.)

417 ¹³Die philosophischen Probleme kann man mit den Kassenschlössern vergleichen, die durch Einstellen eines bestimmten Wortes oder einer bestimmten Zahl geöffnet werden, sodaß keine Gewalt die Tür öffnen kann, ehe gerade dieses Wort getroffen ist, und ist es getroffen, jedes Kind sie öffnen kann.¹⁴

¹⁵Der Begriff der übersichtlichen Darstellung ist für uns von grundlegender Bedeutung. Er bezeichnet unsere Darstellungsform, die Art, wie wir die Dinge sehen. (Eine Art der „Weltanschauung“, wie sie scheinbar für unsere Zeit typisch ist. Spengler.)

7 (V): Regeln deutlich macht.

8 (M): \

9 (V): nur

10 (V): schwer

11 (O): beunruhigen,

12 (M): \

13 (M): \

14 (V): und ist es getroffen, keinerlei Anstrengung nötig ist, die Tür // sie // zu öffnen.

15 (M): \

this, and no arrangement has been made which brings the rules out clearly.⁵ Thus they in fact view one of their own as president, but he doesn't sit at the head of the table and has no distinguishing marks, and that makes negotiations difficult. That is why we come along and create a clear order: we seat the president at a clearly identifiable spot, seat his secretary next to him at a little table of his own, and seat the other full members in two rows on both sides of the table, etc., etc.

⁶When one asks philosophy: “*What is* – for instance – substance?” then one is asking for a rule. A general rule, which *is valid* for the word “substance”, i.e. a rule according to which I have decided to play. – I want to say: The question “What is . . . ?” doesn't refer to a particular – practical – case, but is one we ask sitting at our desks. Just remember the case of the Law of Identity in order to see that taking care of a philosophical problem is not a matter of pronouncing new truths about the subject of the investigation (identity).

The difficulty lies in⁷ understanding how establishing a rule helps us. Why it calms us after we have been so profoundly⁸ anxious. Obviously what calms us is that we see a system that (systematically) excludes those structures that have always made us uneasy, those we were unable to do anything with, and that we still thought we had to respect. Isn't the establishment of such a grammatical rule similar in this respect to the discovery of an explanation in physics – for instance, of the Copernican system? There is a similarity. – The strange thing about philosophical uneasiness and its resolution might seem to be that it is like the suffering of an ascetic who stands there lifting a heavy ball above his head, amid groans, and whom someone sets free by telling him: “Drop it”. One wonders: If these propositions made you uneasy and you didn't know what to do with them, why didn't you drop them earlier? What stopped you from doing this? Well, I believe it was the false system that he thought he had to accommodate himself to, etc.

Hen and chalk-line

⁹(The particular peace of mind that occurs when we can place other similar cases next to one we thought was unique, occurs again and again in our investigations when we show that a word doesn't have just *one* meaning (or just two), but is used with five or six different meanings.)

¹⁰Philosophical problems can be compared to locks on safes, which are opened by dialling a certain word or number, so that no force can open the door until just this word has been found, and once it has been found, any child can open it.¹¹

¹²The concept of a surveyable representation is of fundamental significance for us. It designates our form of representation, the way we look at things. (A kind of “*Weltanschauung*”, as is apparently typical of our time. Spengler.)

5 (V): made that makes the rules clear.

6 (M): \

7 (V): lies only in

8 (V): very

9 (M): \

10 (M): \

11 (V): found, no effort at all is necessary to open it. // open the door.

12 (M): \

¹⁶Diese übersichtliche Darstellung vermittelt das Verständnis,¹⁷ welches eben darin besteht, daß wir die „Zusammenhänge sehen“. Daher die Wichtigkeit des Findens von *Zwischengliedern*.¹⁸

Der Satz ist vollkommen logisch analysiert, dessen Grammatik vollkommen klargelegt ist. Er mag in welcher Ausdrucksweise immer hingeschrieben oder ausgesprochen sein.

Unserer Grammatik fehlt es vor allem an *Übersichtlichkeit*.

¹⁹Die Philosophie darf, was wirklich gesagt wird²⁰ in keiner Weise antasten, sie kann es²¹ am Ende also nur beschreiben.

²²Denn sie kann es²³ auch nicht begründen.

418 Sie läßt alles wie es ist.

Sie läßt auch die Mathematik wie sie ist (jetzt ist) und keine mathematische Entdeckung kann sie weiter bringen.

Ein „führendes Problem der mathematischen Logik“ (Ramsey) ist ein Problem der Mathematik *wie jedes andere*.

²⁴(Ein Gleichnis gehört zu unserem Gebäude; aber wir können auch aus ihm keine Folgen ziehen; es führt uns nicht über sich selbst hinaus, sondern muß als Gleichnis stehen bleiben. Wir können keine Folgerungen daraus ziehen. So, wenn wir den Satz mit einem Bild vergleichen (wobei ja, was wir unter „Bild“ verstehen, schon früher²⁵ in uns festliegen muß) oder, wenn ich die Anwendung der Sprache mit der, etwa, des Multiplikationskalküls vergleiche.

Die Philosophie stellt eben alles bloß hin und erklärt und folgert nichts.)

²⁶Da alles offen daliegt, ist auch nichts zu erklären, denn, was etwa verborgen ist,²⁷ interessiert uns nicht.

Die Antwort auf die Frage nach der Erklärung der Negation ist wirklich: verstehst Du sie denn nicht? Nun, wenn Du sie verstehst, was gibt es da noch zu erklären, was hat eine Erklärung da noch zu tun?

Wir müssen wissen, was *Erklärung* heißt. Es ist die ständige Gefahr, dieses Wort in der Logik in einem Sinn verwenden zu wollen, der von der Physik hergenommen ist.

419 ²⁸Methodologie, wenn sie von der Messung redet, sagt nicht, aus welchem Material etwa wir den Maßstab am Vorteilhaftesten herstellen, um dies und dies Resultat zu erzielen; obwohl doch das auch zur Methode des Messens gehört. Vielmehr interessiert diese Untersuchung bloß, unter welchen Umständen wir sagen, eine Länge, eine Stromstärke, (u.s.w.) sei gemessen. Sie will die, von uns bereits verwendeten, uns geläufigen, Methoden tabulieren, um dadurch die Bedeutung der Worte „Länge“, „Stromstärke“, etc. festzulegen.)

16 (M): \

17 (V): Verstehen,

18 (V): Wichtigkeit der *Zwischenglieder*.

19 (M): ↯

20 (V): darf den wirklichen // tatsächlichen // Gebrauch der Sprache

21 (V): ihn

22 (M): ↯

23 (O): ihn

24 (M): \

25 (V): vorher

26 (M): \

27 (V): erklären. Denn was etwa nicht offen daliegt,

28 (M): VII 7

¹³This surveyable representation provides just that kind of understanding that consists in our “seeing connections”. Hence the importance of finding *connecting links*.¹⁴

That proposition is completely logically analysed whose grammar has been completely clarified. No matter how it’s expressed in writing or in speech.

Above all, our grammar is lacking in *surveyability*.

¹⁵Philosophy may in no way infringe upon what is really said¹⁶; in the end it can only describe it.

¹⁷Neither can it justify it.

It leaves everything as it is.

It also leaves mathematics as it is (is now), and no mathematical discovery can advance it.

A “leading problem of mathematical logic” (Ramsey) is a problem of mathematics *like any other*.

¹⁸(A simile is part of our edifice; but we cannot draw any conclusions from it either; it doesn’t lead us beyond itself, but must remain standing as a simile. We can draw no inferences from it. As when we compare a proposition to a picture (in which case, what we understand by “picture” must have been established in us earlier¹⁹), or when I compare the application of language with that of the calculus of multiplication, for instance.

Philosophy simply sets everything out, and neither explains nor deduces anything.)

²⁰Since everything lies open to view there is nothing to explain, either. For anything that might be hidden²¹ is of no interest to us.

The answer to a request for an explanation of negation is really: Don’t you understand it? Well, if you understand it, what is there left to explain, what is there left for an explanation to do?

We must know what “*explanation*” means. There is a constant danger of wanting to use this word in logic in a sense that is derived from physics.

²²When methodology talks about measurement, it does not say out of which material, for instance, it would be the most advantageous to make the measuring stick in order to achieve this or that result: even though this too is, after all, part of the method of measuring. Rather, this investigation is only interested in the circumstances under which we say that a length, the strength of a current (etc.) has been measured. It wants to tabulate the methods we already use and are familiar with, in order to establish the meaning of the words “length”, “strength of current”, etc.)

13 (M): \

14 (V): of *connecting links*.

15 (M): ✎

16 (V): upon the real // actual // use of language

17 (M): ✎

18 (M): \

19 (V): in us before

20 (M): \

21 (V): anything that might not be open to view

22 (M): VII 7

²⁹Wollte man *Thesen* in der Philosophie aufstellen, es könnte nie über sie zur Diskussion kommen, weil Alle mit ihnen einverstanden wären.

³⁰Das Lernen der Philosophie ist *wirklich* ein Rückerrinnern. Wir erinnern uns, daß wir die Worte wirklich auf diese Weise gebraucht haben.

³¹Die philosophisch wichtigsten Aspekte der Sprache³² sind durch ihre Einfachheit und Alltäglichkeit verborgen.

(Man kann es nicht bemerken, weil man es immer (*offen*) vor Augen hat.)

Die eigentlichen Grundlagen seiner Forschung fallen dem Menschen gar nicht auf. Es sei denn, daß ihm *dies* einmal zum Bewußtsein gekommen³³ ist. (Frazer etc. etc.)

Und das heißt, das Auffallendste (Stärkste) fällt ihm nicht auf.

³⁴(Eines der größten Hindernisse für die Philosophie ist die Erwartung neuer unerhörter³⁵ Aufschlüsse.)

³⁶Philosophie könnte man auch das nennen, was *vor* allen neuen Entdeckungen und Erfindungen da³⁷ ist.

420 Das muß sich auch darauf beziehen, daß ich keine Erklärungen der Variablen „Satz“ geben kann. Es ist klar, daß dieser logische Begriff, diese Variable, von der Ordnung des Begriffs „Realität“ oder „Welt“ sein muß.

³⁸Wenn Einer die Lösung des „Problems des Lebens“ gefunden zu haben glaubt, und sich sagen wollte, jetzt ist alles ganz leicht, so brauchte er sich zu seiner Widerlegung nur erinnern, daß es eine Zeit gegeben hat, wo diese „Lösung“ nicht gefunden war; aber auch zu *der* Zeit mußte man leben können und im Hinblick auf sie erscheint die gefundene Lösung als³⁹ ein Zufall. Und so geht es uns in der Logik. Wenn es eine „Lösung“ der logischen (philosophischen) Probleme gäbe, so müßten wir uns nur vorhalten, daß sie ja einmal nicht gelöst waren (und auch da mußte man leben und denken können). –

Alle Überlegungen können viel hausbackener angestellt werden, als ich sie in früherer Zeit angestellt habe. Und darum brauchen⁴⁰ in der Philosophie auch keine neuen Wörter angewendet werden, sondern die alten reichen aus.⁴¹

(Unsere Aufgabe ist es nur, gerecht zu sein. D.h., wir haben nur die Ungerechtigkeiten der Philosophie aufzuzeigen und zu lösen, aber nicht neue Parteien – und Glaubensbekenntnisse – aufzustellen.)

(Es ist schwer, in der Philosophie nicht zu übertreiben.)

421 (Der Philosoph übertreibt, schreit gleichsam in seiner Ohnmacht, so lange er den Kern der Konfusion noch nicht entdeckt hat.)

Das philosophische Problem ist ein Bewußtsein der Unordnung in unsern Begriffen, und durch Ordnen derselben zu heben.

29 (M): \

30 (M): ↯ VII 164

31 (M): \

32 (V): Dinge

33 (V): einmal aufgefallen

34 (M): \

35 (V): tiefer

36 (M): \

37 (V): möglich

38 (M): \

39 (V): wie

40 (V): brauchen ~~wir~~

41 (V): sondern die alten, gewöhnlichen Wörter der Sprache reichen aus.

²³If one wanted to establish *theses* in philosophy, no debate about them could ever arise, because everyone would be in agreement with them.

²⁴Learning philosophy is *really* recollecting. We remember that we really did use words that way.

²⁵The aspects of language²⁶ that are philosophically most important are hidden behind their simplicity and ordinariness.

(One is unable to notice this importance because it is always (openly) before one's eyes.)

The real foundations of their inquiry don't strike people at all. Unless, at some point, they have become aware of *that* fact.²⁷ (Frazer, etc., etc.)

And this means that they are not struck by what is most striking (powerful).

²⁸(One of the greatest impediments for philosophy is the expectation of new, unheard of²⁹ elucidations.)

³⁰One could also give the name "philosophy" to what is present³¹ *before* all new discoveries and inventions.

This must also relate to the fact that I can't give any explanations of the variable "proposition". It is clear that this logical concept, this variable, must belong to the same class as the concept "reality" or "world".

³²If someone believes he has found the solution to the "problem of life" and is inclined to tell himself that now everything is simple, then to refute himself he would only have to remember that there was a time when this "solution" had not been found; but at *that* time too one had to be able to live, and in reference to this time the new solution seems like a coincidence. And that's what happens to us in logic. If there were a "solution" to logical (philosophical) problems then we would only have to call to mind that, after all, at one time they had not been solved (and then too one had to be able to live and think). –

All reflections can be carried out in a much more homespun way than I used to do. And therefore no new words have to be used in philosophy – the old ones³³ suffice.

(Our only task is to be just. That is, all we have to do is to point out and resolve the injustices of philosophy; we must not set up new parties – and creeds.)

(It is difficult not to exaggerate in philosophy.)

(The philosopher exaggerates, screams, as it were, in his helplessness, so long as he hasn't yet discovered the core of the confusion.)

The philosophical problem is an awareness of the disorder in our concepts, and can be solved by ordering them.

23 (M): \

24 (M): ✎ VII 164

25 (M): \

26 (V): of the things

27 (V): they have noticed *that*.

28 (M): \

29 (V): new, deep

30 (M): \

31 (V): possible

32 (M): \

33 (V): the old, ordinary words of language

⁴²Ein philosophisches Problem ist immer von der Form: „Ich kenne mich einfach nicht aus“.

Wie ich Philosophie betreibe, ist es ihre ganze Aufgabe, den Ausdruck so zu gestalten, daß gewisse Beunruhigungen⁴³ verschwinden. ((Hertz.))

Wenn ich Recht habe, so müssen sich philosophische Probleme wirklich restlos lösen lassen, im Gegensatz zu allen andern.

Wenn ich sage: Hier sind wir an der Grenze der Sprache, so klingt⁴⁴ das immer, als wäre hier eine Resignation nötig, während im Gegenteil volle Befriedigung eintritt, da *keine* Frage übrig bleibt.⁴⁵

⁴⁶Die Probleme werden im eigentlichen Sinne aufgelöst – wie ein Stück Zucker im Wasser.

⁴⁷|Die Menschen, welche kein Bedürfnis nach Durchsichtigkeit ihrer Argumentation haben, sind für die Philosophie verloren. |

42 (M): \

43 (V): Probleme

44 (V): scheint

45 (E) Vgl. MS 149, S. 6: „(Funny that in ordinary life we never feel that we have to

resign ourselves to something by using ordinary language!)“

46 (M): \

47 (M): \

³⁴A philosophical problem always has the form: “I simply don’t know my way about.”

As I do philosophy, its entire task is to shape expression in such a way that certain worries³⁵ disappear. ((Hertz.))

If I am right, then philosophical problems really must be solvable without remainder, in contrast to all others.

When I say: Here we are at the limits of language, that always sounds³⁶ as if resignation were necessary at this point, whereas on the contrary complete satisfaction comes about, since *no* question remains.³⁷

³⁸The problems are solved in the literal sense of the word – dissolved like a lump of sugar in water.

³⁹|People who have no need for transparency in their argumentation are lost to philosophy. |

34 (M): \

35 (V): problems

36 (V): seems

37 (E): Cf. MS 149, p. 6: “(Funny that in ordinary life we never feel that we have to resign ourselves to something by using ordinary language!)”

38 (M): \

39 (M): \

Philosophie.

Die Klärung des Sprachgebrauches.

Fallen der Sprache.

¹Wie kommt es, daß die Philosophie ein so komplizierter Aufbau² ist. Sie sollte doch gänzlich einfach sein, wenn sie jenes Letzte, von aller Erfahrung Unabhängige ist, wofür Du sie ausgibst.³ – Die Philosophie löst die Knoten in unserem Denken auf; daher muß ihr Resultat einfach sein, ihre Tätigkeit aber so kompliziert wie die Knoten, die sie auflöst.

Lichtenberg: „Unsere ganze Philosophie ist Berichtigung des Sprachgebrauchs, also, die Berichtigung einer Philosophie, und zwar der allgemeinsten.“⁴

(Die Veranlagung zur Philosophie liegt in der Empfänglichkeit,⁵ von einer Tatsache der Grammatik einen starken und nachhaltigen Eindruck zu empfangen.)⁶

Warum die grammatischen Probleme so hart und anscheinend unausrottbar sind – weil sie mit den ältesten Denkgewohnheiten, d.h. mit den ältesten Bildern, die in unsere Sprache selbst geprägt sind, zusammenhängen. ((Lichtenberg.))

|Das Lehren der Philosophie hat dieselbe ungeheure Schwierigkeit, welche der Unterricht in der Geographie hätte, wenn der Schüler eine Menge falsche und falsch vereinfachte⁷ Vorstellungen über den Lauf und Zusammenhang der Flüsse⁸ und Gebirge⁹ mitbrächte. |

|Die Menschen sind tief in den philosophischen, d.i. grammatischen Konfusionen eingebettet. Und, sie daraus zu befreien, setzt voraus, daß man sie aus den ungeheuer mannigfachen Verbindungen herausreißt, in denen sie gefangen sind. Man muß sozusagen ihre ganze Sprache umgruppieren. – Aber diese Sprache ist ja so geworden,¹⁰ weil Menschen die Neigung hatten – und haben – so zu denken. Darum geht das Herausreißen nur bei denen, die in einer instinktiven Unbefriedigung mit der¹¹ Sprache leben. Nicht bei denen, die ihrem ganzen Instinkt nach in *der* Herde leben, die diese Sprache als ihren eigentlichen Ausdruck geschaffen hat. |

1 (M): \

2 (V): Bau

3 (O): ausgibt.

4 (E): Georg Christoph Lichtenberg, *Sudelbücher* H 146.

5 (V): (Die Fähigkeit zur Philosophie besteht in der Fähigkeit,

6 (M): \ (R): Zu „Witz“ „Tiefe“

7 (V): falsche und viel zu einfache

8 (V): Flußläufe

9 (V): Gebirgsketten

10 (V): entstanden,

11 (V): instinktiven Auflehnung gegen die

Philosophy.

The Clarification of the Use of Language. Traps of Language.

¹Why is philosophy such a complicated structure?² After all, it should be completely simple if it is that ultimate thing, independent of all experience, that you make it out to be. – Philosophy unravels the knots in our thinking; hence its result must be simple, but its activity as complicated as the knots it unravels.

Lichtenberg: “Our entire philosophy is correction of the use of language, and therefore the correction of a philosophy – of the most general philosophy.”³

(A talent for philosophy consists in a receptiveness: in the ability⁴ to receive a strong and lasting impression from a grammatical fact.)⁵

You ask why grammatical problems are so tough and seemingly ineradicable. – Because they are connected with the oldest thought habits, i.e. with the oldest images that are engraved into our language itself. ((Lichtenberg.))

| Teaching philosophy involves the same immense difficulty as instruction in geography would have if a pupil brought with him a mass of false and falsely simplified⁶ ideas about the courses and connections of rivers and mountains.⁷ |

| Human beings are deeply imbedded in philosophical, i.e. grammatical, confusions. And freeing them from these presupposes extricating them from the immensely diverse associations they are caught up in. One must, as it were, regroup their entire language. – But of course this language developed⁸ as it did because human beings had – and have – the tendency to think in *this way*. Therefore extricating them only works with those who live in an instinctive state of dissatisfaction with⁹ language. Not with those who, following all of their instincts, live within *the very* herd that has created this language as its proper expression. |

1 (M): \

2 (V): building?

3 (E): Georg Christoph Lichtenberg, *Sudelbücher* H 146.

4 (V): (The ability to do philosophy consists in the ability

5 (M): \ (R): To “joke” “deep”

6 (V): and much too simple

7 (V): of riverbeds and mountain chains.

8 (V): originated

9 (V): live in an instinctive state of rebellion against

Die Sprache hat für Alle die gleichen Fallen bereit; das ungeheure Netz gut gangbarer¹² Irrwege. Und so sehen wir also Einen nach dem Andern die gleichen Wege gehen und wissen schon, wo er jetzt abbiegen wird, wo er geradaus fortgehen wird, ohne die Abzweigung zu bemerken, etc. etc. Ich sollte also an allen den Stellen, wo falsche Wege abzweigen, Tafeln aufstellen, die über die gefährlichen Punkte hinweghelfen.

424 Man hört immer wieder die Bemerkung, daß die Philosophie eigentlich keinen Fortschritt mache, daß die gleichen philosophischen Probleme, die schon die Griechen beschäftigten, uns noch beschäftigen. Die das aber sagen, verstehen nicht den Grund, warum es so sein muß.¹³ Der ist aber, daß unsere Sprache sich gleich geblieben ist und uns immer wieder zu denselben Fragen verführt. Solange es ein Verbum „sein“ geben wird, das zu funktionieren scheint wie „essen“ und „trinken“, solange es Adjektive „identisch“, „wahr“, „falsch“, „möglich“ geben wird, solange von einem Fluß der Zeit und von einer Ausdehnung des Raumes die Rede sein wird, u.s.w., u.s.w., solange werden die Menschen immer wieder an die gleichen rätselhaften Schwierigkeiten stoßen, und auf etwas starren, was keine Erklärung scheint wegheben zu können.

Und dies befriedigt im Übrigen ein Verlangen nach dem Transcendenten,¹⁴ denn, indem sie die „Grenze des menschlichen Verstandes“ zu sehen glauben, glauben sie natürlich, über ihn hinaus sehen zu können.

Ich lese „. . . philosophers are no nearer to the meaning of ‚Reality‘ than Plato got . . .“. Welche seltsame Sachlage. Wie sonderbar, daß Plato dann überhaupt so weit kommen konnte! Oder, daß wir dann nicht weiter kommen konnten! War es, weil Plato *so* gescheit war?

¹⁵Der Konflikt, in welchem wir uns in logischen Betrachtungen immer wieder befinden, ist wie der Konflikt zweier Personen, die miteinander einen Vertrag abgeschlossen haben, dessen letzte Formulierungen in leicht mißdeutbaren Worten niedergelegt sind, wogegen die Erläuterungen zu diesen Formulierungen alles in unmißverständlicher Weise erklären. Die eine der beiden Personen nun hat ein kurzes Gedächtnis, vergißt die Erläuterungen immer wieder, mißdeutet die Bestimmungen des Vertrages und gerät daher¹⁶ fortwährend in Schwierigkeiten. Die andere muß immer von frischem an die Erläuterungen im Vertrag erinnern und die Schwierigkeit wegräumen.

425

¹⁷Erinnere Dich daran, wie schwer es Kindern fällt, zu glauben, (oder einzusehen) daß ein Wort wirklich zwei ganz verschiedene Bedeutungen haben kann.¹⁸

¹⁹Das Ziel der Philosophie ist es, eine Mauer dort zu errichten, wo die Sprache ohnehin aufhört.

²⁰Die Ergebnisse der Philosophie sind die Entdeckung irgend eines schlichten Unsinn, und Beulen, die sich der Verstand beim Anrennen an die Grenze²¹ der Sprache geholt hat. Sie, die Beulen, lassen uns den Wert jener Entdeckung erkennen.²²

²³Welcher Art ist unsere Untersuchung? Untersuche ich die Fälle, die ich als Beispiele anführe, auf ihre Wahrscheinlichkeit? oder Tatsächlichkeit? Nein, ich führe nur an, was möglich ist, gebe also grammatische Beispiele.

12 (V): erhaltener (O): ganzbarer

13 (V): so ist.

14 (V): Überirdischen,

15 (M): \

16 (V): und kommt

17 (M): ✎

18 (V): Bedeutungen hat.

19 (M): \

20 (M): \

21 (V): an das Ende

22 (V): verstehen.

23 (M): \

Language has the same traps ready for everyone; the immense network of easily trodden¹⁰ false paths. And thus we see one person after another walking down the same paths and we already know where he will make a turn, where he will keep going straight ahead without noticing the turn, etc., etc. Therefore wherever false paths branch off I ought to put up signs to help in getting past the dangerous spots.

One keeps hearing the remark that philosophy really doesn't make any progress, that the same philosophical problems that occupied the Greeks keep occupying us. But those who say that don't understand the reason it must be so.¹¹ That reason is that our language has remained constant and keeps seducing us into asking the same questions. So long as there is a verb "be" that seems to function like "eat" and "drink", so long as there are the adjectives "identical", "true", "false", "possible", so long as there is talk about a flow of time and an expanse of space, etc., etc., humans will continue to bump up against the same mysterious difficulties, and stare at something that no explanation seems able to remove.

And this, by the way, satisfies a longing for the transcendental,¹² for in believing that they see the "limit of human understanding" they of course believe that they can see beyond it.

I read ". . . philosophers are no nearer to the meaning of 'Reality' than Plato got . . .". What a strange state of affairs. How strange in that case that Plato could get that far in the first place! Or that after him we were not able to get further! Was it because Plato was *so* clever?

¹³The conflict in which we constantly find ourselves when we undertake logical investigations is like the conflict between two people who have concluded a contract with each other, the last formulations of which are set down in easily misunderstood words, whereas the explanations of these formulations explain everything unambiguously. Now one of the two people has a short memory, constantly forgets the explanations, misinterprets the provisions of the contract, and therefore continually runs into difficulties. The other person has to remind him over and over of the explanations in the contract and remove the difficulty.

¹⁴Remember what a hard time children have believing (or realizing) that a word really can have¹⁵ two completely different meanings.

¹⁶The goal of philosophy is to erect a wall at the point where language ends anyway.

¹⁷The results of philosophy are the discovery of one or another piece of plain nonsense, and are the bumps that understanding got by running its head up against the limits¹⁸ of language. These bumps allow us to recognize¹⁹ the value of that discovery.

²⁰What is the nature of our investigation? Am I investigating the cases that I give as examples with a view toward their probability, or their actuality? No, I'm just presenting what is possible, and am therefore giving grammatical examples.

10 (V): of well-kept

11 (V): it is so.

12 (V): supernatural,

13 (M): \

14 (M): ✎

15 (V): really has

16 (M): \

17 (M): \

18 (V): end

19 (V): understand

20 (M): \

Philosophie wird nicht in Sätzen, sondern in einer Sprache niedergelegt.

Wie Gesetze nur Interesse gewinnen, wenn sie übertreten werden²⁴ so gewinnen gewisse grammatische Regeln erst dann Interesse, wenn die Philosophen sie übertreten möchten.

- 426 Die Wilden haben Spiele (oder wir nennen es doch so), für die sie keine geschriebenen Regeln, kein Regelverzeichnis besitzen. Denken wir uns nun die Tätigkeit eines Forschers, die Länder dieser Völker zu bereisen und Regelverzeichnisse für ihre Spiele anzulegen. Das ist das ganze Analogon zu dem, was der Philosoph tut. (Warum sage ich aber nicht: „Die²⁵ Wilden haben Sprachen (oder wir . . .), . . . keine geschriebene Grammatik haben . . .“?)²⁶

24 (V): wenn die Neigung besteht, sie zu übertreten, 25 (O): nicht: Die
26 (O): haben . . .“?

Philosophy is not laid down in propositions, but in a language.

Just as laws only become interesting when they are transgressed,²¹ certain grammatical rules only get interesting when philosophers want to transgress them.

Savages have games (that's what we call them, anyway) for which they have no written rules, no inventory of rules. Now let's imagine the activity of an explorer travelling throughout the countries of these peoples and setting up lists of rules for their games. This is completely analogous to what the philosopher does. ((But why don't I say: "Savages have languages (that's what we . . .) . . . have no written grammar . . ."?))

21 (V): when there is an inclination to transgress them,

427 Die philosophischen Probleme treten uns im praktischen Leben gar nicht entgegen (wie etwa die der Naturlehre), sondern erst, wenn wir uns bei der Bildung unserer Sätze nicht vom praktischen Zweck, sondern von gewissen Analogien in der Sprache leiten lassen.

Was zum Wesen der Welt gehört, kann die Sprache nicht ausdrücken. Daher kann sie nicht *sagen*, daß Alles fließt. Nur was wir uns auch anders vorstellen könnten, kann die Sprache sagen.

Daß Alles fließt, muß im Wesen der Berührung der Sprache mit der Wirklichkeit liegen. Oder besser: daß Alles fließt, muß im Wesen der Sprache liegen. Und, erinnern wir uns: im gewöhnlichen Leben fällt uns das nicht auf – sowenig, wie die verschwommenen Ränder unseres Gesichtsfeldes („weil wir so daran gewöhnt sind“, wird Mancher sagen). Wie, bei welcher Gelegenheit, glauben wir denn darauf aufmerksam zu werden? Ist es nicht, wenn wir Sätze gegen die Grammatik der Zeit bilden wollen?

428 Wenn man sagt, daß „alles fließt“, so fühlen wir, daß wir gehindert sind, das Eigentliche, die eigentliche Realität festzuhalten. Der Vorgang auf der Leinwand entschlüpft uns eben, weil er ein Vorgang ist. Aber wir beschreiben doch etwas; und ist das ein anderer Vorgang? Die Beschreibung steht doch offenbar gerade mit dem Bild auf der Leinwand in Zusammenhang. Es muß dem Gefühl unserer Ohnmacht ein falsches Bild zugrunde liegen. Denn was wir beschreiben wollen können, das können wir beschreiben.

Ist nicht dieses falsche Bild das eines Bilderstreifens, der so geschwind vorbeiläuft, daß wir keine Zeit haben, ein Bild aufzufassen.

Wir würden nämlich in diesem Fall geneigt sein, dem Bilde nachzulaufen. Aber dazu gibt es ja im Ablauf eines Vorgangs nichts analoges.

Es ist merkwürdig, daß wir das Gefühl, daß das Phänomen uns entschlüpft, den ständigen Fluß der Erscheinung, im gewöhnlichen Leben nie spüren, sondern erst, wenn wir philosophieren. Das deutet darauf hin, daß es sich hier um einen Gedanken handelt, der uns durch eine falsche Verwendung unserer Sprache suggeriert wird.

We Don't Encounter Philosophical Problems at all in Practical Life (as we do, for Example, Those of Natural Science). We Encounter them only When we are Guided not by Practical Purpose in Forming our Sentences, but by Certain Analogies within Language.

Language cannot express what belongs to the essence of the world. Therefore it cannot *say* that everything is in flux. Language can only say what we could also imagine differently.

That everything is in flux must be inherent in the contact between language and reality. Or better: That everything is in flux must be inherent to language. And, let's remember: in everyday life we don't notice that – any more than we notice the blurred edges of our visual field (“because we are so used to it”, some will say). How, on what occasion, is it that we start noticing it? Isn't it when we want to form sentences contrary to the grammar of our present time?

When it is said that “everything is in flux” we feel that we are hindered in pinning down the actual – actual reality. The event on the screen escapes us precisely because it is an event. But we *are* describing something; and is that a different event? After all, the description is obviously linked closely to the picture on the screen. There must be a false image underlying our feeling of powerlessness. For what we can want to describe we can describe.

Isn't this false image that of a strip of pictures that runs by so quickly that we don't have any time to perceive a single picture?

For in that case we would be inclined to chase after the picture. But of course there is nothing analogous to that in the course of an event.

It's remarkable that in everyday life we never have the feeling that the phenomenon is getting away from us, that we never sense the continual flow of appearance – not until we philosophize. This points to the fact that here we are dealing with a thought that is suggested to us by a misuse of our language.

Das Gefühl ist nämlich, daß die Gegenwart in die Vergangenheit schwindet, ohne daß wir es hindern können. Und hier bedienen wir uns doch offenbar des Bildes eines Streifens, der sich unaufhörlich an uns vorbeibewegt und den wir nicht aufhalten können. Aber es ist natürlich ebenso klar, daß das Bild mißbraucht ist. Daß man nicht sagen kann „die Zeit fließt“ wenn man mit „Zeit“ die Möglichkeit der Veränderung meint.

429 Daß uns nichts auffällt, wenn wir uns umsehen, im Raum herumsehen, unseren eigenen Körper fühlen etc. etc., das zeigt, wie natürlich uns eben diese Dinge sind. Wir nehmen nicht wahr, daß wir den Raum perspektivisch sehen oder daß das Gesichtsbild gegen den Rand zu in irgendeinem Sinne verschwommen ist. Es fällt uns nie auf und kann uns nie auffallen, weil es *die* Art der Wahrnehmung ist. Wir denken nie darüber nach, und es ist unmöglich, weil es zu der Form unserer Welt keinen Gegensatz gibt.

Ich wollte sagen, es ist merkwürdig, daß die, die nur den Dingen, nicht unseren Vorstellungen, Realität zuschreiben, sich in der Vorstellungswelt so selbstverständlich bewegen und sich nie aus ihr heraussehen.

D.h., wie selbstverständlich ist doch das Gegebene. Es müßte mit allen Teufeln zugehen, wenn das das kleine, aus einem schiefen Winkel aufgenommene Bildchen wäre.

Dieses Selbstverständliche, *das Leben*, soll etwas Zufälliges, Nebensächliches sein; dagegen etwas, worüber ich mir normalerweise nie den Kopf zerbreche, das Eigentliche!

D.h., das, worüber hinaus man nicht gehen kann, noch gehen will, wäre nicht die Welt.

Immer wieder ist es der Versuch, die Welt in der Sprache abzugrenzen und hervorzuheben – was aber nicht geht. Die Selbstverständlichkeit der Welt drückt sich eben darin aus, daß die Sprache nur sie bedeutet, und nur sie bedeuten kann.

Denn, da die Sprache die Art ihres Bedeutens erst von ihrer Bedeutung, von der Welt, erhält, so ist keine Sprache denkbar, die nicht diese Welt darstellt.

In den Theorien und Streitigkeiten der Philosophie finden wir die Worte, deren Bedeutungen uns vom alltäglichen Leben her wohlbekannt sind, in einem ultraphysischen Sinne angewandt.

430 ¹Wenn die Philosophen ein Wort gebrauchen und nach seiner Bedeutung forschen, muß man sich immer fragen: wird denn dieses Wort in der Sprache, für die es geschaffen ist,² je tatsächlich so gebraucht?

Man wird dann meistens finden, daß es nicht so ist, und das Wort entgegen seiner normalen³ Grammatik gebraucht wird. („Wissen“, „Sein“, „Ding“.)

⁴(Den Philosophen geht es oft wie den kleinen Kindern,⁵ die zuerst mit ihrem Bleistift beliebige⁶ Striche auf ein Papier kritzeln und dann⁷ den Erwachsenen fragen „was ist das?“ – Das ging so zu: Der Erwachsene hatte dem Kind öfters etwas vorgezeichnet und gesagt: „das ist ein Mann“, „das ist ein Haus“, u.s.w. Und nun macht das Kind auch Striche und fragt: was ist nun *das*?)

1 (M): ↘

2 (V): Sprache, die es geschaffen hat,

3 (V): Wort gegen seine normale

4 (M): \

5 (V): Die Philosophen sind oft wie kleine Kinder,

6 (V): Bleistift irgend welche

7 (V): nun

For the feeling is that the present fades into the past without our being able to prevent it. And here we are obviously using the image of a strip that constantly moves past us and that we can't stop. But of course it's just as clear that the image has been misused. That one cannot say "time flows" if by "time" one means the possibility of change.

That we don't notice anything when we look around, look around in space, feel our own bodies, etc., etc., shows how natural these very things are to us. We don't perceive that we see space perspectively, or that our visual image is in some sense blurred towards its edge. We never notice this, and can never notice it, because it is *the* mode of perception. We never think about it, and it is impossible to do so, because there is no opposite to the form of our world.

I wanted to say that it's remarkable that those who ascribe reality only to things and not to our ideas move about so comfortably in the world of ideas and never long to escape from it.

In other words, how self-evident the given is! Things would have to have gone to blazes for that to be just a tiny photograph taken from a skewed angle.

The self-evident, *life*, is supposed to be something accidental, unimportant; on the other hand something that normally I never puzzle over is supposed to be what is real!

That is to say, what one neither can nor wants to go beyond would not be the world.

Again and again there is the attempt to delimit and to display the world in language – but that doesn't work. The self-evidence of the world is expressed in the very fact that language signifies only it, and can only signify it.

Because language doesn't have any way of signifying something until it gets it from what it signifies, from the world, no language is conceivable that doesn't represent this world.

In the theories and disputes of philosophy we find words whose meanings are well known to us from everyday life being used in an ultraphysical sense.

¹When philosophers use a word and search for its meaning, one must always ask oneself: Is this word ever really used this way in the language for which it has been created?²

Usually one will then find that it is not so, and that the word is being used contrary to³ its normal grammar. ("Knowing", "Being", "Thing".)

⁴(Philosophers often fare like little children,⁵ who first scribble random lines⁶ on a piece of paper with their pencils, and then⁷ ask an adult "What is that?" – Here's how this happened: the adult had drawn something for the child several times and had said: "That's a man", "That's a house", etc. And then the child draws lines too, and asks: "Now what's *that*?")

1 (M): ↘

2 (V): language that has created it?

3 (V): used against

4 (M): \

5 (V): Philosophers are often like little children,

6 (V): scribble some sort of lines

7 (V): now

Methode in der Philosophie. Möglichkeit des ruhigen Fortschreitens.

Die eigentliche Entdeckung ist die, die mich fähig macht, mit dem Philosophieren aufzuhören, wann ich will.

Die die Philosophie zur Ruhe bringt, so daß sie nicht mehr von Fragen gepeitscht wird,¹ die *sie selbst* in Frage stellen.

Sondern es wird jetzt an Beispielen eine Methode gezeigt, und die Reihe dieser Beispiele kann abgebrochen werden.²

Richtiger hieße es aber: Es werden Probleme gelöst (Beunruhigungen³ beseitigt), nicht *ein* Problem.

432 Die Unruhe in der Philosophie kommt daher, daß die Philosophen die Philosophie falsch ansehen, falsch sehen, nämlich gleichsam in (unendliche) Längsstreifen zerlegt, statt in (endliche) Querstreifen. Diese Umstellung der Auffassung macht die *größte* Schwierigkeit. Sie wollen also gleichsam den unendlichen Streifen erfassen, und klagen, daß dies⁴ nicht Stück für Stück möglich ist. Freilich nicht, wenn man unter einem Stück einen endlosen Längsstreifen versteht. Wohl aber, wenn man einen Querstreifen als ganzes, definitives Stück⁵ sieht. – Aber dann kommen wir ja mit unserer Arbeit nie zu Ende! Gewiß⁶ nicht, denn sie hat ja keins.

(Statt der turbulenten Mutmaßungen und Erklärungen wollen wir die ruhige Feststellung⁷ sprachlicher Tatsachen.)⁸

Wir müssen die ganze Sprache durchpflügen.

(Die meisten Menschen, wenn sie eine philosophische Untersuchung anstellen wollen, machen es wie Einer, der äußerst nervös einen Gegenstand in einer Lade sucht. Er wirft Papiere aus der Lade heraus – das Gesuchte mag darunter sein – blättert hastig und ungenau unter den übrigen. Wirft wieder einige in die Lade zurück, bringt sie mit den andern durcheinander, u.s.w. Man kann ihm dann nur sagen: Halt, wenn Du *so* suchst, kann ich Dir nicht suchen helfen. Erst mußt Du anfangen, in vollster Ruhe methodisch eins nach dem andern zu untersuchen; dann bin ich auch bereit, mit Dir zu suchen und mich auch in der Methode nach Dir zu richten.)

1 (V): ist,

2 (V): kann man abbrechen.

3 (V): Schwierigkeiten

4 (V): es

5 (V): als Stück

6 (V): Freilich

7 (V): Festsetzung

8 (V): wollen wir ruhige Darlegungen // Erwägung
// Konstatierungen // sprachlicher Tatsachen
geben.) // von sprachlichen Tatsachen geben.)

Method in Philosophy. The Possibility of Quiet Progress.

The real discovery is the one that makes me able to stop doing philosophy when I want to.

The one that quiets philosophy down, so that it is no longer lashed by questions that call *itself* into question.

Instead, we now demonstrate a method with the help of examples; and the series of these examples can be broken off.¹

But more correctly, one should say: It's not a *single* problem that is solved – rather, problems are solved (worries² removed).

Unrest in philosophy comes from philosophers looking at, seeing, philosophy all wrong, namely, as cut up into (infinite) vertical strips, as it were, rather than into (finite) horizontal strips. This change in understanding creates the *greatest* difficulty. They want to grasp the infinite strip, as it were, and they complain that this³ is not possible piece by piece. Of course it isn't, if by "a piece" one understands an endless vertical strip. But it is, if one sees a horizontal strip as a whole, definitive piece.⁴ – But then we'll never get finished with our work! Certainly⁵ not, because it doesn't have an end.

(Instead of turbulent conjectures and explanations, we want the calm ascertaining of linguistic facts.)⁶

We must plough though the whole of language.

(When most people want to engage in a philosophical investigation, they act like someone who is quite nervously looking for an object in a drawer. He throws papers out of the drawer – what he's looking for may be among them – leafs around among the others hastily and sloppily. Throws some back into the drawer, mixes them up with the others, and so on. Then one can only tell him: Stop, if you search in *that* way, I can't help you look. First you have to start by examining one thing after another methodically, and in complete peace; then I am willing to join you in your search and to follow you in terms of method as well.)

1 (V): and one can break off the series of these examples.

2 (V): difficulties

3 (V): it

4 (V): as a piece.

5 (V): Of course

6 (V): we want to give a calm presentation // consideration // statement // of linguistic facts.) // of linguistic facts.)

Die Mythologie in den Formen unserer Sprache. ((Paul Ernst.))

In den alten Riten haben wir den Gebrauch einer äußerst ausgebildeten Gebärdensprache.

Und wenn ich in Frazer lese, so möchte ich auf Schritt und Tritt sagen: Alle diese Prozesse, diese Wandlungen der Bedeutung, haben wir noch in unserer Wortsprache vor uns. Wenn das, was sich in der letzten Garbe verbirgt, der „Kornwolf“ genannt wird, aber auch diese Garbe selbst, und auch der Mann der sie bindet, so erkennen wir hierin einen uns wohlbekannten sprachlichen Vorgang.

Der Sündenbock, auf den man seine Sünde legt und der damit in die Wüste hinausläuft, – ein falsches Bild, ähnlich denen, die die philosophischen Irrtümer verursachen.

Ich möchte sagen: nichts zeigt unsere Verwandtschaft mit jenen Wilden besser, als daß Frazer ein ihm und uns so geläufiges Wort wie „ghost“ oder „shade“ bei der Hand hat, um die Ansichten dieser Leute zu beschreiben.

434 (Das ist ja doch etwas anderes, als wenn er etwa beschriebe, die Wilden bildeten¹ sich ein, daß ihnen ihr Kopf herunterfällt, wenn sie einen Feind erschlagen haben. Hier hätte *unsere Beschreibung* nichts Abergläubisches oder Magisches an sich.)

Ja, diese Sonderbarkeit bezieht sich nicht nur auf die Ausdrücke „ghost“ und „shade“, und es wird viel zu wenig Aufhebens davon gemacht, daß wir das Wort „Seele“, „Geist“ („spirit“) zu unserem eigenen gebildeten Vokabular zählen. Dagegen ist es eine Kleinigkeit, daß wir nicht glauben, daß unsere Seele ißt und trinkt.

In unserer Sprache ist eine ganze Mythologie niedergelegt.

Austreiben des Todes oder Umbringen des Todes; aber andererseits wird er als Gerippe dargestellt, also selbst in gewissem Sinne tot. „As dead as death.“ „Nichts ist so tot wie der Tod; nichts so schön wie die Schönheit selbst!“ Das Bild, worunter man sich hier die Realität denkt ist, daß die Schönheit, der Tod, etc. die reinen (konzentrierten) Substanzen sind,² während sie in einem schönen Gegenstand als Beimischung vorhanden sind.³ – Und erkenne ich hier nicht meine eigenen Betrachtungen über „Gegenstand“ und „Komplex“? (Plato.)

Die primitiven Formen unserer Sprache: Substantiv, Eigenschaftswort und Tätigkeitswort zeigen das einfache Bild, auf dessen Form sie alles zu bringen sucht.

1 (V): bilden

2 (V): die reine (konzentrierte) Substanz ist,

3 (V): ist.

The Mythology in the Forms of our Language. ((Paul Ernst.))

In ancient rites we find the use of an extremely well-developed language of gestures.

And when I read Frazer, I would like to say every step of the way: All these processes, these changes of meaning, we still have right in front of us in our word-language. If what is hidden in the last sheaf, but also the sheaf itself, and also the man who binds it, is called the “Cornwolf”, then we recognize in this a well-known linguistic process.

The scapegoat, on whom one lays one’s sin, and who runs out into the desert with it – a false picture, similar to those that cause errors in philosophy.

I would like to say: Nothing shows our kinship with those savages better than that Frazer has at hand a word like “ghost” or “shade” – which is so familiar to him and to us – to describe the views of these people.

(Indeed, this is different than if he were to relate, for instance, that the savages imagined¹ that their heads fall off when they have slain an enemy. Here there would be nothing superstitious or magical about *our description*.)

Indeed, this oddity refers not only to the expressions “ghost” and “shade”, and much too little is made of it that we include the words “soul” and “spirit” in our own educated vocabulary. Compared to this it’s a trifle that we do not believe that our soul eats and drinks.

An entire mythology is laid down in our language.

Driving out death or killing death; but on the other hand it is portrayed as a skeleton, and therefore as dead itself, in a certain sense. “As dead as death.” “Nothing is as dead as death; nothing as beautiful as beauty itself!” The picture according to which reality is thought of here is that beauty, death, etc., are the pure (concentrated) substances,² whereas in a beautiful object they are³ contained as an admixture. – And don’t I recognize my own observations here about “object” and “complex”? (Plato.)

The primitive forms of our language – noun, adjective and verb – show the simple picture to whose form language tries to reduce everything.

1 (V): imagine

3 (V): object it is

2 (V): etc., is the pure (concentrated) substance,

435 Solange man sich unter der Seele ein *Ding*, einen *Körper* vorstellt, der in unserem Kopfe ist, solange ist diese Hypothese *nicht* gefährlich. Nicht in der Unvollkommenheit und Rohheit unserer Modelle liegt die Gefahr, sondern in ihrer Unklarheit (Undeutlichkeit).

Die Gefahr beginnt, wenn wir merken, daß das alte Modell nicht genügt, es nun aber nicht ändern, sondern nur gleichsam sublimieren. Solange ich sage, der Gedanke ist in meinem Kopf, ist alles in Ordnung; gefährlich wird es, wenn wir sagen, der Gedanke ist nicht in meinem Kopfe, aber in meinem Geist.

As long as we imagine the soul as a *thing*, a *body*, in our heads, this hypothesis is *not* dangerous. The danger doesn't lie in the imperfection and crudity of our models, but in their lack of clarity (vagueness).

The danger sets in when we notice that the old model is inadequate, but then we don't change it, but only sublimate it, as it were. So long as I say the thought is in my head, everything is all right; things get dangerous when we say that the thought is not in my head, but in my mind.

Phänomenologie.

Phenomenology.

Phänomenologie ist Grammatik.

Die Untersuchung der Regeln des Gebrauchs unserer Sprache, die Erkenntnis dieser Regeln und übersichtliche Darstellung, läuft auf das hinaus, d.h. leistet dasselbe, was man oft durch die Konstruktion einer phänomenologischen Sprache erzielen¹ will.

Jedesmal, wenn wir erkennen, daß die und die Darstellungsweise auch durch eine andre ersetzt werden kann, machen wir einen Schritt zu diesem Ziel.

438 »Angenommen, mein Gesichtsbild wären zwei gleichgroße rote Kreise auf blauem Grund: was ist hier in zweifacher Zahl vorhanden, und was einmal? (Und was bedeutet diese Frage überhaupt?) – Man könnte sagen: wir haben hier *eine* Farbe, aber zwei Örtlichkeiten. Es wurde aber auch gesagt, rot und kreisförmig seien Eigenschaften von zwei Gegenständen, die man Flecke nennen könnte, und die in gewissen räumlichen Beziehungen zueinander stehen.« Die Erklärung „es sind hier zwei Gegenstände – Flecke –, die . . .“ klingt wie eine Erklärung der Physik. Wie wenn Einer fragt „was sind das für rote Kreise, die ich dort sehe“ und ich antworte „das sind zwei rote Laternen, etc.“. Eine Erklärung wird aber hier nicht gefordert (unsere Unbefriedigung durch eine Erklärung lösen zu wollen ist der Fehler der Metaphysik). Was uns beunruhigt, ist die Unklarheit über die Grammatik des Satzes „ich sehe zwei rote Kreise auf blauem Grund“; insbesondere die Beziehungen zur Grammatik der Sätze² wie „auf dem Tisch liegen zwei rote Kugeln“; und wieder „auf diesem Bild sehe ich zwei Farben“. Ich darf³ natürlich statt des ersten Satzes sagen: „ich sehe zwei Flecken von⁴ den Eigenschaften Rot und kreisförmig und in der räumlichen Beziehung Nebeneinander“ – und ebensowohl: „ich sehe die Farbe rot an zwei kreisförmigen Örtlichkeiten nebeneinander“ – wenn ich bestimme, daß diese Ausdrücke das gleiche bedeuten sollen, wie der obige Satz. Es wird sich dann einfach die Grammatik der Wörter „Fleck“, „Örtlichkeit“, „Farbe“, etc. nach der (Grammatik) der Wörter des ersten Satzes richten müssen. Die Konfusion entsteht hier dadurch, daß wir glauben, über das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein eines Gegenstands (Dinges) – des Flecks – entscheiden zu müssen: wie wenn man entscheidet, ob, was ich sehe (im physikalischen Sinn) ein roter Anstrich oder ein Reflex ist.

Irrtümliche Anwendung unserer physikalischen Ausdrucksweise auf Sinnesdaten. „Gegenstände“, d.h. Dinge, Körper im Raum des Zimmers – und „Gegenstände“ im Gesichtsfeld; der Schatten eines Körpers an der Wand als Gegenstand! Wenn man gefragt wird: „existiert der Kasten noch, wenn ich ihn nicht anschau“, so ist die korrekte Antwort: „ich glaube nicht, daß ihn jemand gerade dann wegtragen wird, oder zerstören“. Die Sprachform „ich nehme x wahr“ bezieht sich ursprünglich auf ein Phänomen (als Argument) im physikalischen Raum (ich meine hier: im „Raum“ der alltäglichen

1 (V): leisten
2 (V): Grammatik eines Satzes

3 (V): kann
4 (V): mit

Phenomenology is Grammar.

The investigation of the rules of the use of our language, the recognition of these rules, and their clearly surveyable representation amounts to, i.e. accomplishes the same thing as, what one often wants to achieve¹ in constructing a phenomenological language.

Each time we recognize that such and such a mode of representation can be replaced by another one, we take a step toward that goal.

»Say my visual image were of two red circles of equal size on a blue background: what is there here in two's and what once? (And what does this question mean, anyway?) – One could say: Here we have *one* colour, but two locations. But it was also said that red and circular were properties of two objects that one could call spots and that are spatially related to each other in particular ways.« The explanation “here are two objects – spots, – that . . .” sounds like an explanation from physics. As when someone asks “What sorts of red circles are those that I see over there?”, and I answer “Those are two red lanterns, etc.” But here no explanation is being demanded (wanting to remove our dissatisfaction with an explanation is the mistake of metaphysics). What disturbs us is the lack of clarity about the grammar of the sentence “I see two red circles on a blue background” – in particular its relations to the grammar of sentences² such as “Two red balls are lying on the table”, and “I see two colours in this picture”. Of course instead of the first sentence I'm allowed to³ say: “I see two spots with the properties of red and circular and in the spatial relationship of being next to each other” – and equally well: “I see the colour red at two circular locations next to each other” – if I stipulate that these expressions are to mean the same thing as the sentence above. In that case the grammar of the words “spot”, “location”, “colour”, etc. will just have to be guided by the grammar of the words of the first sentence. The confusion arises from our believing that we have to decide about the presence or absence of an object (a thing) – of the spot; as when I decide whether what I'm seeing (in a physical sense) is a red coat of paint or a reflection.

Erroneous application of our physical mode of expression to sense data. “Objects”, i.e. things, bodies in the space of a room – and “objects” in one's visual field; the shadow of a body on the wall as an object! If one is asked: “Does the wardrobe still exist when I don't look at it?” the correct answer is: “I don't think that right then somebody is going to carry it off or destroy it”. The linguistic form “I perceive x” originally refers to a phenomenon (as an argument) in physical space (here I mean “in space” in the ordinary way of speaking). Therefore I can't automatically apply this form to what is called “sense data”, say to

1 (V): accomplish

2 (V): of a sentence

3 (V): sentence I can

439 Ausdrucksweise). Ich kann diese Form daher nicht unbedenklich auf das anwenden, was man Sinnesdatum nennt, etwa auf ein optisches Nachbild. (Vergleiche auch, was wir über die Identifizierung von Körpern, und andererseits von Farbflecken im Gesichtsfeld gesagt haben.) Was es heißt: ich, das Subjekt, stehe dem Tisch, als Objekt, gegenüber, kann ich leicht verstehen; in welchem Sinne aber stehe ich meinem optischen Nachbild des Tisches gegenüber?

„Ich kann diese Glasscheibe nicht sehen, aber ich kann sie fühlen.“ Kann man sagen: „ich kann das Nachbild nicht *sehen*, aber . . .“?

Vergleiche:

„Ich sehe den Tisch deutlich“;

„Ich sehe das Nachbild deutlich“;

„Ich höre die Musik deutlich“;

„Ich höre das Ohrensausen deutlich“.

Ich sehe den Tisch nicht deutlich, heißt etwa: ich sehe nicht alle Einzelheiten des Tisches; – was aber heißt es: „ich sehe nicht alle Einzelheiten des Nachbildes“, oder: „ich höre nicht alle Einzelheiten des Ohrenklingens“?

Könnte man nicht sehr wohl statt „ein Nachbild sehen“ sagen: „ein Nachbild haben“? Denn: ein Nachbild „*sehen*“? im Gegensatz wozu? –

440 „Wenn Du mich auf den Kopf schlägst, sehe ich Kreise.“ – „Sind es genaue Kreise, hast Du sie gemessen?“ (Oder: „sind es gewiß Kreise, oder täuscht Dich Dein Augenmaß?“) – Was heißt es nun, wenn man sagt: „wir können nie einen genauen Kreis sehen“? Soll das eine Erfahrungstatsache sein, oder die Konstatierung einer logischen Unmöglichkeit? – Wenn das letztere, so heißt es also, daß es keinen Sinn hat, vom Sehen eines genauen Kreises zu reden. Nun, das kommt drauf an, wie man das Wort gebrauchen will. „Genauer Kreis“ im Gegensatz zu einem Gesichtsbild, das wir eine sehr kreisähnliche Ellipse⁵ nennen würden, kann man doch gewiß sagen. *Das* Gesichtsbild ist dann ein genauer Kreis,⁶ welches uns wirklich, wie wir sagen würden, kreisförmig erscheint und nicht vielleicht nur sehr ähnlich einem Kreise.⁷ Ist andererseits von einem Gegenstand der Messung die Rede, so gibt es wieder verschiedene Bedeutungen des Ausdrucks „genauer Kreis“, je nach dem Erfahrungskriterium, das ich für die genaue Kreisförmigkeit des Gegenstandes bestimme.⁸ Wenn wir nun sagen:⁹ „keine Messung ist absolut genau“, so erinnern wir hier an einen Zug in der Grammatik der Angabe von Messungsergebnissen. Denn sonst könnte uns Einer sehr wohl antworten: „wie weißt Du das, hast Du alle Messungen untersucht?“ – „Man kann nie einen genauen Kreis sehen“ kann die *Hypothese* sein, daß genauere Messung eines kreisförmig aussehenden Gegenstandes immer zu dem Resultat führen wird, daß der Gegenstand von der Kreisform abweicht. – Der Satz „man kann ein 100-Eck nicht von einem Kreis unterscheiden“ hat nur Sinn, wenn man die beiden auf irgend *eine* Weise unterscheiden kann, und sagen will, man könne sie, etwa visuell, nicht unterscheiden. Wäre keine Methode der Unterscheidung vorgesehen, so hätte es also keinen Sinn, zu sagen, daß diese zwei Figuren (zwar) gleich aussehen, aber „tatsächlich“¹⁰ verschieden sind. Und jener Satz wäre dann etwa die Definition 100-Eck = Kreis.

5 (O): Ellipse

6 (V): Das Gesichtsbild ist ein genauer Kreis,

7 (V): Kreis.

8 (V): je nach dem Erfahrungskriterium, welches ich dafür bestimme, daß der Gegenstand genau kreisförmig ist.

9 (V): Wenn ich nun sage:

10 (V): aber „in Wirklichkeit“

an optical after-image. (Compare also what we said about the identification of physical objects, and on the other hand, of spots of colours within the visual field.) I can easily understand what this means: “I, the subject, am standing across from the table, as an object”; but in what sense am I standing across from my optical after-image of the table?

“I can’t see this pane of glass, but I can feel it.” Can one say: “I can’t *see* the after-image, but . . .”?

Compare: “I see the table clearly”;

“I see the after-image clearly”;

“I hear the music clearly”;

“I hear the ringing in my ears clearly”.

“I don’t see the table clearly” might mean: I don’t see all of the details of the table. – But what does this mean: “I don’t see all of the details of the after-image”? Or this: “I don’t hear all of the details of the ringing in my ears”?

Instead of “see an after-image” couldn’t we perfectly well say: “have an after-image”? For: “*see*” an after-image? In contrast to what? –

“If you hit me on the head, I see circles.” – “Are they true circles, did you measure them?” (Or: “Are they circles for sure, or is your eye playing tricks on you?”) – Now what does it mean when we say: “We can never see a true circle”? Is this supposed to be an empirical fact, or the statement of a logical impossibility? – If it’s the latter, this means that it makes no sense to talk about seeing a true circle. Well, that depends on how one wants to use the word. Certainly one can say “true circle” in contrast to a visual image that we would call an almost circular ellipse. Then *that* visual⁴ image is a true circle that really seems circular to us, as we would say, and not perhaps only quite similar to a circle. If, on the other hand, we are talking about an object of measurement, then once again there are different meanings of the expression “true circle”, depending on the empirical criterion that I lay down for the exact circularity of the object.⁵ Now if we⁶ say: “No measurement is absolutely accurate”, we are calling to mind a grammatical feature of stating the results of measurements. For otherwise someone could perfectly well answer us: “How do you know this, have you checked every measurement?” – “One can never see a true circle” can be the *hypothesis* that more precisely measuring an object that looks circular will result in the object deviating from true circularity. – The sentence “One can’t distinguish a 100-sided figure from a circle” only makes sense if we can distinguish the two in *some* way, and want to say we can’t distinguish them visually, for example. So if no method of differentiation were provided for, it would make no sense to say that these two figures (*do*) look alike, but “actually”⁷ are different. And then that proposition would amount to the definition “100-sided figure = circle”.

4 (V): The visual

6 (V): I

5 (V): that I determine for the circle’s being exactly circular.

7 (V): but “in reality”

Ist in irgendeinem Sinne ein genauer Kreis im Gesichtsfeld undenkbar, dann muß der Satz „im Gesichtsfeld ist nie ein genauer Kreis“ von der Art des Satzes sein: „im Gesichtsfeld ist nie ein hohes C.“¹¹

- 441 Der Farbenraum wird *beiläufig* dargestellt durch das Oktaeder,¹² mit den reinen Farben an den Eckpunkten und diese Darstellung ist eine grammatische, keine psychologische. Zu sagen, daß unter den und den Umständen – etwa – ein rotes Nachbild sichtbar wird, ist dagegen Psychologie (*das* kann sein, oder auch nicht, das andere ist a priori; das Eine kann durch Experimente festgestellt werden, das Andere nicht.)

Was Mach ein Gedankenexperiment nennt, ist natürlich gar kein Experiment. Im Grunde ist es eine grammatische Betrachtung.

Das Farbenoktaeder¹³ ist Grammatik, denn es sagt, daß wir von einem rötlichen Blau, aber nicht von einem rötlichen Grün reden können, etc.

Die Oktaeder-Darstellung¹⁴ ist eine *übersichtliche* Darstellung der grammatischen Regeln.

Wenn Einer konstatieren wollte „der Gesichtsraum ist farbig“, so wären wir versucht, ihm zu antworten: „Wir können ihn uns ja gar nicht anders vorstellen (denken)“. Oder: „Wenn er nicht färbig wäre, so wäre er in dem Sinne verschieden vom Gesichtsraum, wie ein Klang von einer Farbe“. Richtiger aber könnte man sagen: er wäre dann eben nicht, was wir „Gesichtsraum“ nennen. In der Grammatik wird auch die Anwendung der Sprache beschrieben; das, was man den Zusammenhang zwischen Sprache und Wirklichkeit nennen möchte. Wäre er aber nicht beschrieben, so wäre einerseits die Grammatik unvollständig, andererseits könnte sie aus dem Beschriebenen nicht vervollständigt werden. In dem Sinn, in welchem wir ihn uns nicht anders denken können, ist die „Färbigkeit“ in der Definition des Begriffs „Gesichtsraum“, d.h. in der Grammatik des Wortes „Gesichtsraum“, enthalten.

- 442 Wenn manchmal gesagt wird: man könne das Helle nicht sehen, wenn man nicht das Dunkle sähe; so ist das kein Satz der Physik oder Psychologie – denn hier stimmt es nicht und ich kann sehr wohl eine ganz weiße Fläche sehen und nichts Dunkles daneben – sondern es muß heißen: In unserer Sprache wird „hell“ als ein Teil eines Gegensatzpaares hell – dunkel gebraucht. Wie wenn man sagte: im Schachspiel wird die weiße Farbe von Figuren zur Unterscheidung von der schwarzen Farbe anderer Figuren gebraucht.

Ist nicht die Harmonielehre wenigstens teilweise Phänomenologie, also Grammatik!
Die Harmonielehre ist nicht Geschmacksache.

Eine Kirchentontart verstehen, heißt nicht, sich an die Tonfolge gewöhnen, in dem Sinne, in dem ich mich an einen Geruch gewöhnen kann und ihn nach einiger Zeit nicht mehr unangenehm empfinde. Sondern es heißt, etwas Neues hören, was ich früher noch nicht gehört habe, etwa in der Art – ja ganz analog – wie es wäre, 10 Striche |||||, die ich früher nur als 2 mal 5 Striche habe sehen können, plötzlich als ein charakteristisches Ganzes sehen zu können. Oder die Zeichnung eines Würfels, die ich nur als flaches Ornament habe sehen können, auf einmal räumlich zu sehen.

11 (V): dann muß der Satz „ich sehe nie einen
genauen Kreis im Gesichtsfeld“ von der Art
des Satzes sein: „ich sehe nie ein hohes C
im Gesichtsfeld“.

12 (O): Oktaeder,
13 (O): Farbenoktaeder
14 (O): Oktaeder-Darstellung

If a true circle within one's visual field is in some sense inconceivable, then the sentence "There never is a true circle within a visual field" must be the same kind of sentence as "There is never a high C within a visual field".⁸

Colour space is *roughly* represented by an octahedron, the pure colours being at the corners – and this representation is grammatical, not psychological. On the other hand, to say that under such and such circumstances – say – a red after-image appears, *is* psychological (*it* may or may not occur, the other is *a priori*; the one can be ascertained through experiments, the other can't).

What Mach calls a thought-experiment is of course not an experiment at all. At bottom it is a grammatical examination.

The colour-octahedron is grammar because it tells us that we can talk about a reddish blue, but not about a reddish green, etc.

The representation via the octahedron is a *surveyable* representation of the grammatical rules.

If someone were to state: "Our visual space is in colour", then we'd be tempted to answer: "But we can't even imagine (conceive of) it otherwise". Or: "If it weren't in colour then it would differ from our visual space in the sense in which a sound differs from a colour". But one could say, more correctly: "Then it simply wouldn't be what we call 'visual space'". In grammar the application of language is also described – what we would like to call the connection between language and reality. If it weren't described then on the one hand grammar would be incomplete, and on the other it couldn't be completed from what was described. In the sense in which we can't think of it otherwise, "being coloured" is contained in the definition of the concept "visual space", i.e. in the grammar of the words "visual space".

If at times it's said that one can't see what is light if one doesn't see what is dark, then that isn't a proposition of physics or psychology – for in these cases it is incorrect: I can perfectly well see a totally white surface and nothing dark next to it. – Rather, this must be phrased: In our language "light" is used as part of the oppositional pair light–dark. As if one were to say: In chess the white colour of some pieces is used to distinguish them from the black colour of other pieces.

Isn't harmony, at least partially, phenomenology, i.e. grammar!

Harmony isn't a matter of taste.

To understand an ecclesiastical mode doesn't mean to get used to a sequence of tones in the sense in which I can get used to an odour and after a while no longer find it unpleasant. It means, rather, to hear something new, something that I haven't heard before, say like – indeed quite analogously to – suddenly being able to see 10 lines | | | | | | | | , which earlier I was only able to see as 2 times 5 lines, as a characteristic whole. Or like suddenly seeing spatially the drawing of a cube that I had previously been able to see only as a flat decoration.

8 (V): then the sentence "I never see an exact circle in my visual field" has to be the same kind

of sentence as: "I never see a high C in my visual field".

Kann man in die Eigenschaften des Gesichtsraumes tiefer eindringen? etwa durch Experimente?

Die Tatsache, daß man ein physikalisches Hunderteck als Kreis sieht, es nicht von einem physikalischen Kreis unterscheiden kann, sagt gar nichts über die *Möglichkeit*, ein Hunderteck zu sehen.

Daß es mir nicht gelingt, einen physikalischen Körper zu finden, der das Gesichtsbild eines Hundertecks gibt, ist nicht von logischer Bedeutung. Es fragt sich: Hat es *Sinn* von einem Gesichts-Hunderteck zu reden? Oder: Hat es Sinn, von *zugleich gesehenen* 30 Strichen nebeneinander zu reden. Ich glaube, nein.

Der Vorgang ist gar nicht so, daß man zuerst ein Dreieck, dann ein Viereck, Fünfeck etc. bis z.B. zum 50-Eck sieht und dann der Kreis kommt; sondern man sieht ein Dreieck, ein Viereck etc. bis vielleicht zum Achteck, dann sieht man nur mehr Viel-Ecke mit mehr oder weniger langen Seiten. Die Seiten werden kleiner, dann beginnt ein fluktuieren zum Kreis hin und dann kommt der Kreis.

444 Daß eine physikalische Gerade als Tangente an einen Kreis gezogen das Gesichtsbild einer geraden Linie gibt, die ein Stück weit mit der gekrümmten zusammenläuft, beweist auch nicht, daß unser Sehraum nicht euklidisch ist, denn es könnte sehr wohl ein anderes physikalisches Gebilde das der euklidischen Tangente entsprechende Bild erzeugen. Tatsächlich aber ist ein solches Bild undenkbar.

Wenn man fragt, ob die Tonleiter eine unendliche Möglichkeit der Fortsetzung in sich trägt, so ist die Antwort nicht dadurch gegeben, daß man Luftschwingungen, die eine gewisse Schwingungszahl¹ überschreiten, nicht mehr als Töne wahrnimmt, denn es könnte ja die Möglichkeit bestehen, höhere Tonempfindungen auf andere Art und Weise hervorzurufen.

Die Geometrie unseres Gesichtsraumes ist uns gegeben, d.h., es bedarf keiner Untersuchung bis jetzt verborgener Tatsachen, um sie zu finden. Die Untersuchung ist keine, im Sinn einer physikalischen oder psychologischen Untersuchung. Und doch kann man sagen, wir kennen diese Geometrie noch nicht. Diese Geometrie ist Grammatik und die Untersuchung eine grammatische Untersuchung.

Man kann sagen, diese Geometrie liegt offen vor uns (wie alles Logische) – im Gegensatz zur praktischen Geometrie des physikalischen Raumes.

1 (O): Schwingenzahl

Can one Penetrate More Deeply into the Properties of Visual Space? Say through Experiments?

The fact that one sees a physical hundred-sided figure as a circle, that one can't distinguish it from a physical circle, says nothing at all about the *possibility* of seeing a hundred-sided figure.

That I don't succeed in finding a physical body that gives me the visual image of a hundred-sided figure is of no logical importance. The question is: Does it *make sense* to talk about a visual hundred-sided figure? Or does it make sense to talk about 30 lines next to each other as being *seen together simultaneously*? I believe it doesn't.

The process is not like this: at first one sees a triangle, then a square, a pentagon, etc., up to say a fifty-sided figure, and then the circle follows; rather, one sees a triangle, a square, etc., up to perhaps an octagon, and then one only sees polygons with longer or shorter sides. The sides keep getting shorter, then a fluctuation around a circle sets in and then the circle follows.

That a physical straight line, drawn as a tangent to a circle, results in the visual image of a straight line that coincides for a stretch with the bent one, also doesn't prove that our visual space isn't Euclidean, because a different physical structure could perfectly well produce the image that corresponds to the Euclidean tangent. In actuality, however, such an image is inconceivable.

If one asks whether a musical scale contains within it an infinite possibility of being continued, the answer is not given by saying that one no longer perceives vibrations of the air that exceed a particular frequency as notes; because the possibility could exist of eliciting sensations of higher notes in a different way.

The geometry of our visual space is given to us, i.e. finding it doesn't require an investigation into hitherto hidden facts. In the sense of a physical or psychological investigation, ours isn't one at all. Nevertheless, one can say that we don't yet know this geometry. This geometry is grammar, and our investigation is a grammatical investigation.

One can say that this geometry lies before us in full view (as does everything that is logical) – in contrast to the practical geometry of physical space.

Niemand kann uns unseren² Gesichtsraum näher kennen lehren. Aber wir können seine sprachliche Darstellung übersehen lernen. Unterscheide die geometrische Untersuchung von der Untersuchung der Vorgänge im Gesichtsraum.

445 Man könnte beinahe von einer externen und einer internen Geometrie reden. Das, was im Gesichtsraum angeordnet ist, steht in dieser *Art* von Ordnung a priori, d.h. seiner logischen Natur nach und die Geometrie ist hier einfach Grammatik. Was der Physiker in der Geometrie des physikalischen Raumes in Beziehung zu einander setzt, sind Instrumentablesungen, die ihrer *internen* Natur nach nicht anders sind, ob wir in einem geraden oder sphärischen physikalischen Raum leben. D.h., nicht eine Untersuchung der logischen Eigenschaften dieser Ablesungen führt den Physiker zu einer Annahme über die Art des physikalischen Raumes, sondern die abgelesenen Tatsachen.

Die Geometrie der Physik hat es in diesem Sinn nicht mit der Möglichkeit, sondern mit den Tatsachen zu tun. Sie wird von Tatsachen bestätigt; in dem Sinne nämlich, in dem ein *Teil* einer Hypothese bestätigt wird.

Vergleich des Arbeitens an der Rechenmaschine mit dem Messen geometrischer Gebilde. Machen wir bei dieser Messung ein Experiment, oder verhält es sich so, wie im Falle der Rechenmaschine, daß wir nur interne Relationen feststellen und das physikalische Resultat unserer Operationen nichts beweist?

Im Gesichtsraum gibt es natürlich kein geometrisches Experiment.

Ich glaube, daß hier der Hauptpunkt des Mißverständnisses über das a priori und a posteriori der Geometrie liegt.

Jede Hypothese ist eine heuristische Methode. Und in dieser Lage ist, glaube ich, auch die euklidische oder eine andere Geometrie auf den Raum der physikalischen Messungen angewandt. Ganz anders verhält es sich mit dem, was man die Geometrie des Gesichtsraumes nennen kann.

2 (V): den

Nobody can teach us to get to know our visual¹ space better. But we can learn how to get an overview of its linguistic representation. Distinguish a geometrical investigation from an investigation of the processes in visual space.

One could almost talk about an external and internal geometry. What is arranged in visual space is situated in this *kind* of order *a priori*, i.e. by virtue of its logical nature, and in this case geometry is simply grammar. What the physicist puts in relation to each other within the geometry of physical space are readings from instruments that, by virtue of their *internal* nature, are no different whether we are living in a flat or a spherical physical space. That is to say, it isn't an investigation into the logical properties of these readings that leads the physicist to an assumption about the nature of physical space, but the facts that he has read off.

In this sense, the geometry of physics is not concerned with possibility, but with facts. It is confirmed by facts; in the sense, that is, in which *part* of a hypothesis is confirmed.

Compare working with an adding machine to measuring geometric shapes. Are we conducting an experiment when we perform such measurements, or are we only ascertaining internal relationships, as in the case of the adding machine, and the physical result of our operations doesn't prove anything?

Of course there is no such thing as a geometric experiment within visual space.

I believe that herein lies the main point of the misunderstanding about the *a priori* and the *a posteriori* in geometry.

Every hypothesis is a heuristic method. And I believe that Euclidean geometry too, or a different geometry, is in that situation when it is applied to the space of physical measurements. Things are quite different with what we might call the geometry of visual space.

1 (V): know visual

Gesichtsraum im Gegensatz zum euklidischen Raum.

Wenn die Aussage, daß wir nie einen genauen Kreis *sehen*, bedeuten soll, daß wir z.B. keine Gerade sehen, die den Kreis in einem Punkt berührt (d.h., daß nichts¹ in unserm Sehraum die Multiplizität der einen Kreis berührenden Geraden hat) dann ist zu *dieser* Ungenauigkeit nicht ein beliebig hoher Grad der Genauigkeit denkbar.

Das Wort „Gleichheit“ hat eine andere Bedeutung, wenn wir es auf Strecken im Sehraum anwenden, als die, die es, auf den physikalischen Raum angewendet, hat.² Die Gleichheit im Sehraum hat eine andere Multiplizität als die Gleichheit im physikalischen Raum, *darum* können im Sehraum ————— g_1 ³ g_1 und g_2 Gerade (Sehgerade) sein und die Strecken ————— a_5 $a_1 = a_2, a_2 = a_3$, etc. aber *nicht* $a_1 = a_4$ sein. Ebenso hat a_1 a_2 a_3 a_4 der Kreis und die Gerade im Gesichtsraum eine andere Multiplizität als Kreis und Gerade im physikalischen Raum, denn ein kurzes Stück eines gesehenen Kreises kann gerade sein; „Kreis“ und „Gerade“ eben im Sinne der Gesichtsgeometrie angewandt.

447 Die gewöhnliche Sprache hilft sich hier mit dem Wort „scheint“ oder „erscheint“. Sie sagt a_1 und a_2 scheinen gleich zu sein, während zwischen a_1 und a_5 dieser Schein nicht mehr⁴ besteht. Aber sie benutzt das Wort „scheint“ zweideutig. Denn seine Bedeutung hängt davon ab, was diesem Schein nun als das Sein entgegengestellt wird. In einem Fall ist es das Resultat einer Messung, im anderen eine weitere Erscheinung. In diesen Fällen ist also die Bedeutung des Wortes „scheinen“ eine verschiedene.

Wenn ich sage —————⁵ „die obere Strecke ist so lang wie die untere“ und mit diesem Satz das meine, was sonst der Satz „die obere Strecke erscheint mir so lang, wie die untere“ sagt, dann hat in dem Satz das Wort „gleich“ eine ganz andere Bedeutung, wie im gleichlautenden Satz, für den die Verifikation die Übertragung der Länge mit dem Zirkel ist. Darum kann ich z.B. im zweiten Fall von einem Verbessern der Vergleichsmethoden reden, aber nicht im ersten Falle. Der Gebrauch desselben Wortes „gleich“ in ganz verschiedenen Bedeutungen ist sehr verwirrend. Er ist der typische Fall, daß Worte und Redewendungen, die sich ursprünglich auf die „Dinge“ der physikalischen Ausdrucksweise, die „Körper im Raum“ beziehen, auf die Teile unseres Gesichtsfeldes angewendet werden, wobei sie ihre Bedeutung gänzlich wechseln müssen und die Aussagen ihren Sinn verlieren, die früher einen hatten, und andere einen Sinn gewinnen, die in der ersten Ausdrucksart keinen hatten. Wenn auch eine gewisse Analogie bestehen bleibt, eben die, die uns verführt, den gleichen Ausdruck zu gebrauchen.

1 (O): nicht

2 (O): als, die es auf den physikalischen Raum angewendet hat.

3 (F): MS 108, S. 44.

4 (O): Schein noch nicht mehr

5 (F): MS 108, S. 31.

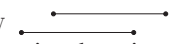
Visual Space in Contrast to Euclidean Space.

If the statement that we never *see* a true circle is supposed to mean that we don't see a straight line, for instance, that touches the circle at a point (i.e. that nothing in our visual space has the multiplicity of a straight line touching a circle), then no degree of accuracy is conceivable that matches *this* inaccuracy.

When we apply it to distances within visual space, the word "equality" has a different meaning from when it is applied to physical space. Equality within visual space has a different multiplicity from equality in physical space. *Therefore* within visual space g_1

g_2 ¹can be straight lines (visually straight lines) and the lengths $a_1 = a_2$, $a_2 = a_3$, etc.; but $a_1 = a_4$ is *not* a possibility. Likewise a circle and a straight line have a different multiplicity in visual space than they do in physical space, for a short piece of a visual circle can be straight – "circle" and "straight line" being used here in the sense of visual geometry.

Here ordinary language helps itself out by using the word "seems" or "appears". It says a_1 and a_2 appear to be equal, whereas this appearance no longer exists between a_1 and a_3 . But it is using the word "appears" ambiguously. For its meaning depends on what is contrasted to this appearance as reality. In the one case it is the result of a measurement, in the other a further appearance. So in these cases the meaning of the word "appear" is different.

If I say  ²"The upper distance is as long as the lower one", and mean by this what is otherwise expressed by the sentence "The upper distance seems to me to be as long as the lower one", then the word "equal" has a completely different meaning in this proposition than in a proposition with the same wording, but whose verification is the transposition of the length with a divider. Therefore I can speak, for instance, about improving the methods of comparison in the second case but not in the first. The use of the same word "equal" with completely different meanings is very confusing. It is typical of the practice whereby words and phrases that originally refer to "things" in a physical mode of expression, to "bodies in space", are applied to parts of our field of vision. In this process they have to change their meanings completely, and those statements that earlier had a sense lose it, and others that had no sense in the first mode of expression gain one. Even though a certain analogy remains – the very one that seduces us into using the same expression.

1 (F): MS 108, p. 44.

2 (F): MS 108, p. 31.

Die visuelle Gerade berührt den visuellen Kreis nicht in *einem* Punkt, sondern in einer visuellen Strecke. – Wenn ich die Zeichnung eines Kreises und einer Tangente ansehe, so ist⁶ nicht das merkwürdig, daß⁷ ich etwa niemals einen vollkommenen Kreis und eine vollkommene Gerade miteinander in Berührung sehe; interessant wird⁸ es erst, wenn ich sie sehe, und dann die Tangente mit dem Kreis ein Stück zusammenläuft.

448

Die Verschwommenheit, Unbestimmtheit unserer Sinneseindrücke ist nicht etwas, dem sich abhelfen läßt, eine Verschwommenheit, der auch völlige Schärfe entspricht (oder entgegensteht). Vielmehr ist diese allgemeine Unbestimmtheit, Ungreifbarkeit, dieses Schwimmen der Sinneseindrücke, das, was mit dem Worte „alles fließt“ bezeichnet worden ist. Wir sagen „man sieht nie einen genauen Kreis“, und wollen sagen, daß, auch wenn wir keine Abweichung von der Kreisform sehen, uns das keinen genauen Kreis gibt. (Es ist, als wollten wir sagen: wir können dieses Werkzeug nie genau führen, denn wir halten nur den Griff und das Werkzeug sitzt im Griff lose.) Was aber verstehen wir dann unter dem Begriff „genauer Kreis“? Wie sind wir zu diesem Begriff überhaupt gekommen? Nun, wir denken z.B. an eine genau gemessene Kreisscheibe aus einem sehr harten Stahl. Aha – also dorthin zielen wir mit dem Begriff „genauer Kreis“. Freilich, davon finden wir im Gesichtsbild nichts. Wir haben eben die Darstellungsform gewählt, die die Stahlscheibe genauer nennt als die Holzscheibe und die Holzscheibe genauer als die Papierscheibe. Wir haben den Begriff „genau“ durch eine Reihe bestimmt und reden von den Sinneseindrücken als Bildern, ungenauen Bildern, der physikalischen Gegenstände.

449

Zwingt mich etwas zu der Deutung, daß der Baum, den ich durch mein Fenster sehe, größer ist als das Fenster? Das kommt darauf an, wie ich die Wörter „größer“ und „kleiner“ gebrauche. – Denken wir uns die alltägliche⁹ visuelle Erfahrung wäre es für uns, Stäbe in verschiedenen Lagen zu¹⁰ sehen, die durch Teilstriche in (visuell) gleiche Teile geteilt, wären. Könnte sich da nicht ein doppelter Gebrauch der Worte „länger“ und „kürzer“ einbürgern. Wir würden nämlich manchmal den Stab den längeren nennen, der in mehr Teile geteilt wäre; etc.

Messen einer Länge im Gesichtsfeld durch Anlegen¹¹ eines visuellen Maßstabes. D.i., eines Stabes, der durch Teilstriche in gleiche Teile geteilt ist. Es gibt hier eine Messung, die darin besteht, daß der Maßstab an zwei Längen¹² angelegt wird. Und zwar können 2 Maßstäbe, je einer an eine Länge, angelegt¹³ werden und das Kriterium für die Gleichheit der Maßeinheit ist, daß die Einheiten gleichlang aussehen. Es kann aber auch ein Maßstab von einer Länge¹⁴ zur andern transportiert werden und das Kriterium der Konstanz der Maßeinheit ist, daß wir keine Veränderung merken. Während das Kriterium dafür, daß die gemessenen Längen sich nicht verändern etwa darin besteht, daß wir keine Bewegung der Endpunkte wahrgenommen haben. Ich kann unzählige verschiedene Bestimmungen darüber treffen, welches das Kriterium der Längengleichheit im Gesichtsbild sein soll und danach werden sich wieder verschiedene Bedeutungen der Maßangaben ergeben.

Teilbarkeit. Unendliche Teilbarkeit.

Die unendliche Teilbarkeit der euklidischen Strecke besteht in der *Regel* (Festsetzung), daß es Sinn hat, von einem n-ten Teil jedes Teils zu sprechen. Spricht man aber von der

6 (V): wäre

7 (V): wenn

8 (V): ist // wäre

9 (V): normale

10 (V): verschiedenen Längen zu

11 (O): Anlagen

12 (V): Strecken

13 (O): 2 Maßstäbe je einer an eine Länge angelegt

14 (V): Strecke

The visual straight line doesn't touch the visual circle at *a* point, but along a visual span.
 – When I look at the drawing of a circle with a tangent it isn't remarkable that I never see³ a true circle and a true straight line touching each other; things don't get⁴ interesting until I do see them, and then the tangent coincides with the circle for a stretch.

The blurredness, indefiniteness, of our sense impressions is not something that can be remedied; and it is not a blurredness to which absolute sharpness corresponds (or is opposed). Rather this general indefiniteness, intangibility, this swimming of sense impressions is what has been referred to by the expression "Everything is in flux". We say "One never sees a true circle", and we want to say that even if we see no deviation from circularity, this doesn't give us a true circle. (It's as if we wanted to say: We can never guide this tool precisely, for all we're holding is its handle, and the tool is loose at the handle.) But what then do we understand by the *concept* "true circle"? How did we arrive at this concept, anyhow? Well, for instance, we think of a precisely measured circular disc of very hard steel. Aha – so that's what we're aiming for with the concept "true circle". To be sure, we find none of *this* in our visual image. We've simply chosen the form of representation that calls the steel disc truer than the wooden disc and the wooden disc truer than the paper disc. We've defined the concept "true" through a series, and we're talking about sense impressions as about pictures, inexact pictures of physical objects.

Does something force me into the interpretation that the tree that I see through my window is bigger than the window? That depends on how I use the words "bigger" and "smaller". – Let's imagine that seeing rods in different positions that were subdivided by lines of graduation into (visually) equal parts were our everyday⁵ visual experience. Couldn't an ambiguous use of the words "longer" and "shorter" come into being here? For sometimes we would call that rod longer that was divided into more parts; etc.

Measuring a length within the visual field by applying a visual yardstick. That is, a rod that is subdivided into equal parts by lines of graduation. Here there is a measurement that consists in applying the yardstick to two lengths.⁶ Specifically, 2 yardsticks can be laid alongside the lengths, each alongside a separate one, and the criterion for the equality of the measuring unit is that the units appear to be of the same length. But a yardstick can also be moved from one length⁷ to another, and the criterion for the constancy of the measuring unit is that we don't notice any change. Whereas the criterion for the measured lengths not changing might consist in our not having observed any movement of the end points. I can set up countless different stipulations for what is to be the criterion for sameness of length in a visual image, and accordingly different meanings of the measurements will result.

Divisibility. Infinite divisibility.

The infinite divisibility of a Euclidean section consists in the *rule* (stipulation) that it makes sense to speak about an n^{th} part of each part. But if one is talking about the divisibility of a

3 (V): tangent then wouldn't it be remarkable if I never saw

4 (V): things aren't // wouldn't be




5 (V): normal

6 (V): stretches.

7 (V): stretch

450 Teilbarkeit einer Länge im Gesichtsraum und fragt, ob eine solche noch teilbar, oder endlos teilbar ist, so suchen wir hier nach einer Regel, die einer gewissen Realität entspricht (aber *wie* entspricht sie ihr?). Ich sehe einen schwarzen Streifen an der Wand vor mir, – ist seine Breite teilbar? Was ist das Kriterium dafür? Hier gibt es nun unzählige Kriterien, die wir alle als Kriterien der Teilbarkeit im Gesichtsfeld bezeichnen¹⁵ würden, und die stufenweise in einander übergehen. Vor allem könnte die Bedeutung von „Teilbarkeit“ so festgelegt werden, daß ein Versuch sie erweist; dann ist es also nicht „logische Möglichkeit“ der Teilung, sondern physische Möglichkeit, und die logische Möglichkeit, die hier in Frage kommt, ist in der Beschreibung des Versuchs der Teilung gegeben – wie immer dieser Versuch ausgehn mag.

Was würden wir nun einen „Versuch der Teilung“ nennen? – Etwa den, einen Strich neben den ersten zu malen, der gleichbreit aussieht und aus einem grünen und roten Längsstreifen besteht, wobei die Erinnerung das Kriterium dafür gäbe, daß der schwarze Streifen die gleiche Breite habe, die er hatte, als wir die Frage stellten. (D.h., daß wir als gleiche Breite des schwarzen Streifens jetzt und früher das *bezeichnen*, was als gleichbreit erinnert wird.) Andererseits könnte ich als Kriterium der Teilbarkeit des schwarzen Streifens festsetzen, daß zugleich mit ihm ein gleich breit aussehender und geteilter Streifen gesehen wird. Und als 451 Vollzug der möglichen Teilung würde ich dann die Ersetzung des ungeteilten durch einen ¹⁶geteilten bezeichnen, bei welcher der zuerst gesehene ungeteilte Streifen bestehen bleibt.

 ¹⁷Ich würde also sagen „a ist¹⁸ teilbar¹⁹“ – weil ich b daneben sehe und „a ist²⁰ geteilt“, wenn ich danach 2 Streifen von der Art b sehe. In der Aussage „a ist geteilt“ bezeichnet „a“ also einen Ort; das nämlich, was *gleichbleibt*, ob a geteilt oder ungeteilt ist. Hier gibt es nun wieder Verschiedenes, was wir als „Ort im Gesichtsfeld“ und „Festlegung eines Ortes im Gesichtsfeld“ bezeichnen. – Wir könnten aber einen Streifen nur dann teilbar nennen, wenn er sich in gleicher (gesehener) Breite in einen geteilten Streifen fortsetzt, oder aber, wenn es uns  ²¹gelingt, einen geteilten Streifen zeitweilig an ihn (im Gesichtsfeld) anzulegen, etc. etc. – Dann aber gibt es das Kriterium der Vorstellbarkeit der Teilung. Wir sagen: „oh ja, diesen Streifen kann ich mir noch ganz leicht geteilt denken“ (oder „vorstellen“). „Wenn eine Teilung dieses Streifens a in ungleiche Teile möglich ist, dann *umsomehr* in gleiche Teile.“ Und hier²²  a haben wir wieder die Festsetzung eines neuen Kriteriums der Teilbarkeit in gleiche Teile. Und hier sagt man: ich kann mir doch in diesem Fall gewiß denken, daß der Streifen halbiert wird.²³ Aber worin besteht diese Fähigkeit²⁴ des Denkens? Kann ich es, wenn ich es versuche? Und wie, wenn es mir nicht gelingt? Was hier mit dem „ich kann mir . . . denken“ gemeint ist, erfährt man, wenn man fragt „wieso kannst Du Dir nun die Halbierung denken“. Darauf ist die Antwort: „ich brauche mir doch nur den schwarzen Teil des Streifens etwas breiter zu denken“; und es wird offenbar angenommen, daß, das zu denken, keine Schwierigkeit mehr hat. In Wirklichkeit aber handelt es sich hier nicht um die Schwierigkeit,²⁵ mir²⁶ ein bestimmtes Bild vor's innere Auge zu rufen, und nicht um etwas, was ich versuchen und mir mißlingen kann; sondern um die Anerkennung einer Regel der Ausdrucksweise. Diese Regel kann allerdings

15 (V): anerkennen

16 (M): 59

17 (F): MS 113, S. 129r.

18 (V): sei

19 (O): geteilt (E): Auf Grund von MS 113 (S. 129v) haben wir hier „geteilt“ durch „teilbar“ ersetzt.

20 (V): sei

21 (F): MS 113, S. 129v.

22 (F): MS 113, S. 130r.



23 (V): wäre.

24 (V): Möglichkeit

25 (V): um Schwierigkeiten,

26 (V): sich

length within visual space, and asks whether this kind of a length is still divisible or infinitely divisible, then in this case we're looking for a rule that corresponds to a particular reality (but *how* does it correspond to it?). I see a black strip on the wall in front of me – is its breadth divisible? What is the criterion for this? Well, there are countless criteria here, all of which we would designate⁸ as criteria of divisibility within the visual field, and which blend into each other step by step. Above all, the meaning of “divisibility” could be stipulated in such a way that a test would show it; so then it isn't the “logical possibility” of division, but a physical possibility; and the logical possibility that is in question here is given in the description of the attempt at division – however this attempt may come out.

Now what would we call an “attempt at division”? – Perhaps painting another line next to the first one, one that looks equally wide and consists of a green and red vertical strip, with memory providing the criterion for the black strip being just as wide as when we asked the question. (That is, for our *designating* what is remembered as being of the same width as *being* the same width of the black strip, both now and before.) On the other hand I could set down as a criterion for the divisibility of the black strip that a divided strip, appearing to be of equal width, is seen simultaneously with it. And then what I would call the carrying out of the possible division would be the replacement of the undivided strip by a⁹ divided one, in the process of which the original undivided strip stays put.¹⁰ Thus I would say “a is divisible¹¹” – because I see b next to it, and “a is divided” when I see the 2 strips in b coming after it. So in the statement “a is divided”, “a” refers to a *location*, i.e. what *remains the same* whether a is divided or undivided. Here once again there are various things that we call “a location in the visual field” and “establishing a location in the visual field”. – But we can only call a strip divisible if it continues into a divided strip of the same (visual) width *or* if we ¹² manage temporarily to lay a divided strip alongside it (in the visual field), etc., etc. – But then there is the criterion of the imaginability of division. We say: “Oh yes, I can quite easily think of (or imagine) this strip as divided.” “If this strip can be divided into unequal parts, then *all the more* can it be divided into equal parts.” And here ¹³ once again we have the establishment of a new criterion of divisibility into equal parts. And here one says: Surely I can imagine in this case that the strip is¹⁴ halved. But what does this mental ability¹⁵ consist in? Can I do it if I try? And what if I don't succeed in doing it? You can find out what is meant here by “I can imagine . . .” by asking “How is it that you can now imagine the halving?” The answer to that is: “All I have to do is imagine the black part of the strip as a little wider”; and obviously it's assumed that to imagine that is no longer difficult. But in this case it actually isn't a question of the difficulty¹⁶ of calling up a particular image before my¹⁷ mind's eye, nor is it a question of something that I can try but fail at; rather, it's a question of acknowledging a rule for a mode of expression. To be sure, this rule can be based on the ability to imagine something; that is to say, in this case a mental image works like a pattern, that is, like a sign, and¹⁸ of course it can also be replaced by a painted pattern. For if I ask: “What

8 (V): acknowledge

9 (M): 59

10 (F): MS 113, p. 129r.

11 (O): divided (E): TS 213 has “divided” here, but we have replaced it with “divisible”, from MS 113, p. 129v.

12 (F): MS 113, p. 129v.

13 (F): MS 113, p. 130r.

14 (V): were

15 (V): this possibility of thinking

16 (V): the difficulties

17 (V): one's

18 (M): 59

452 gegründet sein auf der²⁷ Fähigkeit, sich etwas vorzustellen; d.h. die Vorstellung funktioniert in diesem Fall als Muster, also als Zeichen, und kann²⁸ natürlich auch ersetzt werden durch ein gemaltes Muster. Wenn ich nämlich frage: „was versteht man unter dem Wachsen der Breite eines Streifens“, so wird mir als Erklärung so etwas vorgeführt, es wird mir ein Muster gegeben, das ich, oder dessen Erinnerung ich etwa meiner Sprache einverleibe. Und so kann der, den ich frage „wieso ist der breite Streifen a teilbar, weil b teilbar ist“²⁹ als Antwort den Streifen b verbreitern und mir vorführen,³⁰ wie aus b ein geteilter Streifen von der Breite des a werden kann.³¹ Aber bei dieser Antwort hätte es nun sein Bewenden. Und was hat er zur Erklärung getan? Er hat mir ein Zeichen, ein Muster, in mein Zeichensystem gegeben; das ist alles.



Gibt es nun für die Teilbarkeit des Streifens im Gesichtsraum eine Grenze? Nun – das kann ich festsetzen, wie ich will. – Das heißt: ich kann ein Zeichensystem mit begrenzter Teilbarkeit, oder eins mit unbegrenzter Teilbarkeit einführen – nur kann ich natürlich die Tatsachen nicht kommandieren und muß sie dann mit dem von mir festgesetzten Zeichensystem entsprechend beschreiben. Wenn also meine Vorstellung, bezw. das Gesichtsbild eines geteilten Streifens, einen Teil meines Zeichensystems bildet, so endet dieser Teil meines Symbolismus, wo ich, aus irgend welchen Gründen, unfähig³² bin, eine weitere Verkleinerung der Teile herbeizuführen.³³ Dann aber kann ich mich entscheiden: entweder,³⁴ zu sagen, es gäbe keine weitere Teilung mehr, d.h. von einer solchen zu reden sei sinnlos – und in diesem Falle habe ich mich gebunden, ein eventuell auftretendes Phänomen, das ich versucht wäre, eine weitere Teilung zu nennen, anders zu beschreiben; – oder aber: die³⁵ Teilbarkeit im Symbolismus weitergehen zu lassen, wodurch aber nichts geändert wird, weil ja meine Reihe von Mustern, die auch zur Sprache gehört, ein Ende hat. Soweit diese Reihe von Mustern eine Reihe von Zeichen ist, kommt durch jedes neue Muster ein³⁶ neues Zeichen in die Sprache. Diese Betrachtung ist meist ohne Wichtigkeit; manchmal aber wird sie wichtig. Wir haben einen dem Problem der Teilbarkeit analogen Fall,³⁷ wenn gefragt wird: ist es möglich, jede beliebige Anzahl $3n$ von Strichen ||||| mit einem Blick als Gruppe von Trippeln zu erfassen, oder jede beliebig lange Reihe solcher Striche als ein für ihre Anzahl charakteristisches Bild zu sehen, wie wir es für³⁸ | || ||| |||| können? Auch hier können wir zur Beschreibung unserer Erfahrung ein endliches oder ein unendliches Zahlensystem verwenden, – denn die Reihe der Muster übersehbarer Gruppen hat ein Ende und sie determiniert den Sinn unsrer Sätze ebensowohl, wie das verwendete Zahlensystem.

453 Wenn ich also sagte „wir suchen nach einer Regel, die einer gewissen Realität entspricht“, so liegt die *Entsprechung* in der Einfachheit und leichten Verständlichkeit der Darstellung. Die Regel wird durch die Tatsachen nur insofern gerechtfertigt, als die Wahl eines Koordinatensystems durch ihre Anwendung auf eine Kurve gerechtfertigt wird, die sich in dem System besonders einfach darstellen läßt.

³⁹Es ist möglich, im Gesichtsfeld zwei gleichlange (d.h. gleichlang gesehene⁴⁰) Strecken zu sehen, deren jede durch Farbgrößen in mehrere Teile, gleiche Teile, geteilt ist und beim Zählen dieser Teile zu finden, daß ihre Anzahlen ungleich sind. Wie ist es nun mit einer

27 (V): die

28 (M): 59

29 (F): MS 113, S. 130v.

30 (V): zeigen,

31 (V): des a wird.

32 (O): Gründen unfähig

33 (V): Teile zu bewirken.

34 (V): entscheiden, entweder,

35 (V): aber, die

36 (M): 59

37 (V): der ~~Teilung analogen Fall~~,

38 (O): wie es für

39 (M): 59 |

40 (O): gesehen

do we understand by a strip growing in width?”, then I might be presented with something like that as an explanation, i.e. I might be given a pattern, and I might incorporate it or the memory of it into my language. And in this way if I ask someone “How is it that the broad strip a is divisible on account of b’s being divisible?”, ¹⁹he can answer by widening the strip b and thus demonstrating to me²⁰ how b can turn into²¹ a divided strip of the same width as a. But that answer would be as far as things could go. And what has he done by way of explanation? He put a sign, a pattern, into my system of signs; that’s all.



Now is there a limit to the divisibility of the strip in visual space? Well – I can establish that any way I want. That is: I can introduce a sign system with limited divisibility or one with unlimited divisibility – the only thing is, of course, that I can’t order the facts about, and once I’ve established my sign system I have to use it to describe the facts accordingly. So if my mental or visual image of a divided strip makes up a part of my system of signs, then this part of my symbolism ends where, for whatever reasons, I am incapable of narrowing the parts any further. But then I can decide: either²² to say that there is no further division, i.e. that to speak about one is senseless – and in this case I have obliged myself to give a different description of any phenomenon that might occur and that I might be tempted to call a further division – or: to²³ allow the divisibility to continue within my symbolism. In this case, though, nothing is changed, because of course my series of patterns, which also belongs to language, comes to an end. In so far as this series of patterns is a series of signs, a ²⁴new sign enters language with each new pattern. Usually this consideration is of no importance; but sometimes it becomes important. We have a case analogous to the problem of divisibility when we ask: Is it possible at a glance to grasp any arbitrary number 3n of lines | | | | | | | | | | as a group of triplets, or to see any series of such lines, of whatever length, as a picture that is expressive of their number, as we can do this for | | | | | | | | | |? Here too we can use a finite or infinite number system to describe our experience – for the series of patterns of surveyable groups has an end, and this series determines the sense of our propositions just as much as the number system we use.

So when I said “We’re looking for a rule that corresponds to a particular reality”, the *correspondence* lies in the simplicity and the ease of comprehending the representation of that rule. The rule is justified by the facts only to the same extent as the choice of a system of coordinates is justified by its application to a curve that can be represented with a particular simplicity in that system.

²⁵It is possible to see in your visual field two straight lines of equal length (i.e. lines seen to be of equal length), each of which is divided by different colours into several parts, equal parts, and to find when counting those parts that their numbers are unequal. Now what about

19 (F): MS 113, p. 130v.
 20 (V): thus ~~showing~~ me
 21 (V): b turns into
 22 (V): decide either

23 (V): or to
 24 (M): 59
 25 (M): 59 |

Frage: „Angenommen, ich könnte 30 und 31 Teile als Zahl übersehen, wäre es auch dann möglich, zwei Strecken von 30 und 31 gesichtsgleichen Teilen als gleichlang zu sehen?“ – Nun, wie ist diese Frage zu entscheiden? Vor allem: wie ist das, wenn man 30 Teile als Zahl übersieht? Was kann man dafür als Erklärung geben? Wir können freilich niemandem einen Centaur zeigen, weil es keinen gibt, aber es ist für die Bedeutung des Wortes „Centaur“
 454 wesentlich, daß wir einen malen, oder modellieren können. – So aber ist es auch für den Sinn des Satzes „ich kann 30 Teile als Zahl übersehen“ wesentlich, *was* ich etwa als Beispiel dieses Überblickens zeigen kann, und daß ich keinen Fall eines Überblickens von 30 Strichen als Muster zeigen kann. Hier kann man sagen: ich kann mir das Überblicken von 30 Strichen als Zahlbild⁴¹ nicht vorstellen, ich weiß nicht, wie das wäre, und die Frage „wie wäre es, wenn . . .“ ist für mich unsinnig, denn es ist mir kein Kriterium zur Entscheidung gegeben.

Wenn wir die Bedeutungen der Ausdrücke „gleichlang“ und anderer im Gesichtsraum mit den Bedeutungen derselben Wörter im euklidischen Raum verwechseln, dann kommen⁴² wir auf⁴³ Widersprüche und fragen dann: „Wie ist so eine Erfahrung möglich?! Wie ist es möglich, daß 24 gleichlange Strecken zusammen die gleiche Länge ergeben, wie 25 ebensolange? Habe ich wirklich so eine Erfahrung gehabt?“

„Ist ein Feld eines Schachbretts einfacher, als das ganze Schachbrett?“ Das kommt darauf an, wie Du das Wort „einfacher“ gebrauchst. Meinst Du damit „aus einer kleineren Anzahl von Teilen bestehend“, so sage ich: Wenn diese Teile etwa die Atome des Schachbretts sind, so ist also das Feld einfacher als das Schachbrett. – Wenn Du aber von dem sprichst, was wir am Schachbrett *sehen*,⁴⁴ so bestehen ja die Felder nicht aus Teilen, es sei denn, daß sie wieder aus kleineren Flecken bestehen, und wenn Du dann den Fleck den einfacheren nennst,
 455 der weniger Flecken enthält, so ist wieder das Feld einfacher als das Schachbrett. „Ist aber die gleichmäßig gefärbte Fläche einfach?“ – Wenn „einfach“ bedeutet: nicht aus Flecken mehrerer Farben zusammengesetzt, – ja!

Aber können wir nicht sagen: einfach ist, was sich nicht teilen *läßt*? – *Wie* teilen läßt? Mit dem Messer? Und mit welchem Messer? Beschreibe mir erst die Methode der Teilung, die Du erfolglos anwendest, dann werde ich wissen, was Du „unteilbar“ nennst. Aber vielleicht willst Du sagen:⁴⁵ „unteilbar“ nenne⁴⁶ ich nicht das, was man erfolglos zu teilen versucht, sondern das, wovon es sinnlos (unerlaubt) ist zu sagen, es bestehe aus Teilen. – Dann ist „unteilbar“ eine grammatische Bestimmung. Eine Bestimmung also, die Du selber machen kannst und durch welche Du die Bedeutung, den Gebrauch anderer Wörter festlegst. Wenn ich etwa sage: ein einfarbiger Fleck ist unteilbar (einfach), denn, wenn ich ihn – z.B. – durch einen Strich teile, so ist er nicht mehr einfarbig, – so setze ich damit fest, in welcher Bedeutung ich das Wort „teilen“ gebrauchen will. Wenn nun gefragt wird: „besteht das Gesichtsbild aus minima visibilia“, so fragen wir zurück: wie verwendest Du das Wort „aus . . . bestehen“? Wenn in dem Sinn, in welchem ein Schachbrett aus schwarzen und weißen Feldern besteht, – nein! – Denn Du wolltest doch nicht leugnen, daß wir einfarbige Flecke sehen (ich meine Flecke, deren *Erscheinung* einfarbig ist). Wenn Du aber etwa sagen willst, daß ein *physikalischer* Fleck (ein *meßbarer* Fleck im physikalischen Raum) verkleinert werden kann, bis wir ihn aus einer bestimmten Entfernung nicht mehr sehen, daß er dann beim Entschwinden gemessen und in dieser Ausdehnung der kleinst sichtbare Fleck genannt werden kann, so stimmen wir bei.

41 (V): das Übersehen von 30 Strichen

42 (V): geraten

43 (V): in

44 (V): aber vom visuellen Schachbrett sprichst,

45 (V): sagen: „~~ist~~“

46 (O): nene

this question: “Assuming that at a glance I could take in 30 and 31 parts as numbers, then would it also be possible to see two straight lines divided into 30 and 31 visually equal parts as of equal length?” – Well how can this question be decided? Above all: What’s it like to take in 30 parts as a number? What can be given as an explanation for that? To be sure, we can’t show anyone a centaur because there is no such thing, but it is essential for the meaning of the word “centaur” that we can paint or sculpt one. – And in the same way, *what* I might be able to give as an example of “taking in at a glance” is essential to the sense of the sentence “At a glance I can take in 30 parts as a number”, and it’s also essential that I can’t produce any example of taking in 30 lines as a pattern. Here one can say: I can’t imagine taking in 30 lines as a numerical image,²⁶ I don’t know what that would be like, and the question “What would it be like if . . .” makes no sense to me because I have been given no criterion for deciding it.

If we confuse the meanings of “of the same length” and other expressions in visual space with the meanings of the same words in Euclidean space, we encounter²⁷ contradictions, and then we ask: “How is this kind of an experience possible?! How is it possible that 24 and 25 segments of equal length add up to the same length? Have I really had this kind of an experience?”

“Is one square of a chess board simpler than the whole chess board?” That depends on how you are using the word “simpler”. If by this you mean “consisting of a smaller number of parts” then I say: If these parts are, say, the atoms of the chess board, then the square is simpler than the chess board. – But if you’re talking about what we *see* when we look at the chess board,²⁸ then of course the squares don’t consist of parts, unless they in turn consist of smaller patches; and if you then call the patch simpler that contains fewer patches, then once again the square is simpler than the chess board. “But is a uniformly coloured surface simple?” – If “simple” means: not composed of patches of several colours – yes!

But can’t we say: The simple is what *can’t* be divided? – Can’t be divided *how*? With a knife? And with what kind of knife? First describe for me the method of partition that you are applying unsuccessfully, and then I’ll know what you are calling “indivisible”. But maybe you want to say: What I’m calling “indivisible” is not what one unsuccessfully tries to partition but that of which it makes no sense (is forbidden) to say that it consists of parts. – Then “indivisible” is a grammatical stipulation. And thus a stipulation that you can make yourself and by means of which you can establish the meaning, the use, of other words. If I say, for instance: A monochrome patch is indivisible (simple), because if I divide it – say – with a line, then it’s no longer monochrome – I establish the meaning I want to give to the word “divide”. Now if someone asks: “Does a visual image consist of *minima visibilia*?”, then we respond: How are you using the words “consist of . . .”? If you’re using them in the sense in which a chess board consists of black and white squares, then – no! – Because surely you don’t want to deny that we see monochrome patches (I mean patches the *appearance* of which is monochrome). But if perhaps you want to say that a *physical* patch (a *measurable* patch in physical space) can be reduced until we can no longer see it from a particular distance, and that it can then be measured at the vanishing point, and that at that size it can be called the smallest visible patch, then we agree.

26 (V): 30 lines at a glance,

28 (V): about a visual chess board,

27 (V): we get into

456 Wenn wir in der Geometrie sagen, das regelmäßige Sechseck bestehe aus sechs gleichseitigen Dreiecken, so heißt das, daß es Sinn hat, von einem regelmäßigen Sechseck zu reden, das aus sechs gleichseitigen Dreiecken besteht. Wenn daraufhin gefragt würde „ist also das Sechseck einfach oder zusammengesetzt“, so müßte ich antworten: bestimme Du selbst, wie Du die Wörter „einfach“ und „zusammengesetzt“ gebrauchen willst.

Es scheint, man kann einen einfarbigen Fleck nicht zusammengesetzt sehen, außer, wenn man ihn sich *nicht* einfarbig vorstellt. Die Vorstellung einer Trennungslinie macht den Fleck mehrfarbig,⁴⁷ denn die Trennungslinie muß eine andere Farbe haben, als der übrige Fleck.⁴⁸

Das würde heißen: Die einfachen Bestandteile des Gesichtsfeldes sind einfarbige Flecke. Wie verhält es sich aber dann mit den kontinuierlichen Farbenübergängen!

Kann man sagen, daß der kleinere Fleck einfacher ist als der größere?

Nehmen wir an sie seien einfarbige Kreise, worin soll die größere Einfachheit des kleineren Kreises bestehen?

Man könnte sagen, der größere kann zwar aus dem kleineren und noch einem Teil bestehen, aber nicht vice versa. Aber warum soll ich nicht den kleineren als die Differenz des größeren und des Ringes darstellen?

Es scheint mir also, der kleinere Fleck ist nicht einfacher als der größere.

Ob es einen Sinn hat zu sagen „dieser Teil einer roten Fläche (der durch keine sichtbare Grenze abgegrenzt ist) ist rot“ hängt davon ab, ob es einen absoluten Ort gibt. Denn, wenn im Gesichtsraum von einem absoluten Ort die Rede sein kann, dann kann ich auch diesem absoluten Ort eine Farbe zuschreiben, wenn seine Umgebung gleichfärbig ist.

Wir können in absolutem Sinne⁴⁹ von einem Ort im Gesichtsfeld reden. Denken wir uns, daß ein roter Fleck im Gesichtsfeld verschwindet und in gänzlich neuer Umgebung wieder auftaucht, so hat es Sinn zu sagen, er tauche am gleichen Ort oder an einem andern Ort wieder auf. (Wäre ein solcher Raum mit einer Fläche vergleichbar, die von Punkt zu Punkt eine andere Krümmung hätte, so daß wir jeden Ort auf der Fläche als absolutes Merkmal angeben könnten?)

457 Der Gesichtsraum ist ein gerichteter Raum, in dem es ein Oben und Unten, Rechts und Links gibt. Und diese Bestimmungen⁵⁰ haben nichts mit der Richtung der Schwerkraft oder der rechten und linken Hand zu tun. Sie würden auch dann ihren Sinn beibehalten, wenn wir unser ganzes Leben lang durch ein Teleskop zu den Sternen sähen. – Dann wäre unser Gesichtsfeld ein hellerer Kreis vom Dunkel begrenzt und im Kreis Lichtpunkte.⁵¹ Nehmen wir an, wir hätten nie unsern Körper gesehen, sondern immer nur dieses Bild, wir könnten also die Lage eines Sterns nicht mit der unseres Kopfes oder unserer Füße vergleichen: was zeigt mir dann, daß mein Raum ein Oben und Unten etc. hat, oder einfach: daß er gerichtet ist? Es hat Sinn, zu sagen, daß sich das ganze Sternbild im Kreis *dreht*, obwohl es dadurch seine relative Lage zu nichts im Gesichtsraum ändert. Oder richtiger ausgedrückt: ich rede

47 (O): einfarbig, (E): Wir haben diese Änderung auf Grund von MS 105 (S. 9), MS 111 (S. 31) und TS 208 (S. 1r), 209 (S. 113), 211 (S. 20) und 212 (S. 1248) durchgeführt.

48 (M): /Auslassung I/. (E): Auf Grund von Typoskript 208 (S. 1r–2) haben wir die beiden nun folgenden Bemerkungen mit

einbezogen. Anscheinend wurden sie irrtümlich ausgelassen.

49 (V): in einem absoluten Sinne

50 (M): 35

51 (V): wäre unser Gesichtsfeld dunkel mit einem helleren Kreis und in diesem Lichtpunkte.

If in geometry we say that a regular hexagon consists of six equilateral triangles, then that means that it makes sense to talk about a regular hexagon that consists of six equilateral triangles. If the question were then raised: “Is the hexagon therefore simple or composite?”, I’d have to answer: Decide for yourself how you want to use the words “simple” and “composite”.

It seems that one cannot see a monochrome patch as composite unless one imagines it as *not* monochrome. The mental image of a dividing line makes the patch polychrome,²⁹ because the dividing line has to have a different colour from the rest of the patch.³⁰

That would mean: The simple components of the visual field are monochrome patches. But then what about continuous transitions of colour?

Can we say that a smaller patch is simpler than a larger one?

Let’s assume they are monochrome circles. What is the greater simplicity of the smaller circle supposed to consist in?

We could say that the larger one can consist of the smaller plus another part, but not vice versa. But why shouldn’t I represent the smaller as the difference between the larger and a ring around the smaller?

So it seems to me that the smaller patch isn’t simpler than the larger.

Whether it makes sense to say “This part of a red surface (that is not delimited by any visible boundary) is red” depends on whether an absolute location exists. Because if one can speak about an absolute location within visual space, then I can also assign this absolute location a colour – even if its surroundings are of the same colour.

We can speak about a location within the visual field in an absolute sense. If we imagine that a red patch vanishes from the visual field and reappears in completely new surroundings, then it makes sense to say that it either reappears in the same location or in another one. (Would such a space be comparable to a surface that had different curvatures from one point to the next, so that we could list each location on the surface as an absolute feature?)

Visual space is a directional space in which there is up and down, right and left. And these determinations³¹ have nothing to do with the direction of gravity or one’s right and left hand. They would retain their sense even if we looked at the stars through a telescope for our entire lives. – Then our visual field would be a bright circle bounded by darkness with points of light in the circle.³² Let’s assume that we had never seen our bodies, but always just this image, so that we couldn’t compare the position of a star with that of our head or our feet: What would then show me that my space has an up and a down, etc., or simply: that it is directional? It makes sense to say that an entire constellation *rotates* in a circle even though in doing so it doesn’t change its position relative to anything in visual space. Or expressed

29 (O): monochrome, (E): We have made this change based on previous versions of this remark in MS 105 (p. 9), MS 111 (p. 31), and TSS 208 (p. 1r), 209 (p. 113), 211 (p. 20), and 212 (p. 1248).

30 (R): /Omission 1/. (E): It appears from TS 208 (pp. 1r–2) that at this point Wittgenstein

had intended to include the next two remarks, (“That would mean . . . than the larger.”), which were mistakenly omitted from TS 213.

31 (M): 35

32 (V): would be dark, with a brighter circle and with points of light in it.

auch dann von einer Drehung im Gesichtsraum, wenn keine relative Lageänderung in ihm stattfindet.

Dieser Sachverhalt ist nicht vielleicht dadurch wegerklärt, daß man sagt: die Retina hat eben ein Oben, Unten, etc., und so ist es leicht verständlich, daß es das Analoge im Gesichtsfeld gibt. Vielmehr ist eben das nur eine *Darstellung* des Sachverhalts auf dem Umweg über die Verhältnisse in der Retina.

⁵²Man könnte meinen: es verhält sich im Gesichtsfeld immer so, als sähen wir mit allem Übrigen ein gerichtetes Koordinatenkreuz, wonach wir alle Richtungen fixieren können. – Aber auch das ist keine richtige Darstellung; denn sähen wir wirklich ein solches Kreuz (etwa mit Pfeilen), so wären wir im Stande, nicht nur die relativen Richtungen der Objekte dagegen zu fixieren, sondern auch die Lage des Kreuzes selbst im Raum, gleichsam gegen ein ungesehenes, im Wesen dieses Raums enthaltenes Koordinatensystem.

458 ⁵³Ich kann die Figur V als Buchstaben, als Zeichen für „kleiner“ oder für „größer“ sehen, auch ohne sie⁵⁴ mit meinem Körper zusammen zu sehen. Vielleicht wird man sagen, daß ich die Lage meines Körpers fühle, ohne ihn zu sehen. Gewiß, und ich sage eben, daß „die gefühlte Lage“ nicht „die gesehene Lage“ ist; daher können sie auch nicht miteinander verglichen, wohl aber einander zugeordnet werden.

Die Wörter „oben“, „unten“, „rechts“, „links“ haben andere Bedeutung im Gesichtsraum, andere im Gefühlsraum. Aber auch das Wort „Gefühlsraum“ ist mehrdeutig. (Definitionen der⁵⁵ Wörter „oben“, „unten“, etc. durch die Spitze des Buchstabens⁵⁶ „V“, des Zeichens „kleiner“ und „größer“ einerseits, andererseits durch Kopf- und Fußschmerzen; oder durch Gleichgewichtsgefühle.)

„Ist Distanz in der Struktur des Gesichtsraumes schon enthalten, oder scheint es uns nur so,⁵⁷ weil wir gewisse Erscheinungen des Gesichtsbildes mit gewissen Erfahrungen des Tastsinnes assoziieren, welche letztere erst Distanzen betreffen?“ Woher nehmen wir diese Vermutung? Wir scheinen dergleichen irgendwo angetroffen zu haben. Denken wir nicht an folgenden Fall? diese Melodie mißfiel mir nicht, wenn ich sie nicht unter diesen unangenehmen Umständen zum erstenmal gehört hätte. Aber hier gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder die Melodie mißfällt mir, wie manche andere, für deren Mißfallen ich jenen Grund nicht angeben würde, und es ist bloß eine Vermutung, daß die Ursache meines Mißfallens in jenem früheren Erlebnis liegt. Oder aber, wenn immer ich die Melodie höre, fällt mir jenes Erlebnis ein und macht mir das Hören der Melodie unangenehm; dann ist meine Aussage keine Hypothese über die Ursache meines Mißfallens, sondern eine Beschreibung dieses

459 Mißfallens selbst. – Wenn also gefragt wird: „scheint es uns nur so, daß eine Strecke im Gesichtsraum selbst länger ist, als eine andere und bezieht sich das ‚länger‘ nicht bloß auf eine Erfahrung des Tastsinns, die wir mit dem Gesehenen assoziieren“, – so ist zu antworten: Weißt Du etwas von dieser Association? *beschreibst* Du mit ihr Dein Erlebnis, oder vermutest Du sie nur als Ursache Deines Erlebnisses? – Wenn das letztere, so können wir von Distanzen im Gesichtsraum reden, ohne auf die mögliche Ursache unserer Erfahrung Rücksicht zu nehmen. Dabei muß man sich daran erinnern, daß die Aussagen über Distanzen (daß diese Strecke gleichlang ist wie jene, oder länger als jene, etc.) einen andern Sinn haben, wenn sie sich auf den Gesichtsraum, und einen andern, wenn sie sich auf den euklidischen Raum beziehen.

52 (M): 35

53 (F): MS 112, S. 122r

54 (V): es

55 (V): ~~Definieren d~~

56 (O): Buchstaben

57 (V): nur, so

more correctly: I also speak of rotation within visual space when no relative change of position occurs within it.

Contrary to what we might believe, this state of affairs is not laid to rest by saying: It's simply that the retina has a top, bottom, etc., and so it's easy to understand that there is something analogous in the visual field. Rather, this explanation is only a *representation* of the state of affairs – one that uses the detour of the properties of the retina.

³³One might think: In the visual field it is always as if, along with everything else, we were seeing a N–S–E–W coordinate plane, according to which we can fix all directions. But neither is that a correct representation; for if we really did see such a plane (say, with arrows) then we would be able not only to fix the directions of objects relative to it, but also the position of the plane itself in space, relative to an unseen system of coordinates that was inherently contained in this space, as it were.

³⁴I can see the figure V as a letter, as a sign for “smaller” or “larger”, even without seeing it³⁵ together with my body. Perhaps it will be said that I feel the position of my body without seeing it. Certainly. That's exactly what I'm saying: that “the felt position” is not “the seen position”; therefore they can't be compared to each other, but they *can* be coordinated with each other.

The words “up”, “down”, “right”, “left” have one meaning in visual space and another in the space of feeling. But the phrase “space of feeling” is also ambiguous. (Definitions of the words “up”, “down”, etc., that use the point of the letter “V” and the signs for “smaller” and “larger”, on the one hand, and on the other hand, definitions that use a head- and foot-ache, or sensations of equilibrium.)

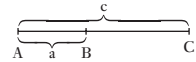
“Is distance already contained in the structure of visual space, or does it only seem that way to us because we associate certain visual images with certain experiences of our sense of touch, and only the latter have to do with distances?” Where do we get this conjecture from? We seem to have encountered something like it somewhere. Aren't we thinking of the following case? I would not dislike this melody if I hadn't first heard it in these unpleasant circumstances. But here there are two possibilities: Either I dislike the melody for other reasons – as I do many another one – and it is merely a conjecture that the cause of my dislike lies in that earlier experience. Or, whenever I hear the melody I remember that experience, and that makes hearing the melody unpleasant for me; in that case my statement isn't a hypothesis about the cause of my dislike, but a description of the dislike itself. – So if the question is: “Does it only seem to us that one line segment in visual space is longer than another, and doesn't this ‘longer’ merely refer to an experience of the sense of touch that we associate with what we see?” – then the answer should be: Do you know anything about this association? Are you using it to *describe* your experience, or do you merely suspect that it is the cause of your experience? – If the latter, then we can speak of distances within visual space without taking the possible cause of our experience into account. In this context one has to remind oneself that statements about distances (that this line segment is of the same length as that, or is longer than that, etc.) have one sense when they refer to visual space, and another when they refer to Euclidean space.

33 (M): 35

34 (F): MS 112, p. 122r.

35 (V): seeing the sign

Zu sagen, der Punkt B ist nicht zwischen A und C⁵⁸ (die Strecke a nicht kürzer als c), sondern dies erscheine uns nur so wegen gewisser Assoziationen, klingt und ist absurd, weil wir uns eben in unserer Aussage gar nicht um eventuelle Ursachen der Erscheinung kümmern, sondern nur diese im Gegensatz zu andern Erscheinungen beschreiben.



Wenn Du sagst, der Punkt B *erscheint*⁵⁹ Dir nur zwischen A und C (zu liegen), so antworte ich: *das ist es ja, was ich sage*, nur gebrauche ich *dafür* den Ausdruck „er liegt zwischen A und C“.

Und wenn Du fragst „scheint es nicht nur so“, so antworte ich: Welche Methode würdest Du denn anwenden, um die Antwort auf Deine Frage zu finden. Dann nämlich werde ich verstehen, was Dein Verdacht eigentlich betrifft. Wenn Du sagst: ist auf diesem Tisch nicht doch vielleicht etwas, was ich nicht sehe, so antworte ich: Wie könnten wir denn das Betreffende finden? Versuche, mir doch eine Erfahrung zu beschreiben, die Dich veranlassen würde, zu sagen.⁶⁰ „es war doch noch etwas da“. Beschreibe mir die Erfahrung, die Dich davon überzeugen würde, daß B doch nicht zwischen A und C liegt, und ich werde verstehen, welcher Art dieser⁶¹ wirkliche Sachverhalt im Gegensatz zum scheinbaren ist. Aber Eines ist klar: die Erfahrung, die Dich das lehrt, kann nicht diejenige ändern, die ich mit den Worten beschreibe „B liegt zwischen A und C“.

460

Dem Einwurf liegt aber eine falsche Auffassung der logischen Analyse zugrunde. Was wir vermissen ist nicht ein genaueres Hinsehen (etwa auf A, B und C) und die Entdeckung eines Vorgangs *hinter* dem oberflächlich⁶² beobachteten (dies wäre die Untersuchung eines physikalischen oder psychologischen Phänomens), sondern die Klarheit in der Grammatik der Beschreibung des alten Phänomens. Denn, sähen wir genauer hin, so sähen wir eben etwas *Anderes* und hätten nichts für unser Problem gewonnen. *Diese* Erfahrung, nicht eine andere, sollte beschrieben werden.

Hat das Gesichtsfeld einen Mittelpunkt? – Es hat Sinn, in einem Bild etwa ein Kreuzchen anzubringen und zu sagen: schau’ auf das Kreuz; Du wirst dann auch das Übrige sehen, aber das Kreuz ist dann im Mittelpunkt des Gesichtsfeldes.

Im Gesichtsraum gibt es absolute Lage. Wenn ich durch ein Aug’ schaue, sehe ich meine Nasenspitze. Würde diese abgeschnitten und entfernt, mir aber dann in die Hand gegeben, so könnte ich sie ohne Hilfe des Spiegels und bloß durch die Kontrolle des Sehens wieder an ihre alte Stelle setzen; auch dann, wenn sich inzwischen alles in meinem Gesichtsbild geändert hätte. Der Satz „ich sehe das sehende Auge im Spiegel“ ist nur scheinbar von der Form des Satzes „ich sehe das Auge des Andern im Spiegel“, denn es hat keinen Sinn zu sagen: „ich sehe das sehende Auge“. Wenn ich „visuelles Auge“ das Bild nenne, was mir etwa das Auge eines Andern bietet, so kann ich sagen, daß das Wort „das sehende Aug“ nicht einem visuellen Auge entspricht.

461

Im Gesichtsraum gibt es absolute Lage und daher auch absolute Bewegung. Man denke sich das Bild zweier Sterne in stockfinsterer Nacht, in der ich nichts sehen kann als diese, und diese bewegen sich im Kreise umeinander.

Mein Gesichtsfeld weist keine Unvollständigkeit auf, die mich dazu bringen könnte, mich umzuwenden um⁶³ zu sehen, was hinter mir liegt. Im Gesichtsraum gibt es kein „hinter mir“; und wenn ich mich umwende, *ändert* sich ja bloß mein Gesichtsbild, wird

58 (F): MS 112, S. 125r.

59 (V): *scheint*

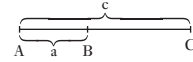
60 (V): Dich sagen lassen würde:

61 (V): der

62 (V): gewöhnlich

63 (V): und

To say that point B is not between A and C³⁶ (or that distance a is not shorter than c), but that this only appears to us to be the case because of certain associations, sounds and is absurd, simply because in making our statement we don't even concern ourselves with possible causes of the phenomenon, but merely describe it in contrast to other phenomena.



If you say, point B merely *appears*³⁷ to you (to lie) between A and C, then I answer: *But that's precisely what I'm saying*, it's just that *to say this* I use the expression "It's between A and C".

And if you ask "Doesn't it merely appear that way?", I answer: What method would you use to find the answer to your question? For then I'll understand what your suspicion really refers to. If you say: "Isn't there possibly something on this table that, despite appearances, I don't see?", then I answer: "How could we find that thing?" Try to describe an experience for me that would cause³⁸ you to say: "In spite of appearances there *was* something else here". Describe for me the experience that would convince you that B is not between A and C after all, and I'll understand the nature of this³⁹ real state of affairs, in contrast to the apparent one. But one thing is clear: whatever the experience is that teaches you that, it can't change the one that I describe with the words "B is between A and C".

But the objection is based on a false understanding of logical analysis. What we're missing isn't a more precise scrutiny (say of A, B and C), nor the discovery of a process *behind* the one that is observed superficially⁴⁰ (that would be the investigation of a physical or psychological phenomenon), but clarity in the grammar of the description of the old phenomenon. Because if we looked more closely we would simply see something *else*, and would have made no advance on our problem. *This* experience, and not another, is what needs to be described.

Does one's visual field have a centre point? – It makes sense to make a little cross in a picture and to say: Look at the cross; then you'll also see the rest of the picture, but it is the cross that will be at the centre point of your visual field.

There is absolute position in visual space. When I look through one eye I see the tip of my nose. If it were cut off and removed, but then put into my hand, I could put it back in its old location without the help of a mirror, merely by checking visually; and I could do this even if everything in my visual image had changed in the meantime. The sentence "I see the seeing eye in the mirror" only appears to have the same form as the sentence "I see someone else's eye in the mirror", for it makes no sense to say: "I see the seeing eye". If I call the image that, for example, someone else's eye presents to me a "visual eye" then I can say that the expression "the seeing eye" doesn't correspond to a visual eye.

There is absolute position in visual space, and hence there is also absolute movement. Imagine the image of two stars in a pitch black night, when I can't see anything but them and they're moving in circles around each other.

My visual field doesn't exhibit any deficiency that could cause me to turn around to see⁴¹ what is behind me. There is no "behind me" in visual space; and if I turn around, my visual

36 (F): MS 112, p. 125r.

37 (V): *seems*

38 (V): *get*

39 (V): *the*

40 (V): *that is usually observed*

41 (V): *around and to see*

aber nicht vervollständigt. (Der „Raum um mich herum“ ist eine Verbindung von Sehraum und Muskelgefühlsraum.) Es hat⁶⁴ keinen Sinn, im Gesichtsraum von der Bewegung eines Gegenstandes zu reden, die um das sehende Auge hinten herum führt.

Beziehung zwischen physikalischem Raum und Gesichtsraum. Denke an das Sehen bei geschlossenen Augen (Nachbilder, etc.) und an die Traumbilder.

64 (V): hat e

image *changes*; it is not completed. (The “space around me” is a combination of visual space and the space of muscle sensation.) It makes no sense to talk about the movement of an object within visual space that goes behind and around the seeing eye.

The relation between physical and visual space. Think about seeing with your eyes closed (after-images, etc.) and about images in dreams.

Das sehende Subjekt und der Gesichtsraum.

Es ist unsinnig zu sagen „ich sehe diesen Gegenstand¹ im Gesichtsraum“. Im Gegensatz wozu? Ist es denkbar, daß ich ihn² höre, oder daß ein Anderer ihn³ sieht?

Darum kann ich auch nicht sagen, daß der Gegenstand in meinem Gesichtsraum die Ursache davon⁴ ist, daß ich ihn sehe.

(Darum ist es auch Unsinn zu sagen: aus dem Urnebel haben sich die Sonnen, Planeten, die einfachsten Lebewesen und endlich ein Wesen entwickelt, das so organisiert ist, daß es all diese Dinge sehen und über sie Betrachtungen anstellen kann. Es sei denn, daß man unter diesen Betrachtungen die (rein) physikalischen Äußerungen, im Sinne des Behaviourism versteht. In diesem Sinne kann man auch von einer photographischen Kamera sagen, daß sie etwas wahrnehme.)

463 Wenn man gefragt würde: was ist der Unterschied zwischen einem Ton und einer Farbe, und die Antwort wäre „Töne hören wir, dagegen sehen wir die Farben“; so ist das nur eine durch Erfahrung gerechtfertigte Hypothese, wenn es überhaupt einen Sinn haben soll, das zu sagen. Und in diesem Sinn ist es denkbar, daß ich einmal Töne mit den Augen wahrnehmen, also sehen werde, und Farben hören. Das Wesentliche der Töne und Farben ist offenbar in der Grammatik der Wörter für Töne und Farben gezeigt.

Wenn wir vom Gesichtsraum reden, so werden wir leicht zu der Vorstellung verführt, als wäre er eine Art von Guckkasten, den jeder vor⁵ sich herumtrüge. D.h. wir verwenden dann das Wort „Raum“ ähnlich, wie wenn wir ein Zimmer einen Raum nennen. In Wirklichkeit aber bezieht sich doch das Wort „Gesichtsraum“ nur auf eine Geometrie, ich meine auf einen Abschnitt der Grammatik unserer Sprache.

In diesem Sinne gibt es keine „Gesichtsräume“, die etwa jeder seinen Besitzer hätten. (Und etwa auch solche, vazierende, die gerade niemandem gehören?)

„Aber kann nicht ich in meinem Gesichtsraum eine Landschaft, und Du in dem Deinen ein Zimmer sehen?“ – Nein, – „ich sehe in meinem Gesichtsraum“ ist Unsinn. Es muß heißen „ich sehe eine Landschaft und Du etc.“ – und das wird nicht bestritten. Was uns hier irreführt, ist eben das Gleichnis vom Guckkasten, oder etwa von einer kreisrunden weißen Scheibe, die wir gleichsam als Projektionsleinwand mit uns trügen, und die der Raum ist, in dem das jeweilige Gesichtsbild erscheint. Aber der Fehler an diesem Gleichnis ist, daß es sich die Gelegenheit – die Möglichkeit – zum Erscheinen eines visuellen Bildes selbst visuell vorstellt; denn die weiße Leinwand ist ja selbst ein Bild.

1 (V): sehe die Dinge

2 (V): sie

3 (V): sie

4 (V): dessen

5 (V): mit

The Seeing Subject and Visual Space.

It is nonsense to say “I see this object¹ in visual space”. As opposed to what? Is it conceivable that I hear it, or that someone else sees it?²

Therefore neither can I say that the object within my visual space is the cause of my seeing it.

(Therefore it is also nonsense to say: From a primordial cloud there developed the suns, the planets, the most primitive living things, and finally a being that is organized in such a way that it can see all of these things and can contemplate them. Unless by “contemplate” one understands (purely) physical utterances, in the sense of behaviourism. In this sense one can also say of a camera that it perceives something.)

If one were asked: “What is the difference between a sound and a colour?”, and the answer were “We hear sounds, but we see colours”, then this is only a hypothesis that is justified through experience, if saying this makes any sense in the first place. And to that extent it is conceivable that one day I shall perceive sounds with my eyes, i.e. see them, and shall hear colours. What is essential to sounds and colours is obviously shown in the grammar of the words for sounds and colours.

When we speak about visual space we are easily seduced into imagining that it is a kind of peep-show box that everyone carries around in front of³ himself. That is to say, in doing this we are using the word “space” in a way similar to when we call a room a space. But in reality the word “visual space” only refers to a geometry, I mean to a section of the grammar of our language.

In this sense there are no “visual spaces” each of which, say, would have its own owner. (And are there maybe also such visual spaces that are itinerant, that don’t belong to anyone at the moment?)

“But can’t I see a landscape in my visual space and you a room in yours?” – No – “I see in my visual space” is nonsense. It must be “I see a landscape and you, etc.” – and that isn’t being called into question. What is misleading us here is simply the simile of the peep-show or, say, of a circular white disc that we carry with us as a projection screen, as it were, which is the space where the respective visual image appears. But the flaw in this simile is that it visually imagines the opportunity – the possibility – of a visual image itself appearing; for, after all, the white screen is itself an image.

1 (V): see the things

2 (V): hear them, or that someone else sees them?

3 (V): carries along with

464 Es ist nun wichtig, daß der Satz „das Auge, womit ich sehe, kann ich nicht unmittelbar sehen“ ein verkappter Satz der Grammatik, oder Unsinn ist. Der Ausdruck „näher am (oder, weiter vom) sehenden Auge“ hat nämlich eine andere Grammatik, als der „näher an dem blauen Gegenstand, welchen ich sehe“. Die visuelle Erscheinung, die der Beschreibung entspricht „A setzt die Brille auf“, ist von der grundverschieden, die ich mit den Worten beschreibe: „ich setze die Brille auf“. Ich könnte nun sagen: „mein Gesichtsraum hat Ähnlichkeit mit einem Kegel“, aber dann muß es verstanden werden, daß ich hier den Kegel als Raum, als Repräsentanten einer Geometrie, nicht als Teil eines Raumes (Zimmer) denke. (Also ist es mit dieser Idee nicht verträglich, daß ein Mensch durch ein Loch in der Spitze des Kegels in diesen hineinschaut.)⁶

6 (V): durch ein Loch an der Spitze in den Kegel hineinschaut.)

It's important that the proposition "I cannot directly see the eye with which I see" is a grammatical proposition in disguise, or nonsense. For the expression "closer to (or further from) the seeing eye" has a different grammar from "closer to the blue object that I see". The visual appearance that corresponds to the description "A is putting on his glasses" is fundamentally different from the one that I describe in the words: "I am putting on my glasses". Now I could say: "My visual space is similar to a cone", but then it has to be understood that here I am imagining the cone as space, as representative of a geometry, and not as part of *a* space (a room). (So that someone looking into the cone through a hole in its tip is not compatible with this idea.)

Der Gesichtsraum mit einem Bild (ebenen Bild) verglichen.

Wer aufgefordert würde, das Gesichtsbild zu malen und es im Ernst versuchte, würde bald sehen, daß es unmöglich ist.

Verschiedene Bedeutungen der Wörter „verschwommen“, „unklar“.

Verschwommen, unklar, unscharf.

466 „Die Linien dieser Zeichnung sind unscharf“, „meine Erinnerung an die Zeichnung ist unklar, verschwommen“, „die Gegenstände am Rand meines Gesichtsfeldes sehe ich verschwommen“. – Wenn man von der Verschwommenheit der Bilder am Rande des Gesichtsfeldes spricht, so schwebt einem¹ oft ein Bild dieses Gesichtsfeldes vor, wie es etwa Mach entworfen hat.² Die Verschwommenheit aber der Ränder eines Bildes auf der Papierfläche³ ist von gänzlich anderer Natur, als die, die man von den Rändern des Gesichtsfeldes aussagt. So verschieden, wie die Blässe der Erinnerung an eine Zeichnung, von der Blässe einer Zeichnung (selbst). Wenn im Film eine Erinnerung oder ein Traum dargestellt werden sollte, so gab man den Bildern einen bläulichen Ton. Aber die Traum- und Erinnerungsbilder haben natürlich keinen bläulichen Ton – sowenig, wie unser Gesichtsbild⁴ verwaschene Ränder hat; also sind die bläulichen Bilder auf der Leinwand⁵ nicht unmittelbar anschauliche Bilder der Träume, sondern „Bilder“ in noch einem andern Sinn. – Bemerken wir im gewöhnlichen Leben, wo wir doch unablässig schauen, die Verschwommenheit an den Rändern des Gesichtsfeldes? Ja, welcher Erfahrung entspricht sie eigentlich, denn im normalen Sehen kommt sie nicht vor! Nun, wenn wir den Kopf nicht drehen und wir beobachten etwas, was wir durch Drehen der Augen gerade noch sehen können, dann sehen wir etwa einen Menschen, können aber sein Gesicht nicht erkennen, sondern sehen es in gewisser Weise verschwommen. Die Erfahrung hat nicht die geringste Ähnlichkeit mit dem Sehen einer Scheibe, auf welcher⁶ Bilder gemalt sind, in der Mitte der Scheibe mit scharfen Umrissen, nach dem Rand zu mehr und mehr verschwimmend, etwa in ein allgemeines Grau unmerklich übergehend. Wir denken an so eine Scheibe, wenn wir z.B. fragen: könnte man sich nicht ein Gesichtsfeld mit gleichbleibender Klarheit der Umrisse etc. denken? Es gibt keine Erfahrung, die im Gesichtsfeld der entspräche, wenn man den Blick einem Bild entlang gleiten läßt, das von scharfen Figuren zu immer verschwommeneren übergeht.

1 (V): Einem

2 (E): Siehe: Ernst Mach, *Die Analyse der Empfindungen*, Jena, 1922, S.15.

3 (O): Papierfläche haben können, (V): Die Verschwommenheit aber, ~~als~~ die die Ränder

eines Bildes auf der Papierfläche haben können,

4 (V): Gesichtsbild ~~verschwach~~

5 (V): bläulichen Projektionen auf der Leinwand

6 (V): der

Visual Space Compared to a Picture (Two-Dimensional Picture).

Someone who was asked to paint his visual image and seriously tried to do this would soon see that it is impossible.

Different meanings of the words “blurry”, “unclear”.

Blurry, unclear, out of focus.

“The lines of this drawing are out of focus”, “My memory of the drawing is unclear, blurry”, “I see the objects at the edges of my visual field as blurred”. – When speaking of the blurredness of images at the edge of one’s visual field, one frequently has in mind an image of this visual field such as, say, sketched by Mach.¹ But the blurredness of the edges of a picture on² a paper surface is inherently different from that ascribed to the edges of the visual field. As different as the paleness of one’s memory of a drawing is from the paleness of the drawing (*itself*). When a memory or a dream is represented in a film, the pictures are given a bluish tint. But of course dream and memory images don’t have a bluish tint – any more than our visual image has washed-out edges; so the bluish pictures³ on the screen are not pictures that are taken of dreams, but “pictures” in another sense. – In everyday life, where after all we are constantly looking at things, do we notice the blurredness at the edges of our visual field? Indeed, what experience does this blurredness actually correspond to, for it doesn’t occur in the normal process of seeing things! Well, if we observe something that we can just barely see by turning our eyes but not our head, then we see, say, a person; but we can’t make out his face, and see it in a certain way as blurry. This experience doesn’t have the least similarity to seeing a disc on which pictures have been painted – pictures with sharp outlines in the middle of the disc, blurring increasingly toward the edge, imperceptibly transitioning, say, into a generic grey. We’re thinking of such a disc when we ask, for instance: Couldn’t one imagine a visual field with consistent clarity of its outlines, etc.? There is no experience in the visual field that might correspond to what occurs when one allows one’s glance to glide over a picture whose figures transition from being in focus to ever more blurred.

1 (E): Cf. Ernst Mach, *Die Analyse der Empfindungen*, Jena, 1922, p. 15.

2 (V): blurredness that the edges of a picture can have on

3 (V): projections

Es ist z.B. wichtig, daß in dem Satz „ein roter Fleck befindet sich nahe an der Grenze des Gesichtsfeldes“ das „nahe an“ eine andere Bedeutung hat als in einem Satz „der rote Fleck im Gesichtsfeld befindet sich nahe an dem braunen Fleck“. Das Wort „Grenze“ in dem vorigen Satz hat ferner eine andere Bedeutung – und ist eine andere Wortart – als in dem Satz „die Grenze zwischen rot und blau im Gesichtsfeld ist ein Kreis“.



467 Welchen Sinn hat es, zu sagen: Unser Gesichtsbild ist an den Rändern undeutlicher als gegen die Mitte? Wenn wir hier nämlich nicht davon reden, daß wir die physikalischen Gegenstände in der Mitte des Gesichtsfeldes deutlicher sehen.

Eines der klarsten Beispiele der Verwechslung zwischen physikalischer und phänomenologischer Sprache ist das Bild, welches Mach von seinem Gesichtsfeld entworfen hat und worin die sogenannte Verschwommenheit der Gebilde gegen den Rand des Gesichtsfeldes durch eine Verschwommenheit (in ganz anderem Sinne) der Zeichnung wiedergegeben wurde. Nein, ein sichtbares Bild des Gesichtsbildes kann man nicht machen.

Kann ich also sagen, daß die Farbflecken in der Nähe des Randes des Gesichtsfeldes keine scharfen Konturen mehr haben: Sind denn Konturen dort *denkbar*? Ich glaube es ist klar, daß jene Undeutlichkeit eine interne Eigenschaft des Gesichtsraumes ist. Hat z.B. das Wort „Farbe“ eine andere Bedeutung, wenn es sich auf Gebilde in der Randnähe bezieht?

Die Grenzenlosigkeit des Gesichtsraums ist ohne jene „Verschwommenheit“ nicht denkbar.

Die Gefahr, die darin liegt, Dinge einfacher sehen zu wollen, als sie in Wirklichkeit sind, wird heute oft sehr überschätzt. Diese Gefahr besteht aber tatsächlich im höchsten Grade in der phänomenologischen Untersuchung⁷ der Sinneseindrücke. Diese werden immer für *viel* einfacher gehalten, als sie sind.

Es ist seltsam, daß ich geschrieben habe, der Gesichtsraum hat nicht die Form  ⁸und nicht, er habe nicht die Form⁹  ; und daß ich das Erste geschrieben habe, ist sehr bezeichnend.

468 Man bedenkt gar nicht, wie merkwürdig das dreidimensionale Sehen ist. Wie seltsam etwa ein Bild, eine Photographie aussähe, wenn wir im Stande wären, sie als Verteilung grauer, weißer und schwarzer Flecken in einer ebenen Fläche zu sehen. Was wir sehen, würde dann ganz sinnlos wirken. Ebenso, wenn wir mit einem Aug' flächenhaft sehen könnten. Es ist z.B. gar nicht klar, was geschieht, wenn wir mit zwei Augen die Gegenstände *plastischer* sehen, als mit einem. Denn sie wirken auch mit einem gesehen schon plastisch. Und der Unterschied zwischen Relief und Rundplastik ist auch keine richtige Analogie.

7 (O): Unterschung

9 (F): MS 112, S. 28v.

8 (F): MS 112, S. 28r.

It's important, for instance, that the word "close" has a different meaning in the sentence "There is a red patch close to the border of my visual field" than in the sentence "The red patch in my visual field is close to a brown patch". Furthermore, the word "border" in the previous sentence has a different meaning – and is a different type of word – than in the sentence "In my visual field the border between red and blue is a circle".



What sense is there in saying: Our visual image is less distinct at the edges than towards the center? That is, if we're not talking here about the fact that we see physical objects more distinctly in the middle of our visual field.

One of the clearest examples of the confusion between physical and phenomenological language is the picture Mach sketched of his field of vision, in which the so-called blurredness of the shapes toward the edge of his visual field was reproduced by a blurredness (in a quite different sense) in the drawing. No, you can't make a visible picture of your visual image.

So can I say that colour patches close to the edge of one's visual field no longer have sharply defined contours: are contours even *conceivable* there? I believe it is clear that that indistinctness is an internal property of visual space. Does the word "colour", for instance, have a different meaning when it refers to shapes close to the edge?

The limitlessness of visual space is inconceivable without that "blurredness".

Nowadays too much is often made of the danger that lies in wanting to see things as simpler than they really are. But this danger does actually exist to the highest degree in the phenomenological investigation of sense impressions. They are always thought to be *much* simpler than they are.

It's strange that I wrote that visual space doesn't have the form ,⁴ and not that it doesn't have the form⁵ , and it's very significant that I wrote the former.

We don't even think about how remarkable three-dimensional seeing is. How strange, say, a picture, a photograph would look if we could see it as a distribution of grey, white and black spots on a flat surface. What we would see there would strike us as utterly senseless. Likewise if we could see two-dimensionally with one eye. It isn't at all clear, for example, what happens when we see objects *as more three-dimensional* with two eyes than we do with one. For even when seen with one, they already have a three-dimensional effect. And the difference between relief and sculpture isn't a proper analogy either.

4 (F): MS 112, p. 28r.

5 (F): MS 112, p. 28v.

Minima visibilia.

469

Der einfarbige Fleck in der farbigen¹ Ebene ist nicht aus kleineren Teilen zusammengesetzt, außer so, wie die Zehn etwa aus tausend Hundertsteln.

Das kleinste sichtbare Stück ist ein Stück der physikalischen Fläche, nicht des Gesichtsfeldes. Der Versuch, der das kleinste noch Sichtbare ermittelt, stellt eine Relation fest zwischen *zwei* Erscheinungen.

Dieser² Versuch untersucht nicht den Gesichtsraum und man kann den Gesichtsraum nicht untersuchen. Nicht in ihn tiefer eindringen.

(Wenn man beschreiben wollte, was auf der Hand liegt, könnte man nicht „untersuchen wollen, was auf der Hand liegt.“³)

470 Man könnte glauben, das Gesichtsfeld sei aus den minima visibilia zusammengesetzt; etwa aus lauter kleinen Quadraten, die man als unteilbare Flecke sieht. Unsinn.

Das Gesichtsfeld ist nicht zusammengesetzt, wenn wir die Zusammensetzung nicht sehen. Denn bei dem Wort „Zusammensetzung“ denken wir doch an die Zusammensetzung eines größeren Flecks aus kleineren.

Von kleinsten sichtbaren Teilen des Gesichtsfeldes zu reden ist irreführend; gibt es denn auch Teile des Gesichtsfeldes, die wir nicht mehr sehen? Und wenn wir etwa das Gesichtsbild⁴ eines Fixsterns so nennen, so könnte das nur heißen, daß es keinen Sinn habe, hier von „kleiner“ zu reden, und nicht, daß tatsächlich kein Fleck im Gesichtsfeld kleiner ist. Also ist der Superlativ „das kleinste . . .“ falsch angewendet.

Der kleinste sichtbare Unterschied wäre einer, der in *sich selbst* das Kriterium des Kleinsten trüge.

Denn im Fall des Flecks A zwischen B und C $B \parallel \boxed{A} \parallel C$ ⁵ unterscheiden wir eben einige Lagen und andere unterscheiden wir *nicht*. Was wir aber brauchten, wäre sozusagen ein infinitesimaler Unterschied, also ein Unterschied, der es in sich selbst trüge, der Kleinste zu sein.

Der Gesichtsraum besteht offenbar *nicht* aus diskreten Teilen.

Denn sonst müßte man unmittelbar sagen können, aus welchen.

Oder er besteht nur sofern aus Teilen, als man sie angeben kann.

Gibt es einen kleinst sichtbaren Farbunterschied? – Welche Farben sind hier gemeint? Nennen wir Farbe das Ergebnis der Mischung von Farbstoffen: dann kann ich das Experiment machen, z.B. zu einer Menge eines roten Farbstoffes eine kleine Menge eines

1 (V): farbigen

2 (V): Der

3 (V): „untersuchen, was auf der Hand liegt.“)

4 (V): Bild

5 (F): MS 108, S. 134.

Minima Visibilia.

A monochrome patch on a coloured plane is not composed of smaller parts, except as, say, ten is composed of a thousand hundredths.

The smallest visible piece is a piece of a physical surface, not a piece of the field of vision. The experiment that discovers the smallest thing still visible ascertains a relation between *two* phenomena.

This¹ experiment doesn't examine visual space, and one can't examine visual space. Can't penetrate more deeply into it.

(One might want to describe what is obvious, but one can't "want to examine² what is obvious".)

One might think that one's visual field is made up of *minima visibilia*; say, of nothing but small squares that one sees as indivisible patches. Nonsense.

The visual field isn't composite if we don't see the composition. For the word "composition" makes us think, after all, of a larger patch being composed of smaller ones.

It's misleading to talk about the smallest visible parts of the visual field; are there really such things as parts of the visual field that we no longer see? And if, say, that is what we call the visual image³ of a fixed star, then all that could mean is that here it made no sense to talk about "smaller", and not that, in actuality, no patch in the visual field was smaller. So the superlative "the smallest . . ." is used incorrectly.

The smallest visible difference would *inherently* contain the criterion for "smallest".

For in the case of the patch A between B and C $B \parallel \boxed{A} \parallel C$ ⁴we do distinguish between some positions and *not* between others. But what we need is an infinitesimal difference, so to speak, that is, a difference that inherently contains "being the smallest".

Obviously visual space does *not* consist of discrete parts.

Otherwise one would have to be able straightaway to say which ones.

Or it consists of parts only in so far as one can list them.

Is there a smallest visible colour difference? – What colours are meant here? If colour is what we call the result of a mixture of pigments, then I can perform the experiment of mixing a small amount of yellow pigment with a certain amount of red pigment, for instance,

1 (V): The

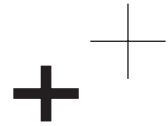
2 (V): "examine

3 (V): the image

4 (F): MS 108, p. 134.

471 gelben beizumischen und zu versuchen, ob ich einen Farbunterschied *sehe*; wenn ja, so wiederhole ich den Versuch mit einem kleineren Zusatz des gelben Farbstoffes und immer so fort, bis der Zusatz keinen sichtbaren Unterschied mehr hervorbringt; das kleinste Quantum, welches noch einen sichtbaren Unterschied hervorbrachte, nenne ich, mit einem gewissen Faktor von Ungenauigkeit, den kleinst sichtbaren Unterschied. Das Wesentliche ist (hier), daß der Unterschied noch da war, also noch konstatiert wurde, als kein Unterschied mehr *gesehen* wurde. Was ich so konstatiert habe, war der kleinst sichtbare Unterschied in den Pigmenten. Und ähnlich könnte ich von einem kleinst sichtbaren Unterschied zwischen farbigen Lichtern reden; wenn ich nur außer dem Gesicht ein anderes Mittel der Unterscheidung habe. – Anders wird es, wenn man fragt: „gibt es einen kleinst sichtbaren Unterschied zwischen den gesehenen Farben“. Der müßte der kleinste in dem Sinne sein, in dem die Null die kleinste Kardinalzahl ist. Es wäre also nicht ein Unterschied, den man nicht mehr unterteilen könnte, weil das Experiment seiner Unterteilung immer mißlänge; sondern die Unmöglichkeit der Unterteilung wäre eine logische, was so viel heißt, als daß es keinen Sinn hätte, von einer Unterteilung zu reden. Der kleinst sichtbare Unterschied in diesem Sinne wäre also ein Farbunterschied einer andern Art.

472 ⁶Wenn man einen schwarzen Streifen auf weißem Grund immer dünner und dünner werden läßt, so kommt man endlich zu dem, was ich einen visuellen Strich (im Gegensatz zu einer visuellen Linie, der Grenze zweier Farben) nennen möchte. Der Strich ist kein Streifen, er hat keine Breite; d.h., wenn er von einem andern Strich durchkreuzt wird,⁷ sehen wir nicht die 4 Eckpunkte, in denen sich die Grenzlinien zweier Streifen schneiden. Es ist unsinnig, von der optischen Unterteilung eines Strichs zu reden. Ihm entspricht die Erscheinung eines Fixsterns, die sich zum visuellen Punkt, dem Schnitt zweier Farbgrenzen, ebenso verhält, wie der Strich zur Farbgrenze. Den optischen Fixstern könnte man also ein *minimum visibile* nennen. Aber man kann nun nicht etwa sagen, das Gesichtsfeld bestehe aus solchen Teilen! Es bestünde nur aus ihnen,⁸ wenn wir sie sähen. Das visuelle Bild⁹ eines Fixsternnebels im Fernrohr, besteht aus ihnen, soweit wir sie unterscheiden können. Denn diese beiden Ausdrücke heißen eben dasselbe.



Wenn gefragt wird „ist unser Gesichtsfeld kontinuierlich oder diskontinuierlich“, so müßte man erst wissen, von welcher Kontinuität man redet. Einen Farbübergang nennen wir kontinuierlich, wenn wir keine Diskontinuität in ihm sehen.

6 (M): 57 |

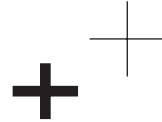
7 (F): MS 112, S. 130v.

8 (V): nur daraus,

9 (V): Das Bild

and checking whether I *see* a colour difference; if I do then I repeat the experiment with a smaller addition of the yellow pigment, and so on in this way until the addition no longer produces a visible difference; granted a certain margin of error, I call the smallest quantity that still produces a visible difference the “smallest visible difference”. What is essential (here) is that the difference was still there, and thus was still ascertained, when no more difference was *seen*. What I ascertained in this manner was the smallest visible difference in the pigments. And similarly I could talk about a smallest visible difference between coloured lights, if only I have another means of differentiation in addition to sight. – The situation changes when one asks: “Is there a smallest visible difference between colours we see?”. It would have to be the smallest in the sense in which zero is the smallest cardinal number. Thus it wouldn’t be a difference that one couldn’t subdivide any further because the experiment to subdivide it would always fail; rather the impossibility of subdivision would be logical, which is tantamount to saying that it would make no sense to talk about a subdivision. So the smallest visible difference in this sense would be a colour difference of a different kind.

⁵If one allows a black strip on a white background to become thinner and thinner, then one finally arrives at what I’d like to call a visual streak (as opposed to a visual line, the border between two colours). The streak is not a strip, for it doesn’t have any width; thus, if it is crossed by another streak⁶ we do not see the 4 corner points where the borderlines of two strips intersect. It is nonsensical to talk about an optical subdivision of a streak. What corresponds to it is the appearance of a fixed star, an appearance that relates to a visual point – the intersection of two colour-borders – precisely as does a streak to a colour border. So one could call an optical fixed star a *minimum visibile*. But it doesn’t follow that one can say, for instance, that one’s field of vision consists of such parts! It would only consist of them if we saw them. The visual image⁷ of a fixed star nebula in a telescope consists of them in so far as we can distinguish between them. For these two expressions simply mean the same thing.



If someone asked “Is our field of vision continuous or discontinuous?”, then one would first need to know what continuity he was speaking of. We call a colour transition continuous if we see no discontinuity in it.

5 (M): 57 |

6 (F): MS 112, p. 130v.

7 (V): The image

Farben und Farbmischung.

473

474 ¹Zu sagen, daß diese Farbe jetzt an einem Ort ist, ²heißt, diesen Ort *vollständig* beschreiben. – Zwei Farben, zwei Dampfspannungen, zwei Geschwindigkeiten, zwei elektrische Spannungen, haben nicht zugleich an einem Punkt³ Platz. – Eine merkwürdige Gesellschaft, die sich da zusammenfindet. Und auch der „Punkt“ von dem ich rede, hat verschiedene Bedeutungen.

Wenn also „f(x)“ sagt, x sei jetzt an einem bestimmten Ort, so ist also „f(a) & f(b)“ ein Widerspruch. Warum nenne ich aber „f(a) & f(b)“⁴ einen Widerspruch; da doch $p \ \& \ \sim p$ die Form des Widerspruchs ist? Heißt⁵ es einfach, daß das Zeichen „fa & fb“ kein Satz ist, wie etwa „ffaa“ keiner ist? Unsere Schwierigkeit ist nur, daß wir doch das Gefühl haben, daß hier ein Sinn vorliegt, wenn auch ein degenerierter (Ramsey). Daß, wenn ich „und“ zwischen zwei Aussagen setze, ein lebendes Wesen entstehen muß und nicht etwas Totes, wie wenn ich etwa „a & f“ geschrieben hätte. Das ist ein sehr merkwürdiges und sehr tief liegendes Gefühl. Man müßte sich darüber klar werden, was die Worte „daß hier ein Sinn vorliegt“ sagen wollen.

Die Entscheidung darüber, ob „fa & fb“ Unsinn ist, wie „a & f“, könnte man *so* fällen: Ist $p \ \& \ \sim(fa \ \& \ fb) = p$, oder ist die linke Seite dieser Gleichung (und also die Gleichung) Unsinn? – Kann ich nicht entscheiden, wie ich will?

Kann ich die Regel, die dem allen zu Grunde liegt, *so* schreiben: $fa = (fa \ \& \ \sim(fb))$? d.i.: aus fa folgt $\sim fb$.

Ich glaubte, als ich die „Abhandlung“ schrieb (und auch später noch) daß $fa = fa \ \& \ \sim fb$ nur möglich wäre, wenn fa das logische Produkt aus irgend einem andern Satz und $\sim fb$ – also $fa = p \ \& \ \sim fb$ – wäre, und war der Meinung, fa (z.B. eine Farbenangabe) werde sich in ein solches Produkt zerlegen lassen. Dabei hatte ich keine klare Vorstellung davon, wie ich mir die Auffindung einer solchen Zerlegung dachte. Oder vielmehr: ich dachte wohl an die Konstruktion eines Zeichens, das die richtige grammatische ⁶Verwendung in jedem Zusammenhang durch seine Beschaffenheit zum Ausdruck brächte (d.h., seine Regeln ganz einfach gestaltete und in gewissem Sinne schon in sich trüge, wie jede übersichtliche Notation); aber ich übersah, daß, wenn diese Umgestaltung des Satzes f(a) in seiner Ersetzung durch ein logisches Produkt bestehen sollte, dann die Faktoren dieses Produkts einen unabhängigen und uns bereits bekannten Sinn haben müßten.⁷

Als ich dann eine solche Analyse einer Farbangebe durchführen wollte, zeigte sich,⁸ was es war, was ich mir unter der Analyse vorgestellt hatte. Ich glaubte die Farbangebe als ein logisches Produkt $r \ \& \ s \ \& \ t \dots$ auffassen zu können, dessen einzelne Faktoren die Ingredienzienangaben (wenn es mehrere waren), aus denen die Farbe (color, nicht pigmentum)

1 (R): \forall S. 51/1

2 (M): 92

3 (V): Ort

4 (O): aber „f(a) & f(b)“

5 (V): Bedeutet

6 (M): 92

7 (V): müßten.

8 (V): wollte, kam zum Vorschein,

Colours and the Mixing of Colours.

¹To say that this colour is now at a location ²means describing that location *completely*. – There is no room at a single point³ for two simultaneous colours, steam pressures, speeds, voltages. – A strange company it is that meets there. And the “point” that I’m talking about has different meanings, too.

So if “f(x)” says that x is now in a particular location, then for that reason “f(a) & f(b)” is a contradiction. But why am I calling “f(a) & f(b)” a contradiction since, after all, p & ~p is the form of contradiction? Does it simply mean that the sign “fa & fb” isn’t a proposition, as, say, “ffaa” isn’t? Our only difficulty is that in spite of this we have the feeling that there is a sense here, albeit a degenerate one (Ramsey). That a living being has to come about if I place “and” between two statements, and not something dead, as if I had written “a & f”, for example. That is a very remarkable and very deeply embedded feeling. One has to clarify for oneself what the words “that there is a sense here” are trying to say.

One might decide whether “fa & fb” is nonsense, like “a & f”, in *such a way*: Is p & ~(fa & fb) = p, or is the left side of this equation (and therefore the equation) nonsense? – Can’t I decide as I please?

Can I write the rule that underlies all of this like *this*: fa = (fa & ~fb)? That is, ~fb follows from fa.

When I wrote the *Tractatus* (and later as well) I believed that fa = fa & ~fb would be possible only if fa were the logical product of some other proposition and ~fb – and therefore fa = p & ~fb – and I was of the opinion that fa (e.g., a colour-statement) could be analysed into such a product. In this context I had no clear idea about how I was imagining the discovery of such an analysis. Or rather: I was probably thinking of the construction of a sign that, because of its make-up, would express the correct grammatical ⁴use in any context (i.e. that would fashion its rules quite simply and in a certain sense would contain them inherently, like any surveyable notation); but what I overlooked was that if this transformation of the proposition f(a) were to consist in its being replaced by a logical product, then the factors of this product would have to have an independent sense that was already known to us.

Then, when I wanted to carry out such an analysis of a colour statement, it became apparent⁵ what I had imagined analysis to be. I believed I could understand a colour statement as a logical product r & s & t . . . , the discrete factors of which indicated the ingredients (if there were several) that the colour (“colour”, not “pigment”) consisted of. Then, of course, it also had to be said that these are *all* the ingredients, and this requirement has the effect

1 (R): \forall p. 51/1

2 (M): 92

3 (V): location

4 (M): 92

5 (V): manifest

besteht. Es muß dann natürlich auch gesagt werden, daß dies *alle* Ingredienzien sind und diese abschließende Bemerkung bewirkt, daß $r \ \& \ s \ \& \ t \ \& \ S$ mit $r \ \& \ s \ \& \ t \ \& \ u \ \& \ S$ in Widerspruch steht. Die Farbangabe hieße dann: „an diesem Ort sind jetzt diese Farben (oder: ist jetzt diese Farbe) und sonst keine“. D.h.: die Farbangabe, die in unsrer gewöhnlichen Ausdrucksweise lautet „dies (oder: hier) ist rot“ würde nun „hier ist rot und sonst keine Farbe“ lauten müssen;⁹ während die Angabe „hier ist rot und blau“ bedeuten sollte, daß die Farbe dieses Orts eine Mischfarbe aus rot und blau sei. Die Sätze¹⁰ nähmen da folgende Form an: „in dieser Farbe ist rot enthalten“, „in dieser Farbe ist *nur* rot enthalten“, „in dieser Farbe ist nur rot und blau enthalten“, etc. – Aber dies gibt nicht die rechte Grammatik: Es müßte das Vorhandensein eines roten Stiches ohne irgend einen andern Stich die rein rote Färbung dieses Orts bedeuten; das scheint uns unsinnig und der Fehler klärt sich *so* auf: Es muß im Wesen (in der Grammatik) dieses roten Stiches liegen, daß ein Mehr oder Weniger von ihm möglich ist; ein rötliches Blau kann dem reinen Rot näher und weniger nahe liegen, also in diesem Sinne mehr oder weniger Rot enthalten. Der Satz, welcher angibt, daß Rot als Ingrediens einer Farbe hier vorhanden ist, müßte also irgendwie eine Quantität von Rot angeben,¹¹ dann aber muß dieser Satz auch außerhalb des logischen Produkts Sinn haben, und es müßte also Sinn haben zu sagen, daß dieser Ort rein rot gefärbt ist und die und die Quantität von Rot enthalte; und das hat keinen Sinn. Und wie verhält es sich mit den einzelnen Sätzen, die einem Ort verschiedene Quantitäten, oder Grade, von Rot zuschreiben? Nennen wir zwei solche q_1r und q_2r : sollen sich diese widersprechen? Angenommen q_2 sei größer als q_1 , dann könnte zwar unsere Festsetzung sein, daß $q_2r \ \& \ q_1r$ kein Widerspruch sein solle (wie die Sätze „in diesem Korb sind 4 Äpfel“ und „in diesem Korb sind 3 Äpfel“, wenn das „nur“ fehlt), aber dann müssen q_2r und $\sim q_1r$ einander widersprechen; und daher müßte nach meiner alten Auffassung q_2r ein Produkt aus q_1r und einem andern Satz sein. Dieser andre Satz müßte die von q_1 auf q_2 fehlende Quantität angeben und für ihn bestünde daher die selbe Schwierigkeit. – Das Schema der Ingredientien paßt nicht auf den Fall der Farbenmischung, wenn man unter „Farben“ nicht Farbstoffe versteht.¹² Und auch in diesem Schema sind verschiedene Angaben über das verwendete Quantum eines Bestandteils widersprechende Angaben; oder, wenn ich festsetze, daß p (=ich habe 3kg Salz verwendet) und q (= ich habe 5kg Salz verwendet) einander nicht widersprechen sollen, dann widersprechen einander doch q und $\sim p$.¹³ Und es läuft alles darauf hinaus, daß der Satz „ich habe 2kg Salz verwendet“ nicht heißt „ich habe 1kg Salz verwendet und ich habe 1kg Salz verwendet“, daß also $f(1 + 1)$ nicht gleich ist $f(1) \ \& \ f(1)$.

Unsere Erkenntnis ist eben, daß wir es mit Maßstäben, und nicht quasi mit isolierten Teilstrichen zu tun haben.

477 Der Satz „an einem Ort hat zu einer Zeit nur *eine* Farbe Platz“ ist natürlich ein verkappter Satz der Grammatik. Seine Verneinung ist kein Widerspruch, *widerspricht* aber einer Regel unserer angenommenen Grammatik.

Die Regeln über „und“, „oder“, „nicht“, etc., die ich durch die W-F-Notation dargestellt habe, sind *ein Teil* der Grammatik über diese Wörter, aber nicht *die ganze*.

Wenn ich z.B. sage, ein Fleck ist zugleich hellrot und dunkelrot, so denke ich dabei, daß der eine Ton den andern deckt.

9 (V): Farbe” zu lauten haben;

10 (V): Farbangaben

11 (V): nennen;

12 (O): Das Schema der Ingredientien paßt nicht auf den Fall der Farbenmischung, wenn man

unter „Farben“ nicht Farbstoffe versteht, (nicht).

13 (V): dann doch q und $\sim p$.

that $r \ \& \ s \ \& \ t \ \& \ S$ contradicts $r \ \& \ s \ \& \ t \ \& \ u \ \& \ S$. Then the colour statement would run as follows: “Now these colours (or: this colour) *and no others* are (is) in this place”. That is, a colour statement that we usually express as “This (or Here) is red” would now have to be phrased: “Here is red and no other colour”; whereas the statement “Here is red and blue” would have to mean that the colour at this location was a colour mixture of red and blue. In this case the propositions⁶ would take on the following form: “Red is contained in this colour”, “*Only* red is contained in this colour”, “Only red and blue are contained in this colour”, etc. – But this doesn’t give us the proper grammar: the presence of a red tinge, without any other tinge, would have to mean a purely red colour at this location; that seems nonsensical to us, and the mistake is cleared up *this way*: the possibility of more or less of the red tinge must be contained inherently in (in the grammar of) the red tinge; a reddish blue can be situated closer to or further away from pure red, i.e. can in this sense contain more or less red. So the proposition stating that red is present as an ingredient of a colour would somehow have to indicate⁷ a quantity of red; but then this proposition must also make sense outside the logical product, and therefore it ought to make sense to say that this location is coloured pure red and contains such and such a quantity of red; and that doesn’t make any sense. And how about the individual propositions that ascribe different quantities or degrees of red to a location? Let’s call two such propositions q_1r and q_2r ; will they contradict each other? Assuming that q_2 is larger than q_1 , we could stipulate, to be sure, that $q_2r \ \& \ q_1r$ is not a contradiction (like the sentences “There are 4 apples in this basket” and “There are 3 apples in this basket”, when there is no “only”). But then q_2r and $\sim q_1r$ will contradict one another; and therefore, according to my former view, q_2r would have to be a product of q_1r and another proposition. This other proposition would have to state the difference in quantity between q_1 and q_2 , and therefore would pose the same difficulty. – The schema of ingredients does not fit the case of a colour mixture, if by “colours” one doesn’t understand pigments. And in this schema too, different statements about the quantity of an ingredient used are contradictory; or, even if I stipulate that p (= I’ve used 3 kg of salt) and q (= I’ve used 5 kg of salt) are not supposed to be contradictory, then q and $\sim p$ still contradict one another.⁸ And it all amounts to this: that the sentence “I’ve used 2 kg of salt” doesn’t mean “I’ve used 1 kg of salt and I’ve used 1 kg of salt”, i.e. that $f(1+1)$ isn’t equal to $f(1) \ \& \ f(1)$.

We’ve simply come to understand that we are dealing with rulers and not with isolated graduation marks, as it were.

Of course the proposition “There is only room for *one* colour in one location at one time” is a disguised grammatical proposition. Its negation isn’t a contradiction, but it *contradicts* a rule of our normal grammar.

The rules for “and”, “or”, “not”, etc. that I have represented via the T–F notation are *part of*, but not *the entire*, grammar of these words.

When I say, for instance, that a patch is bright and dark red at the same time, I am thinking all the while that one shade is covering the other.

6 (V): the indications of colour

7 (V): name

8 (V): then q and $\sim p$ still are.

Hat es dann aber noch einen Sinn zu sagen, der Fleck habe den unsichtbaren, verdeckten Farbton?

Hat es gar einen Sinn, zu sagen, eine vollkommen schwarze Fläche sei weiß, man sehe nur das Weiß nicht, weil es vom Schwarz gedeckt sei? Und warum deckt das Schwarz das Weiß und nicht Weiß das Schwarz?

Wenn ein Fleck eine sichtbare und eine unsichtbare Farbe hat, so hat er diese zwei Farben¹⁴ jedenfalls in ganz verschiedenem Sinne.

„Rot und grün gehen nicht zugleich an denselben Ort“ heißt nicht, sie sind tatsächlich nie beisammen, sondern, es ist Unsinn zu sagen, sie seien zugleich am selben Ort und also auch Unsinn zu sagen, sie seien nie zugleich am selben Ort.

478 Eine Mischfarbe, oder besser Zwischenfarbe, von blau und rot ist dies durch eine interne Relation zu den Strukturen von blau und rot. Richtiger ausgedrückt: was wir „eine Zwischenfarbe von blau und rot“ (oder „blaurot“) nennen, heißt so, wegen einer Verwandtschaft, die sich in der Grammatik der Wörter¹⁵ „blau“, „rot“ und „blaurot“ zeigt. (Der Satz, der von einer internen Relation der Strukturen redet, entspringt schon aus einer unrichtigen Vorstellung; aus *der*, welche in den Begriffen „rot“, „blau“, etc. komplizierte Strukturen¹⁶ sieht; deren innere¹⁷ Konstruktion die Analyse zeigen muß.) Die Verwandtschaft aber der reinen Farben und ihrer Zwischenfarbe ist *elementarer* Art, d.h., sie besteht nicht darin, daß der Satz, welcher einem Gegenstand die Farbe blaurot zuschreibt, aus den Sätzen besteht, die ihm die Farben rot und blau zuschreiben. Und so ist auch die Verwandtschaft verschiedener Grade eines rötlichen Blau, z.B., eine elementare Verwandtschaft.

Es hat Sinn von einer Färbung zu sagen, sie sei nicht rein rot, sondern enthalte einen gelblichen, oder bläulichen, weißlichen, oder schwärzlichen Stich; und es hat Sinn zu sagen, sie enthalte keinen dieser Stiche, sondern sei reines Rot. Man kann in diesem Sinne von einem reinen Blau, Gelb, Grün, Weiß, Schwarz reden, aber nicht von einem reinen Orange, Grau, oder Rötlichblau. (Von einem „reinen Grau“ übrigens wohl, sofern man damit ein nicht-grünliches, nicht-gelbliches u.s.w. Weiß-Schwarz meint: und ähnliches gilt für „reines Orange“, etc.) D.h. der Farbenkreis hat vier ausgezeichnete Punkte. Es hat nämlich Sinn zu sagen „dieses Orange liegt (nicht in der Ebene des Farbenkreises, sondern im *Farbenraum*) näher dem Rot als jenes“; aber wir können nicht, um das gleiche auszudrücken sagen „dieses Orange liegt näher dem Blaurot als jenes“ oder „dieses Orange liegt näher dem Blau als jenes“.

479 Die Farbenmischung, von der hier die Rede ist, bringt der Farbenkreisel hervor, aber auch er nicht, wenn ich ihn nur ruhend und dann in rascher Drehung sehe. Denn es wäre ja denkbar, daß der Kreisel im ruhenden Zustand halb rot und halb gelb ist und daß er in rascher Drehung (aus welchen Ursachen¹⁸ immer) grün erscheint. Vielmehr bringt der Farbenkreisel die Mischung nur insofern zustande, als wir sie optisch als solche wahrnehmen können.¹⁹ Wenn er sich nämlich nach und nach schneller und schneller dreht und wir *sehen*, wie aus rot und gelb orange wird. Wir sind aber darin nicht dem Farbkreisel ausgeliefert; sondern, wenn durch irgend einen unbekanntem Einfluß, während der Kreisel sich schneller und schneller dreht, die Farbe seiner Scheibe ins Weißliche überginge, so würden wir nun nicht sagen, die Zwischenfarbe zwischen Rot und Gelb sei ein weißliches Orange. So wenig, wie wir sagen würden 3 + 4 sei 6, wenn beim Zusammenlegen von 3 und 4 Äpfeln einer auf unbekannte

14 (V): er diese Farben

15 (V): in den grammatischen Bestimmungen über die Wörter

16 (V): Gebäude

17 (V): innere ~~Struktur~~

18 (V): aus welcher Ursache

19 (V): optisch kontrollieren können.

But does it then still make sense to say that the patch has the invisible, covered-up shade of colour?

Going further, does it make sense to say that a completely black surface is white – it's just that one doesn't see the white because it is covered by the black? And why does the black cover the white and not the white the black?

When a patch has a visible and an invisible colour then in any case it has these two colours⁹ in a completely different sense.

“Red and green don't come together at the same location at the same time” does not mean that in actuality they are never together but, rather, that it is nonsense to say that they are at the same place at the same time, and therefore also nonsense to say that they are never at the same place at the same time.

A mixed colour (or better, an intermediate colour) made up of blue and red is a mixed (intermediate) colour via an internal relationship to the structures of blue and red. Expressed more precisely: What we call “an intermediate colour between blue and red” (or “bluish-red”) is so called because of a relationship that shows in the grammar of the¹⁰ words “blue”, “red” and “bluish-red”. (The very proposition that talks about an internal relationship between the structures originates in an incorrect idea – in *that* idea that sees complicated structures¹¹ in the concepts “red”, “blue”, etc., structures whose inner¹² construction must be shown by analysis.) But the relationship of pure colours to their intermediate colour is of an *elementary* kind. That is to say, it doesn't require that the proposition that ascribes the colour bluish-red to an object is made up of the propositions that ascribe the colours blue and red to it. And in a like manner the relationship among various shades of a reddish-blue, for instance, is an elementary relationship.

It makes sense to say of a colour that it is not pure red, but contains a yellowish, or bluish, whitish or blackish tinge; and it makes sense to say that it contains none of these tinges but is pure red. In this sense one can speak of a pure blue, yellow, green, white, black, but not of a pure orange, grey or reddish-blue. (Incidentally, one *can* talk of a pure grey, in so far as one means by this a non-greenish, non-yellowish, etc., whitish-black; and something similar holds for “pure orange”, etc.) That is to say, the colour circle has four special points. For it does make sense to say “This orange is situated closer to red than that one (not on the plane of the colour circle, but within *colour space*)”; but it's not an equivalent expression to say “This orange is situated closer to bluish-red than that one” or “This orange is situated closer to blue than that one”.

A colour wheel produces the mixture of colours that we're talking about here, but it won't do it if I see it only in a still position and then turning rapidly. For it's conceivable, after all, that the wheel is half red and half yellow when it's still, and that (for whatever reasons¹³) it appears to be green when it spins rapidly. Rather, the colour wheel produces the mixture only in so far as we can visually perceive it as a mixture.¹⁴ That is, when little by little it spins faster and faster and we *see* how red and yellow turn into orange. But here we're not at the mercy of the wheel; rather, if through some unknown influence its colour turned whitish as the wheel spun faster and faster, then we wouldn't say that the intermediate colour between red and yellow was a whitish orange. No more than we'd say that 3 + 4 is 6 if, when putting 3 and 4 apples together one were to disappear in some unknown way and 6

9 (V): these colours

10 (V): in the grammatical regulations for the

11 (V): buildings

12 (V): inner ~~structure~~

13 (V): reason

14 (V): can have it under our visual control.

Weise verschwände und 6 Äpfel vor uns lägen. Ich gebrauche hier den Farbenkreisel nicht zu einem Experiment, sondern zu einer Rechnung.

Es scheint außer dem Übergang von Farbe zu Farbe auf dem Farbenkreis noch einen bestimmten anderen zu geben, den wir vor uns haben, wenn wir kleine Flecke der einen Farbe mit kleinen Flecken der andern untermischt sehen. Ich meine hier natürlich einen *gesehenen* Übergang.

Und diese Art des Übergangs gibt dem Wort „Mischung“ eine neue Bedeutung, die mit der Relation Zwischen auf dem Farbenkreis nicht zusammenfällt.

Man könnte es so beschreiben: Einen orangefarbenen Fleck kann ich mir entstanden denken durch Untermischen kleiner roter und gelber Flecke, dagegen einen roten nicht durch Untermischen von violetten und orangefarbenen. – In diesem Sinne ist Grau eine Mischung von Schwarz und Weiß, und Rosa eine von Rot und Weiß, aber Weiß nicht eine Mischung von Rosa und einem weißlichen Grün.

480 Nun meine ich aber nicht, daß es durch ein Experiment der Mischung festgestellt wird, daß gewisse Farben so aus anderen entstehen. Ich könnte das Experiment etwa mit einer rotierenden Farbenscheibe anstellen. Es kann dann gelingen, oder nicht gelingen, aber das zeigt nur, ob der betreffende visuelle Vorgang auf diese physikalische Weise hervorzurufen ist, oder nicht; es zeigt aber nicht, ob er möglich ist. Genau so, wie die physikalische Unterteilung einer Fläche nicht die visuelle Teilbarkeit beweisen oder widerlegen kann. Denn angenommen, ich sehe eine physikalische Unterteilung nicht mehr als visuelle Unterteilung, sehe aber die nicht geteilte Fläche im betrunkenen Zustande geteilt, war dann die visuelle Fläche nicht teilbar?

Man könnte sagen, Violett und Orange löschen einander bei der Mischung teilweise aus, nicht aber Rot und Gelb.

Orange ist jedenfalls ein Gemisch von Rot und Gelb in einem Sinne, in dem Gelb kein Gemisch von Rot und Grün ist, obwohl ja Gelb im Kreis zwischen Rot und Grün liegt.

Und wenn das offenbar Unsinn wäre, so fragt es sich, an welcher Stelle es anfängt Sinn zu werden; d.h., wenn ich nun im Kreis von Rot und Grün aus dem Gelb näherrücke und Gelb ein Gemisch der betreffenden beiden Farben nenne.

Ich erkenne nämlich im Gelb wohl die Verwandtschaft zu Rot und Grün, nämlich die Möglichkeit zum Rötlichgelb und Grünlichgelb – und dabei erkenne ich doch nicht Grün und Rot als Bestandteile von Gelb in dem Sinne, in dem ich Rot und Gelb als Bestandteile von Orange erkenne.

481 Ich will sagen, daß Rot nur in dem Sinn zwischen Violett und Orange ist, wie Weiß zwischen Rosa und Grünlichweiß. Aber ist in diesem Sinn nicht jede Farbe zwischen jenen zwei anderen, oder doch zwischen solchen zweien, zu denen man auf unabhängigen Wegen von der dritten gelangen kann.

Kann man sagen, in diesem Sinne liegt eine Farbe nur in einem gegebenen kontinuierlichen Übergang zwischen zwei andern. Also etwa Blau zwischen Rot und Schwarz.

Wenn man mir sagt, die Farbe eines Flecks liege zwischen Violett und Rot, so verstehe ich das und kann mir ein rötlicheres Violett als das Gegebene denken. Sagt man mir nun, die Farbe liege zwischen diesem Violett und einem Orange – wobei mir kein bestimmter kontinuierlicher Übergang in Gestalt eines gemalten Farbenkreises vorliegt – so kann ich mir höchstens denken, es sei auch hier ein rötlicheres Violett gemeint, es könnte aber auch ein rötlicheres Orange gemeint sein, denn eine Farbe, die, abgesehen von einem gegebenen Farbenkreis *in der Mitte* zwischen den beiden Farben liegt, gibt es nicht und aus eben diesem Grunde kann ich auch nicht sagen, an welchem Punkt das Orange, welches die eine Grenze

apples now lay in front of us. Here I am using the colour wheel not as an experiment but for a calculation.

Besides the transition from colour to colour on the colour wheel, there seems to be another specific transition that we encounter when we see little patches of the one colour mixed in with little patches of the other one. Of course what I mean here is a transition that's *seen*.

And this kind of transition gives the word "mixture" a new meaning, which doesn't coincide with the relation "between" on the colour wheel.

One could describe it like this: I can imagine an orange-coloured patch as having arisen through the intermixing of small red and yellow patches, whereas I can't imagine a red patch as having arisen through the intermixing of violet and orange-coloured patches. – In this sense grey is a mixture of black and white, and pink of red and white, but white isn't a mixture of pink and a whitish green.

I don't mean, though, that a mixing experiment establishes that certain colours arise from others in this way. I could carry out the experiment, say, with a rotating colour wheel. Then it might succeed or not succeed, but all that shows is whether or not the respective visual process can be produced by this physical means; it doesn't show whether it is possible. Just as the physical dissection of a surface can neither prove nor disprove its visual divisibility. For let's assume that I no longer see a physical division as a visual division, but that when I'm drunk I see the undivided surface as divided – then wasn't the visual surface divisible?

One could say that violet and orange partially cancel each other out when they are mixed, but red and yellow don't.

In any case, orange is a mixture of red and yellow in a sense in which yellow isn't a mixture of red and green, even though, as we know, yellow lies between red and green on the colour circle.

And if that were obviously nonsense, then the question is, at what point it begins to make sense. That is, when coming from red and green on the circle, I now move closer to yellow and call yellow a mixture of the respective two colours.

For with yellow I do recognize its kinship to red and green, i.e. the possibility of its changing into reddish-yellow and greenish-yellow – but still, in this process I don't recognize green and red as components of yellow in the sense in which I recognize red and yellow as components of orange.

I want to say that red is between violet and orange only in the sense in which white is between pink and greenish-white. But in that sense isn't any colour between two others, or in any case between two colours that can be reached by routes that are independent of it?

Can one say that, in this sense, a colour always lies in a given continuum between two others? Thus, say, that blue lies between red and black?

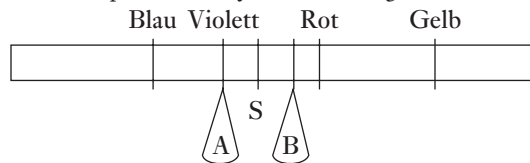
If I am told that the colour of a spot lies between violet and red, I understand that and can imagine a more reddish violet than the one that is defined as such. Now if I'm told that the colour is somewhere between this violet and an orange – and I don't have a particular continuous transition in front of me in the form of a painted colour circle – then at best I can imagine that what is meant here as well is a more reddish violet; but a more reddish orange could be meant as well, for there is no such thing as a colour that is situated *in the middle* of those two colours, independently of a given colour circle. And for this very reason neither can I say at what point the orange that constitutes the one border is too close to yellow still to be mixable with the violet; I simply cannot tell which orange lies 45 degrees

bildet, schon zu nahe dem Gelb liegt, um noch mit dem Violett gemischt werden zu können; ich kann eben nicht erkennen, welches Orange in einem Farbkreis 45 Grad vom Violett entfernt liegt. Das Dazwischenliegen der Mischfarbe ist eben hier kein anderes, als das des Rot zwischen Blau und Gelb.

Wenn ich im gewöhnlichen Sinn sage, Rot und Gelb geben Orange, so ist hier nicht von einer *Quantität* der Bestandteile die Rede. Wenn daher ein Orange gegeben ist, so kann ich nicht sagen, daß noch *mehr* Rot es zu einem rötteren Orange gemacht hätte (ich rede ja nicht von Pigmenten) obwohl es natürlich einen Sinn hat, von einem rötteren Orange zu sprechen. Es hat aber z.B. keinen Sinn zu sagen, dies Orange und dies Violett enthalten gleichviel Rot.

482 Und wieviel Rot enthielte *Rot*?

Der Vergleich, den man fälschlicherweise zu machen geneigt ist, ist der der Farbenreihe mit einem System von 2 Gewichten an einem Maßstab, durch deren Vermehrung oder Verschiebung ich den Schwerpunkt des Systems beliebig verschieben kann.



²⁰Es ist nun Unsinn, zu glauben, daß, wenn ich die Schale A auf Violett halte und B in das Feld Rot-Gelb hineinverschiebe, S sich gegen Rot hin bewegen wird.

Und wie ist es mit den Gewichten, die ich auf die Schalen lege: Heißt es denn etwas, zu sagen, „*mehr* von *diesem* Rot“? Wenn ich nicht von Pigmenten spreche. Das kann nur dann etwas heißen, wenn ich unter reinem Rot eine bestimmte, vorher angenommene Anzahl von Einheiten verstehe. Dann aber bedeutet die volle Anzahl dieser Einheiten nichts, als, daß die Waagschale²¹ auf *Rot* steht. Es ist also mit den Verhältniszahlen wieder nur ein Ort der Waagschale,²² aber nicht ein Ort und ein Gewicht angegeben.

Solange ich nun im Farbkreis mit meinen beiden Grenzfarben – z.B. – im Gebiete Blau – Rot stehe und die röttere Farbe gegen Rot verschiebe, so kann ich sagen, daß die Resultante auch gegen Rot wandert. Überschreite ich aber mit der einen Grenzfarbe das Rot und bewege mich gegen Gelb, so wird die Resultierende nun nicht rötler! Die Mischung eines gelblichen Rot mit einem Violett macht Violett nicht rötler, als die Mischung von reinem Rot und dem Violett. Daß das eine Rot nun gelber geworden ist, nimmt ja vom Rot etwas weg und gibt nicht Rot dazu.

483 Man könnte das auch so beschreiben: Habe ich einen Farbtopf mit violetterm Pigment und einen mit Orange und nun vergrößere ich die Menge des der Mischung zugesetzten Oranges,²³ so wird zwar die Farbe der Mischung nach und nach aus dem Violett ins Orange übergehen, aber nicht über das reine Rot.

Ich kann von zwei verschiedenen Tönen von Orange sagen, daß ich von keinem Grund habe zu sagen, er liege näher an Rot als an Gelb. – Ein „in der Mitte“ gibt es hier nicht. – Dagegen kann ich nicht zwei verschiedene Rot sehen und im Zweifel sein, ob eines, und welches, von ihnen das reine Rot ist. Das reine Rot ist eben ein Punkt, das Mittel zwischen Gelb und Rot aber nicht.

20 (F): MS 108, S. 84.

21 (O): Waagschale

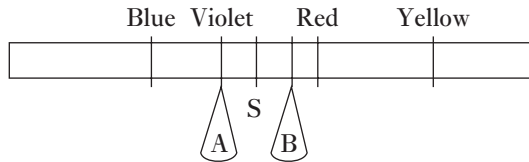
22 (O): Waagschale,

23 (O): des der Mischung zugesetztem Orange,

away from violet in a colour circle. Here the intermediate position of the mixed colour is simply no different from the intermediate position of red between blue and yellow.

If I say that red and yellow make orange in the ordinary sense of these words, then I'm not talking about a *quantity* of the components. Thus, if an orange is given, I can't say that still *more* red would have turned it into a redder orange, (for I'm not talking about pigments) even though it makes sense of course to talk about a redder orange. But it doesn't make any sense, for instance, to say that this orange and this violet contain equal amounts of red. For how much red would *red* contain?

The comparison that one is erroneously inclined to draw is that between the colour-chart and a system of two weights on a measuring stick, where by increasing or moving the weights I can shift the system's centre of gravity at will.



¹⁵But it is nonsense to think that S will move toward red if I keep pan A on violet and move B into the red-yellow section.

And what about the weights that I put into the pans: Does it mean anything to say “*more of this red*”, if I'm not talking about pigments? That can have meaning only if by “pure red” I understand a particular, previously agreed-upon number of units. But then the largest number of these units means nothing other than that the pan of the scales is on *red*. So once again the proportional numbers only indicate a position of the pan on the scales, not a place and a weight.

Now so long as I'm standing within the colour circle with my two transitional colours – for example, in the area blue-red – and am moving the redder colour towards red, I can say that the resulting colour is also moving towards red. But if I cross over red with the one transitional colour and move towards yellow, then the resulting colour doesn't turn redder! The mixture of a yellowish red with violet doesn't make the violet redder than the mixture of pure red and violet. That the one red has now become yellower *subtracts* something from the red; it doesn't add red.

One could also describe it this way: If I have one paint can with violet pigment and another with orange, and I increase the amount of orange that I add to the mixture of the two, then the colour of the mixture will gradually change from violet to orange, but not via pure red.

I can say of two different shades of orange that I have no reason to say of either that it lies closer to red than to yellow. – Here there is no such thing as “in the middle”. – Conversely, I can't see two different reds and be in doubt whether one of them, and which one, is pure red. Pure red is simply a point, but the middle area between yellow and red isn't.

15 (F): MS 108, p. 84.

Es ist freilich wahr, daß man von einem Orange sagen kann, es sei beinahe Gelb, also es liege „näher am Gelb als am Rot“ und Analoges von einem beinahe roten Orange. Daraus folgt aber nicht, daß es nun auch eine Mitte im Sinne eines Punktes zwischen Rot und Gelb geben müsse. Es ist eben hier ganz wie in der Geometrie des Gesichtsraums, verglichen mit der euklidischen. Es ist hier eine andere Art von Quantitäten als die, welche durch unsere rationalen Zahlen dargestellt werden. Die Begriffe näher und weiter sind hier überhaupt nicht zu brauchen, oder sind irreführend, wenn wir diese Worte anwenden.

Auch so: Von einer Farbe zu sagen, sie liege zwischen Rot und Blau, bestimmt sie nicht scharf (eindeutig). Die reinen Farben aber müßte ich *eindeutig* durch die Angabe bestimmen, sie liegen zwischen gewissen Mischfarben. Also bedeutet hier das Wort „dazwischen liegen“ etwas *anderes* als im ersten Fall. D.h.: Wenn der Ausdruck „dazwischen liegen“ einmal die Mischung zweier einfacher Farben, ein andermal den gemeinsamen einfachen Bestandteil zweier Mischfarben bezeichnet, so ist die Multiplizität seiner Anwendung in jedem
484 Falle eine andere. Und das ist *kein* Gradunterschied, sondern ein Ausdruck dafür, daß es sich um 2 ganz verschiedene Kategorien handelt.

Wir sagen, eine Farbe kann nicht zwischen Grüngelb und Blaurot liegen, in demselben Sinne, wie zwischen Rot und Gelb, aber das können wir nur sagen, weil wir in diesem Falle den Winkel von 45 Grad unterscheiden können; weil wir *Punkte* Gelb, Rot sehen. Aber eben diese Unterscheidung gibt es im andern Fall – wo die Mischfarben als primär angenommen werden – nicht. Hier könnten wir also sozusagen nie sicher sein, ob die Mischung noch möglich ist oder nicht.²⁴ Freilich könnte ich beliebige Mischfarben wählen und bestimmen, daß sie einen Winkel von 45 Graden einschließen, das wäre aber ganz willkürlich, wogegen es nicht willkürlich ist, wenn wir sagen, daß es keine Mischung von Blaurot und Grüngelb im ersten Sinne gibt.

In dem einen Falle gibt die Grammatik also den „Winkel von 45 Grad“ und nun glaubt man fälschlich, man brauche ihn nur zu halbieren und den nächsten Abschnitt ebenso um einen andern Abschnitt von 45 Grad zu kriegen. Aber hier bricht eben das *Gleichnis* des Winkels zusammen.

Man kann freilich auch alle Farbtöne in einer geraden Linie anordnen, etwa mit den Grenzen Schwarz und Weiß, wie das geschehen ist, aber dann muß man eben durch Regeln gewisse Übergänge ausschließen und endlich muß das Bild auf der Geraden die gleiche Art des topologischen Zusammenhangs bekommen, wie auf dem Oktaeder.²⁵ Es ist dies ganz analog, wie das Verhältnis der gewöhnlichen Sprache zu einer „logisch geklärten“ Ausdrucksweise. Beide sind einander vollkommen äquivalent, nur drückt die eine die Regeln der Grammatik schon durch die äußere Erscheinung aus.

485 Wenn mir 2 nahe aneinander liegende – etwa – rötliche Farbtöne gegeben sind, so ist es unmöglich darüber zu zweifeln, ob beide zwischen Rot und Blau, beide zwischen Rot und Gelb, oder der eine zwischen Rot und Blau, der andere zwischen Rot und Gelb gelegen ist. Und mit dieser Entscheidung haben wir auch entschieden, ob beide sich mit Blau, mit Gelb, oder der eine sich mit Blau, der andere mit Gelb mischen, und das gilt, wie nahe immer man die Farbtöne aneinander bringt, solange wir die Pigmente überhaupt der Farbe nach unterscheiden können.

24 (E): Im Typoskript wird dieser Satz hier 25 (O): Oktoeder.
wiederholt.

To be sure, it's true that one can say of an orange that it is almost yellow, and that therefore it's situated "closer to yellow than to red", and one can say something analogous of an orange that's almost red. But from this it doesn't follow that there must also be a middle, in the sense of a point, between red and yellow. Things here are simply the way they are in the geometry of visual space, as compared to Euclidean geometry. Here the quantities are of a different kind than those represented by our rational numbers. The concepts "closer" and "further" can't be used here at all, or are misleading when we apply these words.

One could also describe it like this: To say of a colour that it is situated between red and blue doesn't define it sharply (unambiguously). To define the pure colours *unambiguously* I would have to say that they are situated between certain mixed colours. So here the words "to be situated between" mean something *different* than in the first case. That is: If the expression "to be situated between" sometimes refers to the mixture of two pure colours, but at other times refers to the pure component that two mixed colours have in common, then in each case the multiplicity of what it is applied to is different. And this is *not* a difference of degree, but an expression of the fact that we are dealing with two completely different categories.

We say that a colour can't be situated between greenish-yellow and bluish-red in the same sense as between red and yellow, but we can only say that because in this case we can discern an angle of 45 degrees; because we see *points* of yellow, and red. But there's no discerning this in the other case – where mixed colours are taken as primary. So here we could never be certain, so to speak, whether or not the mixture is still possible. To be sure, I could pick out mixed colours at will, and stipulate that they form an angle of 45 degrees, but that would be completely arbitrary, whereas it isn't arbitrary when we say that there is no such thing as a mixture of bluish-red and greenish-yellow in the first sense.

So in the one case grammar provides the "angle of 45 degrees", and then one wrongly believes that all one has to do is to halve it, and then do likewise to the next sector, in order to get a new sector of 45 degrees. But here the *simile* of the angle simply breaks down.

To be sure, one can also arrange all the shades of colour along a straight line, say with black and white as borders, as is often done. If one then applies some rules so as to exclude certain transitions, the resulting picture of the line will then have the same kind of topological nexus as on an octahedron. This is completely analogous to the relationship between ordinary language and a mode of expression that is "logically clarified". Both are completely equivalent to each other; it's just that in the one the rules of grammar are expressed simply by its outward appearance.

If I am given two shades of colour that are close together – let's say they're reddish – then I can't possibly be in doubt whether both are situated between red and blue, both between red and yellow, or the one between red and blue and the other between red and yellow. And when we determine this we will also have determined whether both are mixed with blue, or with yellow, or whether the one is mixed with blue and the other with yellow; and this holds true no matter how close together one makes the shades of colour, so long as we're able to distinguish between the pigments in these colours at all.

Idealismus, etc.

Idealism, etc.

Die Darstellung des unmittelbar Wahrgenommenen.

Es kommt uns vor, als wäre die Erinnerung eine etwas sekundäre Art der Erfahrung, im Vergleich zur Erfahrung des Gegenwärtigen. Wir sagen „daran können wir uns *nur* erinnern“. Als wäre in einem primären Sinn die Erinnerung ein etwas schwaches und unsicheres Bild dessen, was wir ursprünglich in voller Deutlichkeit vor uns hatten.

In der physikalischen Sprache stimmt das: Ich sage „ich kann mich *nur undeutlich* an dieses Haus erinnern“.

Und warum es nicht dabei sein Bewenden haben lassen? Denn diese Ausdrucksweise sagt ja doch alles, was wir sagen wollen und was sich sagen läßt! Aber wir wollen sagen, daß es sich auch noch *anders* sagen läßt; und das ist wichtig.

In dieser andern Ausdrucksweise wird der Nachdruck gleichsam auf etwas anderes gelegt. Die Worte „scheinen“, „Irrtum“, etc. haben nämlich eine gewisse Gefühlsbetonung, die den¹ Phänomenen nicht wesentlich ist. Sie hängt irgendwie mit dem Willen und nicht bloß mit der Erkenntnis zusammen.

Wir reden z.B. von einer optischen Täuschung und verbinden mit diesem Ausdruck die Idee eines Fehlers, obwohl ja nicht wesentlich ein Fehler vorliegt: und wäre im Leben für gewöhnlich das Aussehen wichtiger, als die Resultate der Messung, so würde auch die Sprache zu diesen Phänomenen eine andere Einstellung zeigen.

Es gibt nicht – wie ich früher glaubte – eine primäre Sprache im Gegensatz zu unserer gewöhnlichen, der „sekundären“. Aber insofern könnte man im Gegensatz zu unserer Sprache von einer primären reden, als in dieser keine Bevorzugung gewisser Phänomene vor anderen ausgedrückt sein dürfte; sie müßte sozusagen absolut *sachlich* sein.

Es ist jetzt an der Zeit, Kritik am Worte „Sinnesdatum“ zu üben. Sinnesdatum ist die Erscheinung dieses Baumes, ob nun „wirklich ein Baum dasteht“ oder eine Attrappe, ein Spiegelbild, eine Halluzination etc. Sinnesdatum ist die Erscheinung des Baumes, und was wir sagen wollen ist, daß diese sprachliche Darstellung nur *eine* Beschreibung, aber nicht *die* wesentliche ist. Genau so, wie man von dem Ausdruck „*mein* Gesichtsbild“ sagen kann, daß es nur *eine* Form der *Beschreibung*, aber nicht etwa die einzig mögliche und richtige ist. Die Ausdrucksform „die Erscheinung dieses Baumes“ enthält nämlich die Anschauung, als bestünde ein notwendiger Zusammenhang dessen, was wir diese Erscheinung nennen, mit der „Existenz eines Baumes“ und zwar, entweder durch eine wahre Erkenntnis oder einen Irrtum. D.h., wenn von der „Erscheinung² eines Baumes“ die Rede ist, so hielten wir entweder etwas für einen Baum, was einer ist, oder etwas, was keiner ist. Dieser Zusammenhang aber besteht nicht.

1 (O): dem

2 (O): der Erscheinung

The Representation of what is Immediately Perceived.

It seems to us that, compared to the experience of the present, memory is a somewhat secondary kind of experience. We say “We can *only* remember something”. As if, in some primary sense, memory were a rather weak and uncertain image of what was originally before us with complete clarity.

That is correct in physical language, for I say “I can *only vaguely* remember this house”.

And why not leave it at that? For, after all, this mode of expression says everything we want to say and that can be said! But we want to say that it can be said in yet *another* way; and that is important.

In this other mode of expression, it’s as if the emphasis were placed on something else. For the words “to seem”, “error”, etc. have a certain emotional emphasis that isn’t essential to the phenomena. This emphasis is somehow connected to the will, and not merely to knowledge.

We talk about an optical illusion, for instance, and associate the idea of a mistake with this expression even though, really, this is not a case of a mistake; and if appearance were usually more important in life than the results of measurement, language too would present a different attitude towards such phenomena.

Contrary to my previous belief – there is no such thing as a primary language, as opposed to our ordinary one, to “secondary” language. But one could speak about a primary language as opposed to ours in so far as in the former, expressions that privilege certain phenomena above others would be forbidden; it would have to be absolutely *objective*, so to speak.

The time has now come to subject the expression “sense datum” to criticism. A sense datum is the appearance of this tree, whether there “really is a tree standing there”, or a prop, a mirror image, a hallucination, etc. A sense datum is the appearance of the tree, and what we want to say is that this linguistic representation is just *one* description, but not *the* essential one. Just as one can say that the expression “*my* visual image” is only *one* form of *description*, but by no means the only possible and correct one. For the form of expression “the appearance of this tree” incorporates the idea that there is a necessary connection between what we call this appearance and the “existence of a tree”, a connection made either by a true perception or a mistake. That is, if we’re talking about the “appearance of a tree”, then either we take something for a tree that is one, or something that isn’t one. But there is no such connection.

489 Die Idealisten möchten der Sprache vorwerfen, daß sie das Sekundäre als primär und das Primäre als sekundär darstellt. Aber das ist nur in diesen unwesentlichen, und mit der Erkenntnis nicht zusammenhängenden Wertungen der Fall („nur“ die Erscheinung). Davon abgesehen enthält die gewöhnliche Sprache keine Entscheidung über primär und sekundär. Es ist nicht einzusehen, inwiefern der Ausdruck „die Erscheinung eines Baumes“ etwas dem Ausdruck „Baum“ sekundäres darstellt. Der Ausdruck „nur ein Bild“ geht auf die Vorstellung zurück, daß wir das Bild eines Apfels nicht essen können.

Zur Frage nach der Existenz der Sinnesdaten. Man sagt, wenn etwas rot scheint, so muß *Etwas* rot gewesen *sein*; wenn etwas kurze Zeit zu dauern *schien*, so muß *Etwas* kurze Zeit gedauert haben; etc. Man könnte nämlich fragen: Wenn etwas rot schien, woher wissen wir denn, daß es gerade *rot* schien. Handelt es sich da um eine erfahrungsmäßige Zuordnung dieses Scheins mit³ dieser Wirklichkeit? Wenn etwas „die Eigenschaft ϕ zu haben schien“, woher wissen wir, daß es *diese* Eigenschaft zu haben schien –. Was für ein Zusammenhang besteht zwischen „es scheint so“ und „es ist so“.

Vor allem kann der Schein recht haben,⁴ oder unrecht. – Er ist auch in einem Sinne *erfahrungsgemäß* mit der Wirklichkeit verbunden. Man sagt „das scheint Typhus zu sein“ und das heißt, diese Symptome sind erfahrungsgemäß mit jenen Erscheinungen verbunden. Wenn ich sage „das scheint rot zu sein“ und dann „ja, es ist wirklich rot“, so habe ich für die zweite Entscheidung einen Test angewandt, der unabhängig von der ersten Erscheinung war.

490 Die Hypothese kann so aufgefaßt werden, daß sie nicht über die Erfahrung hinausgeht, d.h. nicht der Ausdruck der Erwartung künftiger Erfahrung ist. So kann der Satz „es scheint vor mir auf dem Tisch eine Lampe zu stehen“ nichts weiter tun, als meine Erfahrung (oder, wie man sagt, unmittelbare Erfahrung) zu beschreiben.

Wie verhält es sich mit der Genauigkeit dieser Beschreibung. Ist es richtig zu sagen: Mein Gesichtsbild ist so kompliziert, es ist unmöglich, es ganz zu beschreiben? Dies ist eine sehr fundamentale Frage.

Das scheint nämlich zu sagen, daß man von Etwas sagen könnte, es könne nicht beschrieben werden, oder nicht mit den jetzt vorhandenen Mitteln, oder (doch) man wisse nicht, wie es beschreiben. (Die Frage, das Problem, in der Mathematik.)

Wie ist denn das Es gegeben, das ich nicht zu beschreiben weiß? – Mein Gesichtsbild ist ja kein gemaltes Bild, oder der Ausschnitt der Natur den ich sehe, daß ich es näher untersuchen könnte. – Ist dieses Es schon artikuliert, und die Schwierigkeit nur es in Worten darzustellen, oder soll es noch auf seine Artikulation warten?

„Die Blume war von einem rötlichgelb, welches ich aber nicht genauer (oder, nicht genauer mit Worten) beschreiben kann.“ Was heißt das?

„Ich sehe es vor mir und könnte es malen.“

Wenn man sagt, man könnte diese Farbe nicht mit Worten genauer beschreiben, so denkt man (immer) an eine Möglichkeit einer solchen Beschreibung (freilich, denn sonst hätte der Ausdruck⁵ „genaue Beschreibung“ keinen Sinn) und es schwebt einem dabei der Fall einer Messung vor, die wegen unzureichender Mittel nicht ausgeführt wurde.

Es ist mir nichts zur Hand, was diese oder eine ähnliche Farbe hätte.

3 (V): und

4 (V): haben.

5 (V): hätte das Wort

Idealists like to reproach language by saying that it represents what is secondary as primary and what is primary as secondary. But that is only the case with these insignificant judgements that have nothing to do with knowledge (“only” an appearance). Aside from that, ordinary language doesn’t differentiate between what is primary or secondary. There is absolutely no good reason why the expression “the appearance of a tree” should represent something that is secondary in relation to the expression “tree”. The expression “only an image” goes back to the idea that we can’t eat the image of an apple.

Concerning the question of the existence of sense data. We say that if something seems to be red then *something* must have *been* red; if something *seemed* to last for a short time, then *something* must have lasted for a short time; etc. In this regard one could ask: If something seemed to be red, how do we know that it seemed exactly *red*? Is it a matter of an empirical link between this appearance and this reality? If something “seemed to have the property ϕ ” how do we know that it seemed to have *this* property? –. What kind of a connection is there between “That’s the way it seems” and “That’s the way it is”?

Most importantly, appearance can be accurate or deceptive.¹ – In one sense, it’s also connected to reality *empirically*. We say “That seems to be typhoid”, and that means that these symptoms are empirically connected to those phenomena. If I say “That seems to be red”, and then “Yes, it really is red”, I’ve applied a test to reach the second determination that was independent of the first phenomenon.

A hypothesis can be understood in such a way that it doesn’t exceed experience, i.e. that it isn’t an expression of an expectation of future experience. Thus the proposition “There seems to be a lamp standing in front of me on the table” often does nothing more than describe my experience (or my immediate experience, as we say).

What about the accuracy of this description? Is it correct to say: My visual image is so complicated that it’s impossible to describe it completely? This is a very fundamental question.

For that seems to be saying that one could say of something that it can’t be described, or not with the means that are now available, or (at least) that one doesn’t know how to describe it. (The question, the problem, in mathematics.)

How has the “it” that I don’t know how to describe been given? – After all, my visual image isn’t a painted picture, or a facet of nature, that I see, such that I could examine it more closely. – Is this “it” already articulated, and the only difficulty is to represent it in words, or is it supposed to await its articulation?

“The flower had a reddish-yellow colour, but one that I can’t describe more accurately (or more accurately in words).” What does that mean?

“I see it in front of me and could paint it.”

If we say that we can’t describe this colour more accurately in words, then we’re (always) thinking of a possibility of such a description (of course – otherwise the expression² “accurate description” would make no sense), and here we have in mind the case of a measurement that wasn’t carried out because of inadequate means.

There’s nothing at hand that has this or a similar colour.

1 (V): can be accurate.

2 (V): words

491 Wenn man sagt, man könne das Gesichtsbild nicht ganz beschreiben, meint man, man kann keine Beschreibung geben, nach der man sich dieses Gesichtsbild genau reproduzieren könnte.

Aber was heißt hier „genaue Reproduktion“? Hier liegt selbst wieder ein falsches Bild zu Grunde.

Was ist das Kriterium der genauen Reproduktion?

Wir können von dem Gesichtsbild nicht *weiter* reden, als unsere Sprache jetzt reicht. Und auch nicht *weiter*⁶ *meinen* (denken), als unsere Sprache reicht.⁷ (Nicht mehr meinen, als wir sagen können.)

Einer der gefährlichsten Vergleiche ist der des Gesichtsfelds mit einer gemalten Fläche (oder, was auf dasselbe hinauskommt, einem farbigen räumlichen Modell).

Hiermit hängt es zusammen: Könnte ich denn das Gesichtsbild „mit allen Einzelheiten“ wiedererkennen? Oder vielmehr, hat diese Frage überhaupt einen Sinn?

Denn als einwandfreiste Darstellung des Gesichtsbildes erscheint uns immer noch ein gemaltes Bild oder Modell. Aber, daß die Frage nach dem „Wiedererkennen in allen Einzelheiten“ sinnlos ist, zeigt schon, wie inadäquat Bild und Modell sind.

Phänomenologische Sprache: Die Beschreibung der unmittelbaren Sinneswahrnehmung, ohne hypothetische Zutat. Wenn etwas, dann muß doch wohl die Abbildung durch ein gemaltes
492 Bild oder dergleichen eine solche Beschreibung der unmittelbaren Erfahrung sein. Wenn wir also z.B. in ein Fernrohr sehen und die gesehene Konstellation aufzeichnen oder malen. Denken wir uns sogar unsere Sinneswahrnehmung dadurch reproduziert, daß zu ihrer Beschreibung ein Modell erzeugt wird, welches von einem bestimmten Punkt gesehen, diese Wahrnehmungen erzeugt; das Modell könnte mit einem Kurbelantrieb in die richtige Bewegung gesetzt werden und wir könnten durch Drehen der Kurbel die Beschreibung herunterlesen. (Eine Annäherung hierzu wäre eine Darstellung im Film.)

Ist *das* keine Darstellung des Unmittelbaren – was sollte eine sein? – Was noch unmittelbarer sein wollte, müßte es aufgeben, eine Beschreibung zu sein. Es kommt dann vielmehr statt einer Beschreibung jener unartikulierte Laut heraus, mit dem manche Autoren die Philosophie gerne anfangen möchten. („Ich habe, um mein Wissen wissend, bewußt etwas“ . Driesch.⁸)

„Was wir im physikalischen Raum denken, ist nicht das Primäre, das wir nur mehr oder weniger anerkennen können; sondern, was vom physikalischen Raum wir erkennen können, zeigt uns, wie weit das Primäre reicht und wie wir den physikalischen Raum zu deuten haben.“

Es scheint ein Einwand gegen die Beschreibung des unmittelbar Erfahrenen zu sein: „für wen beschreibe ich’s?“ Aber wie, wenn ich es abzeichne? Und die Beschreibung muß immer ein Nachzeichnen sein.

Und soweit eine Person für das Verstehen in Betracht kommt, steht die meine und die des Anderen auf einer Stufe. Es ist doch hier ebenso wie mit den Zahnschmerzen.
493 Beschreiben ist nachbilden, und ich muß nicht notwendigerweise *für* irgendjemand nachbilden.

6 (V): mehr

7 (V): sagt.

8 (E): Vgl. Hans Driesch, *Wirklichkeitslehre: ein metaphysischer Versuch*, Leipzig: Reinicke, 1917, S. 9.

If we say that we can't completely describe our visual image, we mean that we can't give any description that someone could use to reproduce this visual image accurately.

But what does "accurate reproduction" mean here? This expression itself is once again based on a false image.

What is the criterion for accurate reproduction?

We can't speak of our visual image *beyond* the current reach of our language. And neither can we *mean* (think) beyond the reach of our language.³ (We can't mean more than we can say.)

One of the most dangerous comparisons is that between one's field of vision and a painted surface (or – what amounts to the same thing – a coloured three-dimensional model).

That is connected with this: Could I recognize my visual image "in all of its details"? Or rather, does this question make any sense in the first place?

For it is still a painted picture or a model that seems to us to be the least objectionable representation of a visual image. But the fact that the question about "recognizing in all of its details" makes no sense already shows how inadequate the picture and the model are.

Phenomenological language: the description of immediate sense perception without any hypothetical addition. If anything, then surely a portrayal in a painted picture or the like must be such a description of immediate experience. Such as when we look through a telescope, for instance, and draw or paint the constellation we see. Let's even imagine that our sense perception is reproduced by creating a model for describing it, a model that, seen from a certain point, produces these perceptions; this machine could be set into proper motion with a crank drive, and by turning the crank, we could read off the description. (An approximation to this would be a representation in film.)

If *that* isn't a representation of the immediate – then what *can* be? – Anything that claimed to be even more immediate would have to forego being a description. Instead of a description, what results in that case is that inarticulate sound with which some authors would like to begin philosophy. ("Knowing of my knowing, I consciously possess something." – Driesch.⁴)

"What we think of as being in physical space isn't what is primary, which we can only recognize more or less; rather the part of physical space we can perceive shows us how far the primary extends, and how we are to interpret physical space."

This seems to be an objection to describing immediate experience: "For whom am I describing it?" But what if I copy it? And a description must always be a copying.

And in so far as a person is involved in understanding a description, I and anyone else are on the same level. After all, it's the same here as with a toothache. Describing is copying, and I don't necessarily have to copy *for* anyone.

3 (V): (think) more than our language says.

4 (E): Cf. Hans Driesch, *Wirklichkeitslehre: ein metaphysischer Versuch*, Leipzig: Reinicke, 1917, p. 9.

Wenn ich mich mit der Sprache dem Andern verständlich mache, so muß es sich hier um ein Verstehen im Sinne des Behaviourism handeln. Daß er mich verstanden hat, ist eine Hypothese, wie, daß ich ihn verstanden habe.

„Für wen würde ich meine unmittelbare Erfahrung beschreiben? Nicht für mich, denn ich habe sie ja: und nicht für jemand andern, denn der könnte sie nie aus der Beschreibung entnehmen?“ – Er kann sie soviel und so wenig aus der Beschreibung entnehmen, wie aus einem gemalten Bild. Die Vereinbarungen über die Sprache sind doch mit Hilfe von gemalten Bildern (oder was diesen⁹ gleichkommt) getroffen worden. Und, unserer¹⁰ gewöhnlichen Ausdrucksweise nach, entnimmt er doch aus einem gemalten Bild etwas.

9 (O): diesem

10 (V): unserer ~~Sp~~

If I use language to make myself understood to someone, then this has to be an instance of understanding in the behaviourist sense. That he understood me is a hypothesis, as is my having understood him.

“For whom would I describe my immediate experience? Not for myself, for I’m the one who has it; and not for someone else, because he could never infer it from my description.” – He can infer it as much and as little from my description as from a painted picture. After all, our linguistic conventions have been arrived at with the help of painted pictures (or their equivalents). And according to our usual way of speaking, he *does* infer something from a painted picture.

„Die Erfahrung im gegenwärtigen Moment, die eigentliche Realität.“

Es ist nämlich die Anschauung aufzugeben, daß, um vom Unmittelbaren zu reden, wir von dem Zustand in einem Zeitmoment reden müßten. Diese Anschauung ist darin ausgedrückt, wenn man sagt: „alles, was uns gegeben ist, ist das Gesichtsbild und die Daten der übrigen Sinne, sowie die Erinnerung, in dem gegenwärtigen Augenblick“. Das ist Unsinn; denn was meint man mit dem „gegenwärtigen Augenblick“? Dieser Vorstellung liegt vielmehr schon ein physikalisches Bild zu Grunde, nämlich das vom Strom der Erlebnisse, den ich nun in einem Punkt¹ quer durchschneide. Es liegt hier eine ähnliche Tendenz und ein ähnlicher Fehler vor, wie beim Idealismus (oder Solipsismus).

Der Zeitmoment, von dem ich sage, er sei die Gegenwart, die alles enthält, was mir gegeben ist, gehört selbst zur physikalischen Zeit.

495 Denn, wie ist so ein Moment bestimmt? Etwa durch einen Glockenschlag? Und kann ich denn nun die ganze, mit diesem Schlag gleichzeitige Erfahrung wirklich beschreiben? Wenn man daran denkt es zu versuchen, wird man sofort gewahr, daß es eine Fiktion ist, wovon wir reden.

Wir stellen uns das Erleben wie einen Filmstreifen vor, so daß man sagen kann: dieses Bild, und kein anderes, ist in diesem Augenblick vor der Linse.

Aber nur im Film kann man von einem in diesem Moment gegenwärtigen Bild reden; nicht, wenn man aus dem physikalischen Raum und seiner Zeit in den Gesichtsraum und seine Zeit übergeht.

Es ist eben irreführend, zu sagen „das Gedächtnis sagt mir, daß dies dieselbe Farbe ist etc.“. Sofern es mir etwas sagt, kann es mich auch täuschen (d.h. etwas falsches sagen).

Wenn ich die unmittelbar gegebene Vergangenheit beschreibe, so beschreibe ich mein Gedächtnis, und nicht etwas, was dieses Gedächtnis anzeigt. (Wofür dieses Gedächtnis ein Symptom wäre.)

Und „Gedächtnis“ bezeichnet hier – wie früher „Gesicht“ und „Gehör“ – auch nicht ein psychisches Vermögen, sondern einen bestimmten Teil der logischen Struktur unserer Welt.

Was wir die Zeit im Phänomen (specious present) nennen können, liegt nicht in der Zeit (Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft) der Geschichte, ist keine Strecke der Zeit. Während der Vorgang der „Sprache“² in der homogenen geschichtlichen Zeit abläuft. (Denke an den Mechanismus zur Beschreibung der unmittelbaren Wahrnehmung.)

1 (V): nun an einer Stelle

2 (V): Während, was wir unter „Sprache“ verstehen,

“The Experience at the Present Moment, Actual Reality.”

We have to give up the view that in order to speak about the immediate, we must speak about a state at a moment in time. This view is expressed by saying: “All that is given to us at the present moment is our visual image and the data of the other senses, as well as memory”. That is nonsense; for what does one mean by the “present moment”? This idea is already based on a physical image, that of the stream of experiences that I’m now bisecting at a point.¹ Here there’s a similar tendency and a similar mistake as with idealism (or solipsism).

That moment in time – of which I say that it is the present, and which contains everything that has been given to me – itself belongs to physical time.

For how is such a moment determined? By the stroke of a clock, perhaps? And can I really describe the entire experience that is simultaneous with this stroke? If you think about trying it you’ll notice immediately that what we’re talking about is fiction.

We imagine that experience is like a film strip, and that we can say: This picture and no other is in front of the lens at this moment.

But only in a film can one talk about a picture that is present at this moment; not when one moves from physical space and its time to visual space and its time.

It’s simply misleading to say “Memory tells me that this is the same colour, etc.” In so far as it tells me something, it can also deceive me (i.e. say something false).

If I describe the immediately given past, then I’m describing my memory, and not something that this memory signifies. (For which this memory would be a symptom.)

And – like “vision” and “hearing” earlier – neither does “memory” signify a psychological ability, but a particular part of the logical structure of our world.

What we might call phenomenal time (the specious present) doesn’t occur in historical time (past, present and future). It is not a stretch of time, whereas the process of² “language” runs its course in homogeneous historical time. (Think of our earlier apparatus for describing immediate perception.)

1 (V): spot.

2 (V): whereas what we understand by

496 (Von welcher Wichtigkeit ist denn diese Beschreibung des *gegenwärtigen* Phänomens, die für uns gleichsam zur fixen Idee werden kann. Daß wir darunter leiden, daß die Beschreibung nicht das beschreiben kann, was beim Lesen der Beschreibung vor sich geht. Es scheint, als wäre die Beschäftigung mit dieser Frage geradezu kindisch und wir in eine Sackgasse hineingeraten. Und doch ist es eine bedeutungsvolle Sackgasse, denn in sie lockt es Alle zu gehen; als wäre dort die letzte Lösung der philosophischen Probleme zu suchen. – Es ist, als käme man mit dieser Darstellung des gegenwärtigen Phänomens in einen verzauberten Sumpf, wo alles Erfassbare verschwindet.)

Andererseits brauchen wir eine Ausdrucksweise, die Vorgänge³ des Gesichtsraums getrennt von den Erfahrungen anderer Art darstellt.

(Wir befinden uns mit unserer Sprache (als physischer Erscheinung) sozusagen nicht im Bereich des projizierten Bildes auf der Leinwand, sondern im Bereich des Films, der durch die Laterne geht. Und wenn ich zu dem Vorgang auf der Leinwand Musik machen will, muß das, was sie hervorruft, sich wieder im Gebiet des Films abspielen. Das gesprochene Wort im Sprechfilm, das die Vorgänge auf der Leinwand begleitet, ist ebenso *fließend*,⁴ wie diese Vorgänge, und nicht das Gleiche wie der Tonstreifen. Der Tonstreifen begleitet nicht das Spiel auf der Leinwand.)

Ein Gedanke über die Darstellbarkeit der unmittelbaren Realität durch die Sprache:

497 „Der Strom des Lebens, oder der Strom der Welt, fließt dahin, und unsere Sätze werden, sozusagen, nur in Augenblicken verifiziert. Unsere Sätze werden nur von der Gegenwart verifiziert. – Sie müssen also so gemacht sein, daß sie von ihr verifiziert werden können. Sie müssen das Zeug haben, um von ihr verifiziert werden zu können. Dann sind sie also in irgendeiner Weise mit der Gegenwart kommensurabel und dies können sie nicht sein⁵ *trots* ihrer raum-zeitlichen Natur, sondern diese muß sich zur Kommensurabilität verhalten, wie die Körperlichkeit eines Maßstabes zu seiner Ausgedehntheit, mittels⁶ der er mißt. Im Falle des Maßstabes kann man auch nicht sagen: Ja, der Maßstab mißt die Länge trotz seiner Körperlichkeit; freilich, ein Maßstab, der nur Länge hätte, wäre das Ideal, wäre der *reine* Maßstab⁷. Nein, wenn ein Körper Länge hat, so kann es keine Länge ohne einen Körper geben – und wenn ich auch verstehe, daß in einem bestimmten Sinn nur die Länge des Maßstabes mißt, so bleibt doch, was ich in die Tasche stecke der Maßstab, – der Körper und nicht die Länge.“

498 „Nur die Erfahrung des gegenwärtigen Augenblicks hat Realität“. – Soll das heißen, daß ich heute früh nicht aufgestanden bin? Oder, daß ein Ereignis, dessen ich mich in diesem Augenblick nicht entsinne,⁷ nicht stattgefunden hat? – Soll hier „gegenwärtige Erfahrung“ im Gegensatz stehen zu zukünftiger und vergangener Erfahrung? Oder ist es ein Beiwort, wie das Wort „rational“ in „rationale Zahl“, so daß man die beiden Wörter auch durch *eines* ersetzen könnte und das Beiwort auf eine grammatische Eigentümlichkeit hinweist. Und was wird in diesem Falle vom Subjekt ausgesagt, wenn ihm Realität zugesprochen wird? Betonen wir hier nicht wieder eine grammatische Eigentümlichkeit, etwa, als wenn man sagte:⁸ „nur die Kardinalzahlen sind wirkliche Zahlen“. (Kronecker soll gesagt haben, nur die Kardinalzahlen seien von Gott erschaffen, alle anderen seien Menschenwerk.) – Heißt es

3 (V): Phänomene

4 (V): *fließend*,

5 (V): Dann haben sie also in irgendeiner Weise die Kommensurabilität mit der Gegenwart und diese können sie nicht haben

6 (V): mit

7 (V): erinnere,

8 (V): Eigentümlichkeit, in derselben Weise, wie wenn man sagt

(Anyway – what’s the importance of this description of the *present* phenomenon, which can turn into an *idée fixe* for us, as it were? Such that we suffer because the description cannot describe what goes on when we read the description. It seems that occupying oneself with this question is nothing short of childish, and that we have got ourselves into a blind alley. And yet it is a significant blind alley, for all are lured into entering it; as if the ultimate solution of philosophical problems were to be sought there. – It is as if in representing the present phenomenon this way one got into a bewitched swamp where everything comprehensible vanishes.)

On the other hand we need a way of expressing ourselves that represents events³ in visual space separately from other kinds of experiences.

(When we’re dealing with our language (as a physical phenomenon) we are not in the realm of the picture projected on the screen, as it were, but rather in that of the film passing through the projector. And if I want to add music to the event on the screen, then what produces it must also take place in the realm of the film. The spoken word in a talking-picture that accompanies the events on the screen is just as fleeing⁴ as these events, but it is not the same thing as the sound-track. It’s not the sound-track that accompanies the action on the screen.)

A thought about the ability to represent immediate reality through language:

“The stream of life, or the stream of the world, flows along and our propositions are verified only at an instant, so to speak. Our propositions are only verified by the present. – So they must be constructed in such a way that they can be verified by it. They must have what it takes to be verified by it. So in some way they are commensurable with the present, but they cannot be so⁵ *in spite of* their spatio-temporal nature; rather, this nature must relate to their commensurability as the corporality of a measuring stick does to its extendedness, by means of which⁶ it measures. In the case of the measuring stick you can’t say: ‘Yes, the measuring stick measures length in spite of its corporality; but a measuring stick that had only length would be the ideal, would be the *pure* measuring stick’. No, if a body has length, then there can’t be any length without a body – and even if I do understand that in a certain sense only the length of the measuring stick does the measuring, yet what I put into my pocket is still the measuring stick – the body and not the length.”

“Only the experience of the present moment has reality.” – Is that supposed to mean that I didn’t get up this morning? Or that an event that I can’t think of⁷ right now didn’t take place? – In this case is “present experience” supposed to stand in opposition to future and past experience? Or is it an adjective like the word “rational” in “rational number”, such that one could replace the two words by *one*, the adjective pointing to a grammatical idiosyncrasy? And in that case what are we saying about the subject if we grant it reality? Aren’t we once again emphasizing a grammatical idiosyncrasy here, as if for instance we said:⁸ “Only the cardinal numbers are real numbers”. (Kronecker is supposed to have said that only the cardinal numbers were created by God, all else is the work of man.) – If we say “present

3 (V): phenomena

4 (V): fluid

5 (V): they have commensurability with the present and they cannot have it

6 (V): extendedness, with which

7 (V): can’t remember

8 (V): here, in the same as if we said:

„gegenwärtige Erfahrung“ im Gegensatz zu zukünftiger und vergangener, dann meint man mit diesen Erfahrungen etwa physikalische Vorgänge; und wenn ich das Bild von der Laterna magica gebrauche und die zeitlichen Beziehungen in räumliche übersetze, so ist die gegenwärtige Erfahrung im physikalischen Sinn das Bild auf dem Filmstreifen, das sich vor dem Objektiv der Laterne befindet. (Ich kann nicht sagen: „das sich *jetzt* vor dem Objektiv der Laterne befindet.“) Auf der einen Seite dieses Bildes liegen⁹ die vergangenen, auf der andern die zukünftigen Bilder (die beiden Seiten sind durch Eigentümlichkeiten des Apparates charakterisiert). Das Bild auf der Leinwand gehört der Zeit des Filmstreifens nicht an; man kann von ihm nicht in dem eben beschriebenen Sinne sagen, es sei gegenwärtig. (Im Gegensatz wozu? – Das Wort „gegenwärtig“, wenn man es hier benützt, bezeichnet nicht einen Teil¹⁰ eines Raumes im Gegensatz zu andern Teilen, sondern charakterisiert einen Raum.) Der Satz, nur die gegenwärtige Erfahrung habe Realität, wäre nun hier der Satz, daß nur das Bild vor dem Objektiv dem Bild auf der Leinwand entspricht. Und das könnte allerdings ein Erfahrungssatz sein und das Gleichnis läßt uns hier im Stich, wenn wir die Entsprechung zwischen Film und Leinwand (die Projektionsart) nicht so festlegen,¹¹ daß sich dadurch das Bild auf dem Film, welches dem Bild auf der Leinwand entspricht, als das Bild vor dem Objektiv der Laterne ergibt.

9 (V): sind

10 (V): Teil €

11 (V): festsetzen,

experience” as opposed to future and past experience, then by these experiences we mean, for example, physical events; and if I use the image of the *laterna magica* and translate the temporal relationships into spatial ones, then in a physical sense the present experience is the picture on the film strip that is in front of the projector’s lens. (I can’t say: “That is *now* in front of the projector’s lens”.) On one side of this picture lie⁹ the past, on the other the future pictures (the two sides are characterized by the peculiarities of the apparatus). The picture on the screen is not part of the time of the film strip; one cannot say of it that it is present in the sense just described. (In contrast to what? – The word “present”, when one uses it here, doesn’t signify one part of a space in opposition to other parts; rather, it characterizes a space.) So here the proposition that only present experience has reality would be the proposition that only the picture in front of the lens corresponds to the picture on the screen. And that could indeed be an empirical proposition, but here the simile leaves us in the lurch, unless we set up the correspondence between film and screen (the mode of projection) so that the picture on the film that corresponds to the picture on the screen turns out to be the picture in front of the lens of the projector.

9 (V): are

Idealismus.

499

((Ich sehe undeutlich eine Verbindung zwischen dem Problem des Solipsismus oder Idealismus und dem, der Bezeichnungsweise eines Satzes. Wird etwa das Ich in diesen Fällen durch den Satz ersetzt und das Verhältnis des Ich zur Wirklichkeit durch das Verhältnis von Satz und Wirklichkeit?))

Dem, der sagt „aber es steht doch wirklich ein Tisch hier“ muß man antworten: „Freilich steht ein wirklicher Tisch hier, – im Gegensatz zu einem nachgemachten“.

Wenn er aber nun weiterginge und sagte: die Vorstellungen seien nur Bilder der Dinge, so müßte ich (ihm) widersprechen und sagen, daß der Vergleich der Vorstellung mit einem Bilde des Körpers gänzlich irreführend sei, da es für ein Bild wesentlich sei, daß es mit seinem Gegenstand verglichen werden kann.

500 Wenn aber Einer sagt „die Vorstellungen sind das einzig Wirkliche“, so muß ich sagen, daß ich hier das Prädikat¹ „wirklich“ nicht verstehe und nicht weiß, was für eine Eigenschaft man damit eigentlich den Vorstellungen zuspricht und – etwa – den Körpern abspricht. Ich kann ja nicht begreifen, wie man mit Sinn – ob wahr oder falsch – eine Eigenschaft Vorstellungen und physischen Körpern zuschreiben kann.

(Der Mensch, der in den Spiegel sieht um sich zwinkern zu sehen; und was er nun wirklich sieht. Ungeeignete physikalische Theorien.)

(Zeitdauer eines Tones und Zeitdauer einer akustischen Schwingung.)

Das Wahre am Idealismus ist eigentlich, daß der Sinn des Satzes aus seiner Verifikation ganz hervorgeht.

Wenn der Idealismus sagt, der Baum sei nur meine Vorstellung, so ist ihm vorzuhalten, daß der Ausdruck „dieser Baum“ nicht dieselbe Bedeutung hat wie „meine Vorstellung von diesem Baum“. Sagt der Idealismus, meine Vorstellung allein existiert (hat Realität) nicht der Baum, so mißbraucht er das Wort „existieren“ oder „Realität haben“.

501 1.) Du scheinst ja hier zu sagen, daß die Vorstellung eine Eigenschaft hat, die der Baum nicht hat. Aber wie weißt Du das? Hast Du alle Vorstellungen und Bäume daraufhin untersucht. Oder ist das ein Satz a priori, dann muß er² in eine grammatische Regel gefaßt werden, die sagt, daß man von der Vorstellung etwas Bestimmtes mit Sinn aussagen darf, nicht aber vom Baum. 2.) Was soll es aber heißen, von einer Vorstellung Realität auszusagen? Dem Gebrauch³ entsprechend höchstens,⁴ daß diese Vorstellung vorhanden ist. In andern Sinne – freilich – sagen wir aber auch von einem Baum aus, er existiere (habe Realität) im Gegensatz zu dem Fall etwa, daß er bereits umgehauen ist. Und es bleibt nur übrig, daß

1 (V): Wort
2 (O): dann er

3 (V): Sprachgebrauch
4 (V): nur,

Idealism.

((I see, indistinctly, a connection between the problem of solipsism or idealism and the notational system of a proposition. In these cases is the “I” perhaps replaced by the proposition, and the relationship of the “I” to reality by the relationship between the proposition and reality?))

Someone who says “But there really is a table here” has to be answered: “Sure, there’s a real table here – as opposed to an imitation”.

But if he now went further and said that mental images are just images of things, then I’d have to contradict (him), and say that the comparison of a mental image with the image of a physical object is completely misleading, since it’s essential to an image that it can be compared with its object.

But if someone says “Ideas are the only entities that are real”, then I have to say that here I don’t understand the predicate¹ “real”, and that I don’t know what kind of property one in fact grants to ideas and – perhaps – denies of objects, when one uses it. For I can’t grasp how it can make any sense to ascribe (either truly or falsely) a single property to both ideas and physical objects.

(The person who looks into the mirror in order to see himself wink; and what he then actually sees. Physical theories that don’t fit.)

(Duration of a sound and duration of an acoustical oscillation.)

The truth in idealism is really that the sense of a proposition emerges completely from its verification.

If idealism says that the tree is only my mental image, then one should point out to it that the expression “this tree” doesn’t have the same meaning as “my mental image of this tree”. If idealism says that only my mental image exists (has reality), not the tree, then it misuses the words “exist” or “have reality”.

1. You seem to be saying here that the mental image has a property that the tree doesn’t. But how do you know that? Did you examine all mental images and trees in that regard? Or is that an *a priori* proposition? Then it should be subsumed under a grammatical rule stating that one can sensibly say something specific about a mental image, but not about a tree. 2. But what is stating that a mental image is real supposed to mean? According to our use,² the most³ it can mean is that this mental image is present. But in another sense – to be sure – we also say of a tree that it exists (has reality), as opposed for example to the case where it’s been cut down. And all that’s left is that the word “tree”, in the sense in which

1 (V): word

2 (V): our linguistic use,

3 (V): use, all

das Wort „Baum“ in der Bedeutung, in der man sagen kann „der Baum wird umgehauen und verbrannt“ einer anderen grammatischen Kategorie angehört, als der Ausdruck „meine Vorstellung vom Baum“, etwa im Satz: „Meine Vorstellung vom Baum wird immer undeutlicher“. Sagt aber der Realismus, die Vorstellungen seien doch „nur die subjektiven Abbilder⁵ der Dinge“, so ist zu sagen, daß dem ein falscher Vergleich⁶ zwischen der Vorstellung von einem Ding und dem Bild des Dinges zu Grunde liegt. Und zwar einfach, weil es wohl möglich ist, ein Ding zu sehen *und* sein Bild (etwa nebeneinander), aber nicht ein Ding und die Vorstellung davon.

Es handelt sich um die Grammatik des Wortes „Vorstellung“ im Gegensatz zur Grammatik der „Dinge“.

[*(Es könnte sich eine seltsame Analogie daraus ergeben, daß das Okular auch des riesigsten Fernrohrs nicht größer sein darf,⁷ als unser Auge.)*]

Wer den Satz, nur die gegenwärtige Erfahrung sei real, bestreiten will (was ebenso falsch ist, wie ihn zu behaupten) wird etwa fragen, ob denn ein Satz wie „Julius Cäsar ging über die Alpen“ nur den gegenwärtigen Geisteszustand Desjenigen beschreibt, der sich mit dieser Sache beschäftigt. Und die Antwort ist natürlich: Nein! er beschreibt ein Ereignis, das, wie wir glauben, vor ca. 2000 Jahren stattgefunden hat. Wenn nämlich das Wort „beschreibt“ so aufgefaßt wird, wie in dem Satz „der Satz ‚ich schreibe‘ beschreibt, was ich gegenwärtig tue“. Der Name Julius Cäsar bezeichnet eine Person. – Aber was sagt denn das⁸ alles?
 502 Ich scheine mich ja um die eigentliche philosophische Antwort drücken zu wollen! – Aber Sätze, die von Personen handeln, d.h. Personennamen enthalten, können eben auf sehr verschiedene Weise verifiziert werden. – Fragen wir uns nur, warum wir den Satz glauben. – Daß es (z.B.) denkbar ist, die Leiche Cäsars noch zu finden, hängt unmittelbar mit dem Sinn des Satzes über Julius Cäsar zusammen. Aber auch, daß es möglich⁹ ist, eine Schrift zu finden, aus der hervorgeht, daß so ein Mann nie gelebt hat und seine Existenz zu bestimmten Zwecken erdichtet worden sei.¹⁰ Solche¹¹ Möglichkeiten gibt es (aber) für einen Satz: „ich sehe einen roten Fleck über einen grünen dahinziehen“ nicht. Und das meinen wir, wenn wir sagen, dieser Satz habe in unmittelbarer Art Sinn,¹² als der¹³ über Julius Cäsar.

5 (V): Bilder

6 (V): dem eine falsche Analogie

7 (V): nicht größer ist,

8 (V): das ~~also~~

9 (V): denkbar

10 (V): ist.

11 (V): Diese

12 (V): grünen dahinziehen“ nicht; und das ist es, was wir damit meinen, wenn wir sagen, daß dieser Satz in unmittelbarer Art Sinn hat,

13 (V): jener

one can say “The tree is being cut down and burned”, belongs to a different grammatical category than the expression “My mental image of the tree”, as in the sentence: “My mental image of the tree is becoming less and less distinct”. But if realism says that mental images are “only the subjective likenesses⁴ of things”, then it must be said that this is based on a false comparison⁵ between the mental image and a picture of a thing. And it’s false simply because it’s quite possible to see a thing *and* its picture (say, next to each other), but not a thing and a mental image of it.

It’s a matter of the grammar of the words “mental image”, as opposed to the grammar of “things”.

| (A strange analogy could arise from the fact that the eyepiece of even the most gigantic telescope mustn’t be⁶ any bigger than our eye.) |

Anyone who wants to dispute the proposition that only present experience is real (which is just as false as asserting it) might ask whether a sentence such as “Julius Caesar crossed the Alps” really only describes the present mental state of the person who’s concerned with the matter. And of course the answer is: No! It describes an event that took place – so we believe – about 2,000 years ago. That is, if the word “describes” is understood as in the sentence “The sentence ‘I’m writing’ describes what I’m presently doing”. The name Julius Caesar designates a person. – But what does all of this say? I seem to be wanting to dodge the actual philosophical answer! – But it’s simply that propositions about people, i.e. that contain proper names, are verifiable in very different ways. – Let’s ask ourselves why we believe the proposition. – That it is conceivable, (*for instance*), that we might still find Caesar’s body, is immediately connected with the sense of the proposition about Julius Caesar. But what’s also connected with this sense is that it’s possible to⁷ find a document indicating that such a man never lived and that his existence was made up for certain reasons. (*But*) there are no such possibilities⁸ for a proposition like: “I see a red patch eclipsing a green one”. And that⁹ is what we mean when we say that this proposition makes sense in a more immediate way than the one¹⁰ about Julius Caesar.

4 (V): the pictures

5 (V): a false analogy

6 (V): telescope isn’t

7 (V): it’s conceivable that we might

8 (V): (*But*) these possibilities don’t exist

9 (V): green one”; and that

10 (V): than that

„Schmerzen *haben*.“

503

Zur Erklärung des Satzes „er hat Zahnschmerzen“ sagt man etwa: „ganz einfach, ich weiß, was es heißt, daß *ich* Zahnschmerzen habe, und wenn ich sage, daß er Zahnschmerzen hat, so meine ich, daß er jetzt das hat, was ich damals hatte“. Aber was bedeutet „er“ und was bedeutet „Zahnschmerzen *haben*“. Ist das eine Relation, die die Zahnschmerzen damals zu mir hatten und jetzt zu ihm. Dann wäre ich mir also jetzt auch der Zahnschmerzen bewußt, und dessen daß er sie jetzt hat, wie ich eine Geldbörse jetzt in seiner Hand sehen kann, die ich früher in meiner gesehen habe.

504 Hat es einen Sinn zu sagen „ich habe Schmerzen, ich merke sie aber nicht“? Denn in diesem Satz könnte ich dann allerdings statt „ich habe“ „er hat“ einsetzen. Und umgekehrt, wenn die Sätze „er hat Schmerzen“ und „ich habe Schmerzen“ auf der gleichen logischen Stufe stehen, so muß ich im Satz „er hat Schmerzen,¹ die ich nicht fühle“ statt „er hat“ „ich habe“ setzen können. – Ich könnte auch so sagen: Nur insofern ich Schmerzen haben kann, die ich nicht fühle, kann er Schmerzen haben, die ich nicht fühle. Es könnte dann noch immer der Fall sein, daß ich tatsächlich die Schmerzen, die ich habe, immer fühle, aber es muß Sinn haben, das zu verneinen.

Der Begriff der Zahnschmerzen als eines Gefühlsdatums ist allerdings auf den Zahn des Anderen ebenso anwendbar, wie auf den meinen, aber nur in dem Sinne, in dem es ganz wohl möglich wäre, in dem Zahn in eines andern Menschen Mund Schmerzen zu empfinden. Im Einklang mit der gegenwärtigen Ausdrucksweise würde man aber diese Tatsache nicht durch die Worte „ich fühle seinen Zahnschmerz“ ausdrücken, sondern durch „ich habe in seinem Zahn Schmerzen“. – Man kann nun sagen: Freilich hast Du nicht seinen Zahnschmerz, denn es ist auch dann sehr wohl möglich, daß er sagt „ich fühle in diesem Zahn nichts“. Und sollte ich in diesem Fall sagen „Du lügst, ich fühle, wie Dein Zahn schmerzt“?

Wenn ich jemand, der Zahnschmerzen hat, bemitleide, so setze ich mich in Gedanken an seine Stelle. Aber ich setze *mich* an seine Stelle.

Die Frage ist, ob es Sinn hat zu sagen: „Nur A kann den Satz ‚A hat Schmerzen‘ verifizieren, ich nicht“. Wie aber wäre es, wenn dieser Satz falsch wäre, wenn *ich* also den Satz verifizieren könnte,² kann es etwas anderes heißen, als daß dann ich Schmerzen fühlen müßte! Aber wäre das eine Verifikation? Vergessen wir nicht: es ist Unsinn, zu sagen, *ich* müßte *meine* oder *seine* Schmerzen fühlen.

Man könnte auch so fragen: Was in meiner Erfahrung rechtfertigt das „meine“ in „ich fühle *meine* Schmerzen“. Wo ist die Multiplizität des Gefühls, die dieses Wort rechtfertigt, und es kann nur dann gerechtfertigt sein, wenn an seine Stelle auch ein anderes treten kann.

1 (V): Schmerzen“,

2 (V): könnte, ~~daß~~

“*Having Pain.*”

To explain the proposition “He has a toothache” one might say: “It’s quite simple: I know what it means that *I* have a toothache, and if I say that he has a toothache I mean that he has now what I had then”. But what does “he” mean, and what “*to have* a toothache”? Is this a relationship that the toothache had to me at that time and now has to him? So in that case I too would be conscious of the toothache now, and of the fact that he has it now, just as I can now see a wallet in his hand that I saw in mine before.

Does it make sense to say I have aches, but I don’t notice them? Because then I really could insert “he has” for “I have” in this sentence. And, conversely, if the sentences “He has aches” and “I have aches” are on the same logical level, then in the sentence “He has aches that I don’t feel” I have to be able to replace “He has” with “I have”. – I could also put it this way: Only in so far as I can have aches that I don’t feel can he have aches that I don’t feel. Then it could still be the case that in fact I always feel the aches that I have, but it must make sense to deny that.

To be sure, the concept of a toothache as a sense datum is just as applicable to someone else’s tooth as to mine, but only in the sense in which it would be quite possible to feel pain in a tooth in someone else’s mouth. In accordance with our present way of speaking, however, one wouldn’t express this fact with the words “I feel his toothache”, but rather with “I have an ache in his tooth”. – Now one can say: Of course you don’t have his toothache, because in that case it might very well happen that he says “I don’t feel anything in this tooth”. And should I say in this case “You’re lying, I feel that your tooth is aching”?

When I pity someone who has a toothache I mentally put myself in his place. But I put *myself* in his place.

The question is whether it makes sense to say: “Only A can verify the proposition ‘A is in pain’, not I”. But what if this proposition were false – i.e. if *I* could verify the proposition? Can that mean anything other than that in that case, I would have to feel pain! But would that be a verification? Let’s not forget: It’s nonsense to say that *I* had to feel *my* or *his* pain.

One could also put the question this way: What in my experience justifies the “my” in “I feel *my* pain”? Where is the multiplicity of feeling that justifies this word? – and it can only be justified if it’s also possible for another to take its place.

505 „Ich habe Schmerzen“ ist, im Falle ich den Satz gebrauche, ein Zeichen ganz anderer Art, als es für mich im Munde eines Anderen ist; und zwar darum, weil es im Munde eines Anderen für mich so lange sinnlos ist, als ich nicht weiß, welcher Mund es ausgesprochen hat. Das Satzzeichen besteht in diesem Falle nicht im Laut allein, sondern in der Tatsache, daß dieser Mund den Laut hervorbringt. Während im Falle ich es sage, oder denke, das Zeichen der Laut allein ist.

Angenommen, ich hätte stechende Schmerzen im rechten Knie und bei jedem Stich zuckt mein rechtes Bein. Zugleich sehe ich einen anderen Menschen, dessen Bein in gleicher Weise zuckt und der über stechende Schmerzen klagt; und zu gleicher Zeit fängt mein linkes Bein ebenso an zu zucken, obwohl ich im linken Knie keine Schmerzen fühle. Nun sage ich: mein Gegenüber hat offenbar in seinem Knie dieselben Schmerzen, wie ich in meinem rechten Knie. Wie ist es aber mit meinem linken Knie, ist es nicht in genau dem gleichen Fall, wie das Knie des Anderen?

Wenn ich sage „A hat Zahnschmerzen“, so gebrauche ich die Vorstellung des Schmerzgefühls in der selben Weise, wie etwa den Begriff des Fließens, wenn ich vom Fließen des elektrischen Stromes rede.

Ich sammle gleichsam sinnvolle Sätze über Zahnschmerzen, das ist der charakteristische Vorgang einer grammatischen Untersuchung. Ich sammle nicht wahre, sondern sinnvolle Sätze und darum ist diese Betrachtung keine psychologische. (Man möchte sie oft eine Metapsychologie nennen.)

Man könnte sagen: Die Philosophie sammle fortwährend ein Material von Sätzen, ohne sich um ihre Wahr- oder Falschheit zu kümmern; nur im Falle der Logik und Mathematik hat sie es nur mit den „wahren“ Sätzen zu tun.

506 Die Erfahrung des Zahnschmerzgefühls ist nicht die, daß eine Person Ich etwas hat.

In den Schmerzen unterscheide ich eine Intensität, einen Ort, etc., aber keinen Besitzer. Wie wären etwa Schmerzen, die gerade niemand *hat*? Schmerzen, die gerade niemandem gehören?

Die Schmerzen werden als etwas dargestellt, das man wahrnehmen kann, im Sinne, in dem man eine Zündholzschachtel wahrnimmt. – Das Unangenehme sind dann freilich nicht die Schmerzen, sondern nur das Wahrnehmen der Schmerzen.

Wenn ich einen Anderen bedaure, weil er Schmerzen hat, so stelle ich mir wohl die Schmerzen vor, aber ich stelle mir vor, daß *ich* sie habe.

Soll ich mir auch die Schmerzen eines auf dem Tisch liegenden Zahnes denken können, oder die Schmerzen eines Teetopfs? Soll man etwa sagen: es ist nur nicht wahr, daß der Teetopf Schmerzen hat, aber ich kann es mir denken?!

Die beiden Hypothesen, daß die Anderen Schmerzen haben, und die, daß sie keine haben, und sich nur so benehmen wie ich, wenn ich welche habe, müssen ihrem Sinne nach identisch sein, wenn alle *mögliche* Erfahrung, die die eine bestätigt, auch die andere bestätigt. Wenn also keine Entscheidung zwischen beiden durch die Erfahrung denkbar ist.

507 Zu sagen, daß die Anderen keine Schmerzen haben, setzt aber voraus, daß es Sinn hat zu sagen, daß sie Schmerzen haben.

Ich glaube, es ist klar, daß man in demselben Sinne sagt, daß andere Menschen Schmerzen haben, in welchem man sagt, daß ein Stuhl keine hat.

When I use the sentence “I’m in pain” it’s a completely different kind of expression from what it is for me when it comes from someone else’s mouth; and this is because when it is in someone else’s mouth it makes no sense to me, so long as I don’t know which mouth uttered it. In this case, the expression consists not only of the sound, but also in the fact that this mouth is producing the sound. Whereas in the case where I say or think the sentence, the expression is the sound alone.

Let’s assume that I have stabbing pains in my right knee and my right leg is twitching at every stab. At the same time I see someone else who is complaining about stabbing pains, and whose leg is twitching in the same way as mine; and then my left leg begins to twitch in the same way, even though I don’t feel any pain in my left knee. Now I say: Evidently the person across from me has the same pains in his knee as I do in my right knee. But what about my left knee: isn’t it in exactly the same situation as the other person’s knee?

When I say “A has a toothache” I’m using the idea of feeling pain in the same way as I use the concept of flow when I speak of the flow of an electric current.

I’m collecting meaningful propositions about a toothache, as it were; that is the process characteristic of a grammatical investigation. I’m not collecting true propositions, but meaningful ones, and therefore this is not a psychological investigation. (One is often inclined to call it metapsychology.)

One could say: Philosophy is constantly collecting a stock of propositions without worrying about their truth or falsity; only in the cases of logic and mathematics does it have to do solely with “true” propositions.

The experience of feeling a toothache isn’t the experience that a person “I” has something.

With regard to pain I discern an intensity, a location, etc., but no owner.

What would pains be like, for instance, that nobody *has* at the moment, that don’t belong to anybody at the moment?

Pains are represented as something that one can perceive, in the sense in which one perceives a box of matches. – Then, to be sure, the unpleasant thing is not the pains, but only perceiving them.

If I feel sorry for someone else because he has pains, then I do imagine the pains, but I imagine that I’m having them.

Should I also be able to imagine the pain of a tooth lying on the table, or the pain of a teapot? Should one say, for instance: The only thing wrong with saying that a teapot is in pain is that it’s not true, but I can imagine it?!

The two hypotheses, the one that others are in pain, the other that they are not in pain but are only behaving the way I do when I am in pain, must be identical in sense if any *possible* experience that confirms the one also confirms the other. In other words, if it is inconceivable that experience could decide between the two.

But to say that others are not in pain presupposes that it makes sense to say that they are in pain.

I think it is clear that one says that others are in pain in the same sense as one says that a chair is not in pain.

Wie wäre es, wenn ich zwei Körper hätte, d.h. wenn mein Körper aus zwei getrennten Leibern bestünde?

Hier sieht man – glaube ich – wieder, wie das Ich nicht auf derselben Stufe mit den Andern steht, denn wenn die Andern je zwei Körper hätten, so könnte ich es nicht erkennen.

Kann ich mir denn die Erfahrung mit zwei Leibern denken? Die Gesichtserfahrung gewiß nicht.

Das Phänomen des Schmerzgefühls in einem Zahn, welches ich kenne, ist in der Ausdrucksweise der gewöhnlichen Sprache dargestellt durch „*ich habe* in dem und dem Zahn Schmerzen“. Nicht durch einen Ausdruck von der Art „an diesem Ort ist ein Schmerzgefühl“. Das *ganze* Feld dieser Erfahrung wird in dieser Sprache durch Ausdrücke von der Form „ich habe . . .“ beschrieben. Die Sätze von der Form „N hat Zahnschmerzen“ sind für ein ganz anderes Feld reserviert. Wir können daher nicht überrascht sein, wenn in den Sätzen „N hat Zahnschmerzen“ nichts mehr auf jene Art mit der Erfahrung Zusammenhängendes gefunden wird.

Wenn man sagt, die Sinnesdaten seien „privat“,³ niemand anderer könne meine Sinnesdaten sehen, hören, fühlen, und meint damit nicht eine Tatsache unserer Erfahrung, so müßte das ein philosophischer Satz sein; und was gemeint ist, drückt sich darin aus, daß eine Person in die Beschreibung von Sinnesdaten eintritt.

508 Denn, *kann* ein Anderer meine Zahnschmerzen nicht haben, so kann *ich* sie – in diesem Sinne – auch nicht haben.

In dem Sinne, in welchem es nicht erlaubt ist zu sagen, der Andere habe diese Schmerzen, ist es auch nicht erlaubt zu sagen, ich hätte⁴ sie.

Was wesentlich privat ist, oder scheint, hat keinen Besitzer.

Was soll es heißen: er hat *diese* Schmerzen? außer, er hat *solche* Schmerzen: d.h., von solcher Stärke, Art, etc. Aber nur in dem⁵ Sinn kann auch ich „diese Schmerzen“ haben.

Das heißt, die Subjekt-Objekt Form ist darauf nicht anwendbar.

Die Subjekt-Objekt Form bezieht sich auf den Leib und die Dinge um ihn, die auf ihn wirken.

In der nicht-hypothetischen Beschreibung des Gesehenen, Gehörten – diese Wörter bezeichnen hier grammatische Formen – tritt das Ich nicht auf, es ist hier von Subjekt und Objekt nicht die Rede.

Der Solipsismus könnte durch die Tatsache widerlegt werden, daß das Wort „ich“ in der Grammatik keine zentrale Stellung hat, sondern ein Wort ist, wie jedes andre Wort.

Wie im Gesichtsraum, so gibt es in der Sprache kein metaphysisches Subjekt.

509 |Die Schwierigkeit, die uns das Sprechen über den Gesichtsraum ohne Subjekt macht und über „*meine* und *seine* Zahnschmerzen“, ist die, die Sprache einzurenken, daß sie richtig in den Tatsachen sitzt. |

Behaviourism. „Mir scheint, ich bin traurig, ich lasse den Kopf so hängen.“

Warum hat man kein Mitleid, wenn eine Tür ungeölt ist und beim Auf- und Zumachen schreit? Haben wir mit dem Andern, der sich benimmt wie wir, wenn wir Schmerzen haben,

3 (V): „privat“, sei

4 (V): habe

5 (V): dem *eine*

What would it be like if I had two bodies, i.e. if my body consisted of two separate bodies?

Here one sees once again – so I believe – how the “I” is not on the same level with other people, for if others each had two bodies I couldn’t tell it.

Can I imagine what experience would be like with two bodies? Certainly not what visual experience would be like.

In the way we express ourselves in everyday language, the phenomenon of feeling pain in a tooth, with which I am acquainted, is represented by “*I have* a pain in this or that tooth”. And not by an expression of the type “There is a feeling of pain at this location”. In this language the *entire* field of the experience is described by expressions of the form “I have . . .”. Propositions of the form “N has a toothache” are reserved for an entirely different field. So we cannot be surprised if nothing that is connected to experience in the first way is any longer found in the propositions “N has a toothache”.

If we say that sense data are “private”, that nobody else can see, hear, feel my sense data, and if by this we don’t mean a fact that we’ve experienced, then this would have to be a philosophical proposition; and what is meant is expressed by a person entering into the description of sense data.

For if someone else *cannot* have my toothache, then – to that extent – *I* too cannot have it.

In the sense in which it is not permissible to say that someone else has these pains it is also not permissible to say that I have them.

What is essentially private, or seems that way, doesn’t have an owner.

What is this supposed to mean: He has *these* pains? Unless it is supposed to mean that he has *such* pains: i.e. pains of such intensity, kind, etc. But only in that sense can I too have “these pains”.

That means that the subject–object form is not applicable to this.

The subject–object form refers to the body and the things around it that have an effect on it.

In a non-hypothetical description of what has been seen, heard – here these words designate grammatical forms – the “I” does not appear; here there is no talk of subject and object.

Solipsism could be disproved by the fact that the word “I” doesn’t occupy a central position in grammar, but is a word like any other.

As in visual space, there is no metaphysical subject in language.

|The difficulty created for us by talking about visual space without a subject, and about “*my* and *his* toothache”, is one of setting language, as one does a bone, so that it is accurately aligned with the facts. |

Behaviourism. “It seems to me that I’m sad, my head is hanging so low.”

Why doesn’t one feel pity when a door hasn’t been oiled and it screeches as it’s opened and shut? Do we feel pity for someone else who behaves as we do when we’re in pain – feel it

Mitleid – auf philosophische Erwägungen hin, die zu dem Ergebnis geführt haben, daß er leidet, wie wir? Ebensogut können uns die Physiker damit Furcht einflößen, daß sie uns versichern, der Fußboden sei gar nicht kompakt, wie er scheine, sondern bestehe aus losen Partikeln, die regellos herumschwirren. „Aber wir hätten doch mit dem Andern nicht Mitleid, wenn wir wüßten, daß er nur eine Puppe ist, oder seine Schmerzen bloß heuchelt.“ Freilich, – aber wir haben auch ganz bestimmte Kriterien dafür, daß etwas eine Puppe ist, oder daß Einer seine Schmerzen heuchelt und diese Kriterien stehen eben im Gegensatz zu denen, die wir Kriterien dafür nennen, daß etwas keine Puppe (sondern etwa ein Mensch) ist und seine Schmerzen nicht heuchelt (sondern wirklich Schmerzen hat).

Hat es Sinn zu sagen, zwei Menschen hätten denselben Körper? Welches wären die Erfahrungen, die wir mit diesem Satz beschrieben? Daß ich darauf käme, daß das, was ich meine Hand nenne, und bewege, an dem Körper eines Andern sitzt, ist natürlich denkbar, denn ich sehe, während ich jetzt schreibe, die Verbindung meiner Hand mit meinem übrigen Körper nicht. Und ich könnte wohl darauf kommen, daß sich die frühere Verbindung gelöst hat und also auch, daß meine Hand jetzt an dem Arm eines Andern sitzt.

- 510 Von Sinnesdaten in dem Sinne dieses Worts, in dem es undenkbar ist, daß der Andere sie hat, kann man eben aus diesem Grunde auch nicht sagen, daß der Andere sie nicht hat. Und eben darum ist es auch sinnlos zu sagen, daß *ich*, im Gegensatz zum Andern, sie *habe*. – Wenn man sagt „seine Zahnschmerzen kann ich nicht fühlen“, meint man damit, daß man die Zahnschmerzen des Andern bis jetzt nie gefühlt hat? Wie unterscheiden sich *seine* Zahnschmerzen von den *meinen*? Wenn das Wort „Schmerzen“ in den Sätzen „ich habe Schmerzen“ und „er hat Schmerzen“ die gleiche Bedeutung hat, – was heißt es dann zu sagen, daß er nicht dieselben Schmerzen haben kann, wie ich? Wie können sich denn verschiedene Schmerzen voneinander unterscheiden? Durch Stärke, durch den Charakter des Schmerzes (stechend, bohrend, etc.) und durch die Lokalisation im Körper. Wenn nun aber diese Charakteristika bei beiden dieselben sind? – Wenn man aber einwendet, der Unterschied der Schmerzen⁶ sei eben der, daß in einem Falle ich sie habe, im andern Fall er! – dann ist also die besitzende Person eine Charakteristik der Schmerzen selbst. Aber was ist dann mit dem Satz „ich habe Schmerzen“ oder „er hat Schmerzen“ ausgesagt? – Wenn das Wort „Schmerzen“ in beiden Fällen die gleiche Bedeutung hat, dann muß man die Schmerzen der Beiden miteinander vergleichen können; und wenn sie in Stärke etc., etc. miteinander übereinstimmen, so sind sie die gleichen; wie zwei Anzüge die *gleiche* Farbe besitzen, wenn sie in Bezug auf Helligkeit, Sättigung, etc. miteinander übereinstimmen.

- 511 Wenn man fragt „ist es denkbar, daß ein Mensch die Schmerzen des Andern fühlt?“ so schweben einem dabei die Schmerzen (etwa Zahnschmerzen) des Andern gleichsam als ein Körper, ein Volumen, vor im Mund des Andern und die Frage scheint zu fragen, ob wir an diesem Schmerzvolumen teilhaben können. Etwa dadurch, daß sich unser beider Wangen durchdrängen. Aber auch das scheint dann nicht zu genügen und wir müßten uns ganz mit ihm decken.⁷

- 1.) „Ich habe Schmerzen“
 „N hat Schmerzen“
 dagegen 2.) „Ich habe graue Haare“
 „N hat graue Haare“⁸

6 (V): einwendet, ihr Unterschied

8 (O): Haare

7 (V): und wir müßten ganz mit ihm zusammenfallen.

as a result of philosophical deliberations that have led to the conclusion that he is suffering like us? By the same token physicists could frighten us by assuring us that the floor wasn't nearly as firm as it seemed, but consisted of loose particles that were erratically whizzing around. “But we wouldn't feel pity for someone else if we knew that he were only a puppet or were only simulating his pain.” Certainly – but we also have very specific criteria for something being a puppet or for someone simulating pain, and these criteria are in contrast to those we call criteria for something not being a puppet (but, say, a human being) and for someone not simulating his pain (but really being in pain).

Does it make sense to say that two people have the same body? Which experiences would we be describing with this sentence? It's conceivable, of course, that I'd come to believe that what I call my hand, and move, is attached to someone else's body, for as I'm writing now I don't see the connection of my hand to the rest of my body. And I could easily come to believe that the previous connection had come undone, and thus also that my hand is now attached to someone else's arm.

If we define the words “sense data” as something we can't imagine anyone else having, then that makes it impossible to say that someone else doesn't have them. And for just that reason it also makes no sense to say that *I*, as opposed to someone else, *have* them. – If one says “I can't feel his toothache” does one mean that, up until now, one has never felt someone else's toothache? How does *his* toothache differ from *mine*? If the word “pain” has the same meaning in the sentences “I'm in pain” and “He's in pain” – then what does it mean to say that he can't be in the same pain as I? How can various pains differ from each other? With respect to intensity, the nature of the pains (stabbing, piercing, etc.), and their localization within the body. And what if these characteristics are the same for both? – But if it's objected that the difference between the pains is¹ precisely that I'm the one having pain in the one case and he in the other! – then the owner of the pain is a characteristic of the pain itself. But in that case: what has been stated by the proposition “I'm in pain”, or “He's in pain”? – If the word “pain” has the same meaning in both cases, then one has to be able to compare the pains of both people; and if they coincide in intensity etc., etc., then they are the same; just as two suits are the *same* colour if they correspond with respect to brightness, saturation, etc.

If it's asked “Is it conceivable that someone might feel someone else's pain?” then one has a mental image of someone else's pain (say his toothache) as a body, as it were, a mass in the other person's mouth, and the question seems to be asking whether we can share in this mass of pain. Say, by both of our cheeks interpenetrating. But even this doesn't seem to be enough, and we'd have to be completely congruent with him.

- (1) “I'm in pain”
 “N is in pain”

on the other hand (2) “I have grey hair”
 “N has grey hair”

1 (V): that their difference is

Die verschiedenen philosophischen Schwierigkeiten und Konfusionen in Verbindung mit dem ersten Beispiel lassen sich zum größten Teil auf die Verwechslung der Grammatik der Fälle 1) und 2) zurückführen.

Es hat Sinn zu sagen: „ich sehe seine Haare, aber nicht die meinen“, oder „ich sehe meine Hände täglich, aber nicht die seinen“ und dieser Satz ist analog dem: „ich sehe meine Wohnung täglich, aber nicht die seine“. – Dagegen ist es Unsinn: „ich fühle meine Schmerzen, aber nicht die seinen“.

Die Ausdrucksweise unserer Sprache in den beiden Fällen 1) und 2) ist natürlich nicht 512 „falsch“, aber sie ist irreführend. „Eine ⁹herrenlose Wohnung“, „herrenlose Zahnschmerzen“. Es gibt Menschen, die Untersuchungen darüber anstellen, „ob es ungesehene Gesichtsbilder gibt“ und sie glauben, daß das eine Art wissenschaftlicher Untersuchung (über diese Phänomene) ist.

„Wie ein Satz verifiziert wird, – das sagt er“: und nun sieh Dir daraufhin die Sätze an: „Ich habe Schmerzen“, „N hat Schmerzen“.

Wenn nun aber ich der N bin? – Dann haben dennoch die beiden Sätze verschiedenen Sinn.

„Die Sache ist doch ganz einfach: ich spüre freilich seine Schmerzen nicht, aber *er* spürt sie eben (und so sind alle Verhältnisse doch symmetrisch)“. Aber dieser Satz ist eben Unsinn. – Um nun die Asymmetrie der Erfahrung mit Bezug auf mich und den Andern deutlich zum Ausdruck zu bringen, könnte ich eine asymmetrische Ausdrucksweise vorschlagen:

Alte Ausdrucksweise:	Neue Ausdrucksweise:
W. hat Schmerzen.	Es sind Schmerzen vorhanden.
W. hat Schmerzen in seiner linken Hand.	Es sind Schmerzen in der linken Hand des W.
N. hat Schmerzen.	N. benimmt sich wie W., wenn Schmerzen vorhanden sind.
N. heuchelt Schmerzen in seiner Hand.	N. heuchelt das Benehmen des W., wenn Schmerzen in seiner Hand sind.

Ich bedauere N., weil er Schmerzen hat. Ich bedauere N., weil er sich benimmt, wie etc.

Da wir für jeden sinnvollen Ausdruck der alten Ausdrucksweise einen der neuen setzen und für *verschiedene* alte,¹⁰ *verschiedene* neue, so muß, was Eindeutigkeit und Verständlichkeit anlangt, die neue Ausdrucksweise der alten gleichwertig sein. – Aber könnte man denn nicht eine solche asymmetrische Ausdrucksweise ebensogut für Sätze der Art „ich habe graue Haare“, „N. hat graue Haare“ konstruieren? Nein. Man muß nämlich verstehen, daß der Name „W.“ in den Sätzen der rechten Seite sinnvoll durch andere Namen ersetzt werden können muß.¹¹ Und ist das nicht der Fall, dann braucht weder „W.“ noch ein anderer Name 513 in diesen Sätzen vorzukommen¹². Ersetzt man nämlich „W.“ durch den Namen eines andern Menschen, so wird etwa gesagt, daß ich in der Hand eines anderen Körpers als des meinigen Schmerzen empfinde. Es wäre z.B. denkbar, daß ich mit einem Andern den Körper wechsle;¹³ etwa aufwache, meinen alten Körper mir gegenüber auf einem Sessel sitzen sehe, und mich im Spiegel sehend fände, daß ich das Gesicht und den Körper meines Freundes angenommen habe. Ich betrachte nun den Personennamen als Namen eines Körpers. Und es hat nun Sinn zu sagen: „ich habe im Körper des N (oder im Körper N) Zahnschmerzen (in der asymmetrischen Ausdrucksweise: „in einem Zahn des N sind Schmerzen“); aber es

9 (M): 71

10 (V): alte, **verschied**

11 (M): 71

12 (V): vorkommen

13 (V): Andern Körper wechsle;

The various philosophical difficulties and confusions connected with the first example can be attributed, for the most part, to confusing the grammar of cases (1) and (2).

It makes sense to say: “I see his hair, but not mine”, or “Every day I see my hands, but not his”, and this sentence is analogous to: “Every day I see my apartment, but not his”. – On the other hand this is nonsense: “I feel my pain, but not his”.

Of course, the way of expressing this in our language in cases (1) and (2) isn’t “wrong”, but it is misleading. “An apartment ²without an owner”, “a toothache without an owner”. There are people who conduct investigations into “whether unseen visual images exist”, and they believe that doing this is a kind of scholarly investigation (into these phenomena).

“How a proposition is verified – that’s what it says”: and now, with this in mind, look at the propositions: “I am in pain”, “N is in pain”.

But now what if I am N? – Then the two propositions still have different senses.

“Really the matter is quite simple: to be sure, I don’t feel his pain, but *he* does (and so, after all, all the relationships are symmetrical).” But this proposition is simply nonsense. – In order to express clearly the asymmetry of experience as between myself and someone else, I could suggest an asymmetrical form of expression:

Old form of expression:	New form of expression:
W is in pain.	There is pain present.
W has a pain in his left hand.	There is a pain in W’s left hand.
N is in pain.	N is behaving like W when there is pain present.
N is simulating pain in his hand	N is simulating W’s behaviour when there is pain in his hand.
I feel sorry for N because he is in pain.	I feel sorry for N because he behaves like, etc.

Since we’re writing down an expression of the new form for each meaningful expression of the old, and *different* new ones for *different* old ones, the new form of expression has to be equivalent to the old in terms of clearness and the absence of ambiguity. – But couldn’t we construct such an asymmetrical form of expression just as well for sentences of the kind “I have grey hair”, “N has grey hair”? No. For it must be understood that the name “W” in the sentences on the right must be meaningfully replaceable by other names. ³And if this is not the case, then neither “W” nor another name need appear in these sentences. For if one replaces “W” by someone else’s name, then what is being said, for instance, is that I feel pain in the hand belonging to a body other than my own. It’s conceivable, for instance, that I might exchange bodies with someone else⁴; that say I wake up, see my old body sitting in a chair across from me and find, upon looking into the mirror, that I have assumed the face and body of my friend. I look at a person’s name as the name of a body. And then it makes sense to say: “I have a toothache in N’s body (or in the body N)” (in the asymmetrical form of expression: “There is an ache in one of N’s teeth”); but it

2 (M): 71

3 (M): 71

4 (V): with others

hat keinen Sinn, zu sagen „ich habe auf dem Kopf des N graue Haare“, außer, das soll heißen: „N hat graue Haare“.

Aber ist (denn) die vorgeschlagene asymmetrische Ausdrucksweise richtig? Warum sage ich „N benimmt sich wie W, wenn er . . .“? Wodurch ist denn W charakterisiert? Doch durch die Formen etc. seines Körpers und durch dessen kontinuierliche Existenz im Raum. Sind aber diese Dinge für die Erfahrung der Schmerzen wesentlich? Könnte ich mir nicht folgende Erfahrung denken: ich wache mit Schmerzen in der linken Hand auf und finde, daß sie ihre Gestalt geändert hat und jetzt so aussieht, wie die Hand meines Freundes, während er meine Hand erhalten hat. Und worin besteht die Kontinuität meiner Existenz im Raum? Wenn mir jemand Verlässlicher erzählte, er sei, während ich geschlafen habe, bei mir gesessen, plötzlich sei mein Körper verschwunden und sei plötzlich wieder erschienen – ist es unmöglich das zu glauben? – Und worin besteht etwa die Kontinuität meines Gedächtnisses? In welcher Zeit ist es kontinuierlich? Oder besteht die Kontinuität darin, daß im Gedächtnis keine Lücke ist? Wie im Gesichtsfeld keine ist. (Denn überlege nur, wie wir den blinden Fleck merken!) Und was hätte diese Kontinuität mit der zu tun, die für den Gebrauch des Personennamens
 514 W. ¹⁴wesentlich ist?¹⁵ Die Erfahrung der Schmerzen läßt sich in ganz anderer Umgebung als der von uns gewohnten denken. (Denken wir doch nur, daß man tatsächlich Schmerzen in der Hand haben kann, obwohl es diese im physikalischen Sinn gar nicht mehr gibt, weil sie einem amputiert worden ist.) In diesem Sinne könnte man Zahnschmerzen ohne Zahn, Kopfschmerzen ohne Kopf etc. haben. Wir machen eben hier einfach eine Unterscheidung, wie die zwischen Gesichtsraum und physikalischem Raum, oder Gedächtniszeit und physikalischer Zeit. – Danach nun ist es unrichtig, die Ausdrucksweise einzuführen „N benimmt sich wie W, wenn . . .“. Man könnte vielleicht sagen „N benimmt sich, wie der Mensch in dessen Hand Schmerzen sind“. Warum sollte man aber überhaupt die Erfahrung der Schmerzen zur Beschreibung des bewußten Benehmens heranziehen? – Wir wollen doch einfach zwei verschiedene Erfahrungsgebiete trennen; wie wenn wir Tasterfahrung und Gesichtserfahrung an einem Körper trennen. Und verschiedener kann nichts sein, als die Schmerzerfahrung und die Erfahrung, einen menschlichen Körper sich winden zu sehen,¹⁶ Laute ausstoßen zu hören, etc. Und zwar besteht hier kein Unterschied zwischen meinem Körper und dem des Andern, denn es gibt auch die Erfahrung, die Bewegungen des eigenen Körpers zu sehen und die von ihm ausgestoßenen Laute zu hören.

Denken wir uns, unser Körper würde aus unserem Gesichtsfeld entfernt, etwa, indem man ihn gänzlich durchsichtig machte; er behielte aber die Fähigkeit, in einem geeigneten Spiegel in der uns gewohnten Weise zu erscheinen, so daß wir etwa die sichtbaren Äußerungen unserer Zahnschmerzen wesentlich wie die eines fremden Körpers wahrnehmen. Dies ergäbe auch eine ganz andere Koordination zwischen sehendem Auge und Gesichtsraum, als die uns selbstverständlich erscheinende alltägliche. (Denke an das Zeichnen eines Vierecks mit seinen Diagonalen im Spiegel.) Wenn wir uns aber so die Möglichkeit denken können, daß wir unsern sichtbaren Körper nur als Bild in einem Spiegel
 515 kennen, so ist es nun auch denkbar, ¹⁷daß dieser Spiegel wegfiel und wir ihn nicht anders sähen, als irgend einen andern menschlichen Körper. – Wodurch wäre er dann aber als *mein* Körper charakterisiert? Nun, nur dadurch, daß ich z.B. die Berührung dieses Körpers fühlen würde, nicht aber die eines andern, etc. So ist es auch nicht mehr wesentlich, daß der Mund unterhalb des sehenden Auges *meine* Worte spricht. (Und das ist von großer Wichtigkeit.) Auch wenn ich *meinen* Körper sehe, wie ich ihn jetzt sehe, d.h. von seinen Augen aus, ist

14 (M): 71

15 (V): W. von Bedeutung ist?

16 (V): sich winden sehen,

17 (M): 71

makes no sense to say “I have grey hair on N’s head”, unless that is supposed to mean: “N has grey hair”.

But is the asymmetrical form of expression I’ve suggested (really) correct? Why do I say “N is behaving like W when he . . .”? How is W characterized? Certainly by the shapes, etc. of his body, and by its continuous existence in space. But are these things essential for the experience of pain? Couldn’t I imagine the following experience: I wake up with a pain in my left hand and find that it has changed shape and now looks like my friend’s hand, whereas he has got my hand. And what does the continuity of my existence in space consist in? If some reliable person were to tell me that he had been sitting next to me while I was sleeping, and that suddenly my body had disappeared and then suddenly reappeared – is it impossible to believe that? – And what does, say, the continuity of my memory consist in? In which time is it continuous? Or does the continuity consist in there not being any gap in memory? Just as there is none in the visual field. (For just think about how we notice our blind spot!) And what would this continuity have to do with the one that is ⁵essential to⁶ the use of the proper name W? The experience of pain is imaginable in a completely different context than the one we’re used to. (Let’s just remember that one can actually have pain in one’s hand even though, in a physical sense, it doesn’t exist anymore, because it has been amputated.) To that extent one could have a toothache without a tooth, a headache without a head, etc. We’re simply making a distinction here like the one between visual space and physical space, or memory-time and physical time. – Now according to this it’s incorrect to introduce the form of expression “N is behaving like W, when . . .”. Possibly one could say “N is behaving like the person in whose hand there is pain”. But why should one enlist the experience of pain to describe conscious behaviour at all? – After all, we simply want to separate two different areas of experience; as when we separate tactile and visual experience in a body. And nothing can be more different than the experience of pain and the experience of seeing a human body writhing, of hearing it utter sounds, etc. And, what’s more, there’s no difference here between my body and someone else’s, for there’s also the experience of seeing the movements of one’s own body and of hearing the sounds uttered by it.

Let’s imagine that our body were removed from our field of vision, say by someone making it completely diaphanous; but suppose it retained the ability to appear to us in the usual way in an appropriate mirror, so that we would perceive, say, the visible manifestations of our toothache essentially like those of a different body. This would also result in a completely different coordination between the seeing eye and visual space than the everyday one that seems to us a matter of course. (Think of drawing a quadrangle, with its diagonals, in the mirror.) But if in this way we can imagine the possibility of recognizing our visible body only as an image in a mirror, then it is also imaginable ⁷that this mirror might be omitted and that we wouldn’t see our body differently from any other human body. – But what would then characterize it as *my* body? Well, only the fact that I would, for instance, feel this body being touched, but not another one, etc. So it’s no longer essential that the mouth below the seeing eye speaks *my* words. (And that is of great importance.) Even when I see *my* body, as I now see it, i.e. through its eyes, it is imaginable that I might switch bodies with others.

5 (M): 71

7 (M): 71

6 (V): is important for

es denkbar, daß ich¹⁸ mit Andern den Körper tausche. Die Erfahrung bestünde einfach in dem, was man als eine sprunghafte Änderung meines Körpers und seiner Umgebung beschreiben würde. „D Ich würde einmal die Körper A, B, C, D¹⁹ von E aus, und E von den Augen F²⁰ dieses Körpers sehen, und plötzlich etwa C, D, E, A von B aus und B aus A²¹ B²² dessen Augen; etc. Noch einfacher aber wird die Sache, wenn ich alle Körper – meinen, sowie die fremden – überhaupt nicht aus Augen sehe, und sie also, was ihre visuelle Erscheinung betrifft, alle auf gleicher Stufe stehen. Dann ist es klar, was es heißt, daß ich im Zahn des Andern Schmerzen haben kann; – wenn ich dann überhaupt noch bei der Bezeichnung bleiben will, die einen Körper „*meinen*“ nennt und also einen anderen den „eines Andern“. Denn es ist nun vielleicht praktischer, die Körper einfach²⁰ mit Eigennamen zu bezeichnen. – Es gibt also jetzt eine Erfahrung:²¹ die, der Schmerzen in einem Zahn eines der existierenden menschlichen Körper;²² das ist nicht die, die ich in der gewöhnlichen Ausdrucksweise mit den Worten „A hat Zahnschmerzen“ beschrieb, sondern mit den Worten „ich habe in einem Zahn des A Schmerzen“. Und es gibt die andere Erfahrung: einen Körper, sei es meiner oder ein anderer, sich winden zu sehen. Denn, vergessen wir nicht: Die Schmerzen haben zwar einen Ort im Raum, sofern man z.B. sagen kann, sie wandern, oder seien an zwei Orten zugleich, etc.: aber ihr Raum ist nicht der visuelle oder physikalische. – Und nun haben wir zwar eine neue Ausdrucksweise, sie ist aber nicht mehr asymmetrisch. Sie bevorzugt nicht *einen* Körper, einen Menschen zum Nachteil des andern, ist also *nicht* solipsistisch. – So ist alle Erfahrung²³ ohne Ansehen der Person verteilt. *Aber wir teilen anders*. Es werden die Dinge in unsrer Betrachtungsweise anders zusammengefaßt. Wie wenn man einmal die Zeit zum Raum rechnet und einmal nicht, oder wie wenn man einen Wald als Holzblock mit Löchern ansähe. Oder die Bahn des Mondes um²⁴ die Sonne einmal als Kreisbahn um die Erde, die sich verschiebt, – ein andermal als Wellenlinie, die um die Sonne läuft. (Wäre die Erde etwa nicht sichtbar, so könnte es eine merkwürdige neue Betrachtungsweise sein, die Wellenbewegung des Mondes um die Sonne als Kreisbahn um ein kreisendes Zentrum²⁵ aufzufassen.) Man könnte auf diese Weise gewisse Vorurteile zerstören, die auf die besondere uns geläufige Betrachtungsart aufgebaut wären. – Sehr klar wird der Charakter der anderen Betrachtungsweise, wenn man an die analoge Veränderung²⁶ der Grenzen durch die Einführung des Begriffs der Gedächtniszeit denkt. Es ist ganz ähnlich der veränderten Betrachtung der Mondbewegung. Eine Grenze, die früher mit anderen in der Zeichnung *zusammenlief*, wird plötzlich stark ausgezogen und hervorgehoben. –

18 (V): daß ich ~~mich~~
 19 (F): MS 114, S. 26r.
 20 (V): nur
 21 (V): Erfahrung,
 22 (V): Körpers;

23 (V): ist alles
 24 (O): in
 25 (V): um einen kreisenden Körper
 26 (V): Verschiebung

The experience would simply consist in what one would describe as a sudden change of my body and its surroundings. I would start out seeing the bodies A, B, C, D⁸ from E, and E through the eyes of E's body, and then suddenly I would see, say C, D, E, A from B and B through B's eyes; etc. But the matter gets even simpler if I see all bodies – my own as well as those of others – not through eyes at all, and if they are thus all situated on the same level, so far as their visual appearance is concerned. Then it's clear what it means for me to be able to have an ache in someone else's tooth; – if, in that case, I even want to stick to a designation that calls one body “*mine*”, and a different one “someone else's”. Because now it might be more practical to designate the bodies simply⁹ with proper names. – So now there is an experience: that of a pain in a tooth of one of the existing human bodies; it isn't the one that, using the usual form of expression, I would describe with the words “A has a toothache”, but with the words “I have an ache in one of A's teeth”. And there is the other experience: of seeing a body writhing, be it mine or someone else's. For let's not forget: it is true that pain has a location in space, in so far as one can say for instance that it travels or is situated in two places at the same time, etc.: but its space isn't visual or physical space. – And now, to be sure, we do have a new form of expression, but it is no longer asymmetrical. It doesn't give preference to *one* body, one person to the disadvantage of another, and therefore it's *not* solipsistic. – In this way all experience¹⁰ is distributed without respect to persons. *But we divide differently.* Things are combined differently in our way of looking at things. As if one considers time as belonging to space at one time, and at another as not, or as if one were to view a forest as a block of wood with holes in it. Or as if one saw the orbit of the moon around the sun now as a shifting circular orbit around the earth, now as a wavy line that runs around the sun. (If, say, the earth were invisible, it could be a strange new way of looking at things to understand the wave-motion of the moon around the sun as a circular orbit around a rotating centre.)¹¹ In this way, one could destroy certain prejudices that are based on our particular way of looking at things that we are used to. – What is characteristic of looking at things in this other way becomes quite clear if one thinks about the analogous change¹² of boundaries that results from the introduction of the concept of memory-time. This is quite similar to the change in view about the motion of the moon. A boundary in a drawing that previously converged with others is suddenly drawn in bold and emphasized. –

8 (F): MS 114, p. 26r.

9 (V): only

10 (V): way everything

11 (V): a body.)

12 (V): shift

Gedächtniszeit.

517

„Ist die Zeit, in der die Erlebnisse des Gesichtsraums vor sich gehen, ohne Tonerlebnisse denkbar? Es scheint, ja. Und doch, wie seltsam, daß etwas eine Form sollte haben können, die auch ohne eben *diesen* Inhalt denkbar wäre. Oder lernt der, dem das Gehör geschenkt würde, damit auch eine neue Zeit kennen?“

Die hergebrachten Fragen taugen zur logischen Untersuchung der Phänomene nicht. Diese schaffen sich ihre eigenen Fragen, oder vielmehr, geben ihre eigenen Antworten.

Die Zeit ist ja nicht ein Zeitraum, sondern eine Ordnung.

Denn „die Zeit“ hat eine andere Bedeutung, wenn wir das Gedächtnis als die Quelle der Zeit auffassen und wenn wir es als ein aufbewahrtes Bild des vergangenen Ereignisses auffassen.

518 Wenn wir das Gedächtnis als ein Bild auffassen, dann ist es ein Bild eines physikalischen Ereignisses. Das Bild verblaßt und ich merke sein Verblassen, wenn ich es mit andern Zeugnissen des Vergangenen vergleiche. Hier ist das Gedächtnis nicht die Quelle der Zeit, sondern mehr oder weniger gute Aufbewahrerin dessen, was „wirklich“ gewesen ist, und dieses war eben etwas, wovon wir auch andere Kunde haben können, ein physikalisches Ereignis. – Ganz anders ist es, wenn wir nun das Gedächtnis als Quelle der Zeit betrachten. Es ist hier kein Bild und kann auch nicht verblassen – in dem Sinne, wie ein Bild verblaßt, sodaß es seinen Gegenstand immer weniger getreu darstellt. Beide Ausdrucksweisen sind in Ordnung und gleichberechtigt, aber nicht miteinander vermischbar. Es ist ja klar, daß die Ausdrucksweise vom Gedächtnis als einem Bild, nur ein Bild ist; genau so, wie die Ausdrucksweise, die die Vorstellungen „Bilder der Gegenstände in unserem Geiste“ (oder dergleichen) nennt. Was ein Bild ist, das wissen wir, aber die Vorstellungen sind doch gar keine Bilder, denn sonst kann ich das Bild sehen und den Gegenstand, dessen Bild es ist, aber hier ist es offenbar ganz anders. Wir haben eben ein Gleichnis gebraucht und nun tyrannisiert uns das Gleichnis. In der Sprache dieses Gleichnisses kann ich mich nicht außerhalb des Gleichnisses bewegen. Es muß zu Unsinn führen, wenn man mit der Sprache dieses Gleichnisses¹ über das Gedächtnis als Quelle unserer Erkenntnis, als Verifikation unserer Sätze, reden will. Man kann von gegenwärtigen, vergangenen und zukünftigen Ereignissen in der physikalischen Welt reden, aber nicht von gegenwärtigen, vergangenen und zukünftigen² Vorstellungen, wenn man als Vorstellung nicht doch wieder eine Art physikalischen Gegenstand (etwa jetzt ein physikalisches Bild, statt des Körpers) bezeichnet; sondern gerade eben das gegenwärtige. Man kann also den Zeitbegriff, d.h. die Regeln der Syntax, wie sie von den physikalischen Substantiven gelten, nicht in der Welt der Vorstellung anwenden, d.h. nicht dort, wo man sich einer radikal anderen Ausdrucksweise bedient.

1 (O): Gleichnis

2 (V): zukünftigen ~~Ereignissen in~~

Memory-Time.

“Is the time in which the experiences of visual space take place conceivable without the experiences of sound? It seems that it is. And yet, how strange that something should be capable of having a form that’s also conceivable without *this* very content. Or does a person who, say, is given the gift of hearing come to know a new time as a result?”

The traditional questions are of no use for the logical investigation of the phenomena. The latter create their own questions, or rather, supply their own answers.

After all, time is not a temporal space, but an ordering.

For “time” has one meaning when we understand memory as the source of time and another when we understand it as a preserved image of a past event.

If we understand memory as a picture, then it is a picture of a physical event. The picture fades and I notice its fading when I compare it with other evidence of the past. Here memory is not the source of time, but a good or not so good preserver of what “really” happened, and this is simply something – a physical event – about which we can have heard from other sources as well. – Now it’s completely different if we look at memory as the source of time. In this case it isn’t a picture and neither can it fade – in the sense that a picture fades so that it represents its object less and less accurately. Both forms of expression are in order and are equally legitimate, but they can’t be intermixed with each other. It’s clear, of course, that the form of expression of memory as a picture is only a picture; just like the form of expression that calls mental images “pictures of objects in our mind” (or some such thing). We know what a picture is, but mental images aren’t pictures at all, because I can see a picture and the object of which it is a picture; but in the other case things are obviously quite different. It’s just that we’ve used a simile, and now the simile is tyrannizing us. In the language of this simile, I cannot move outside the simile. Wanting to use the language of this simile to speak of memory as the source of our cognition, as the verification of our propositions, has to lead to nonsense. One can talk about present, past and future events in the physical world, but not about present, past and future mental images¹ – that is, so long as one doesn’t revert to calling a kind of physical object (say, a physical picture instead of a body) a mental image, but calls just the present image by that name. So one can’t apply the concept of time, i.e. the syntactical rules as they apply to physical nouns, to the world of the mental image; that is, one can’t apply it where one uses a radically different kind of expression.

1 (V): future ~~events in~~

519 Kann ich sagen, das Drama hat seine eigene Zeit, die nicht ein Abschnitt der historischen Zeit ist. D.h., ich kann in ihm von früher und später reden, aber die Frage hat *keinen Sinn*, ob die Ereignisse, etwa, vor oder nach Cäsars Tod geschehen sind.

Das Gleichnis vom Fließen³ der Zeit ist natürlich irreführend und muß uns, wenn wir daran festhalten, in Verlegenheiten führen.⁴

Was Eddington⁵ über „die Richtung der Zeit“ und den Entropiesatz⁶ sagt, läuft darauf hinaus, daß die Zeit ihre Richtung umkehren würde, wenn die Menschen eines Tages anfangen rückwärts zu gehen. Wenn man will, kann man das freilich so nennen: man muß dann nur darüber klar sein, daß man damit nichts anderes sagt, als daß die Menschen ihre Gehrichtung geändert haben.

Die meisten Rätsel, die uns das Wesen der Zeit aufzugeben scheint, kann man durch die Betrachtung einer Analogie verstehen, die in einer oder der andern Form den verschiedenen falschen Auffassungen zu Grunde liegt: Es ist der Vorgang, im Projektionsapparat, durch welchen der Film läuft einerseits, und auf der Leinwand andererseits.

Wenn man sagt, die Zukunft sei bereits präformiert, so heißt das offenbar: die Bilder des Filmstreifens, welche den zukünftigen Vorgängen auf der Leinwand entsprechen, sind bereits vorhanden. Aber für das, was ich in einer Stunde tun werde, gibt es ja keine solchen Bilder, und wenn es sie gibt, so dürfen wir wieder nicht die Bilder auf dem Zukunftsteil des Filmstreifens mit den zukünftigen Ereignissen auf der Leinwand verwechseln. Nur von jenen können wir sagen, daß sie präformiert sind, d.h. jetzt schon existieren. Und bedenken wir, daß der Zusammenhang der Ereignisse auf der Leinwand mit dem, was die Filmbilder zeigen
520 ein empirischer ist; wir können aus ihnen kein Ereignis auf der Leinwand prophezeien, sondern nur hypothetisch vorhersagen. Auch – und hier liegt eine andere Quelle des Mißverständnisses – können wir nicht sagen „es ist jetzt der Fall, daß dieses Ereignis in einer Stunde eintreten wird“ oder „es ist um 5 Uhr der Fall, daß ich um 7 Uhr spazierengehen werde.“

»Wenn die Erinnerung kein Sehen in die Vergangenheit ist, wie wissen wir dann überhaupt, daß sie mit Beziehung auf die Vergangenheit zu deuten ist? Wir könnten uns dann einer Begebenheit erinnern und zweifeln, ob wir in unserm Erinnerungsbild ein Bild der Vergangenheit oder der Zukunft haben.

Ich kann natürlich sagen: ich sehe nicht die Vergangenheit, sondern nur ein Bild der Vergangenheit. Aber woher *weiß* ich, daß es ein Bild der *Vergangenheit* ist, wenn dies nicht im Wesen des Erinnerungsbildes liegt. Haben wir etwa durch die Erfahrung gelernt, diese Bilder als Bilder der Vergangenheit zu deuten? Aber was hieße hier überhaupt „Vergangenheit“?»

Die Daten unseres Gedächtnisses sind geordnet; diese Ordnung nennen wir Gedächtniszeit, im Gegensatz zur physikalischen Zeit, der Ordnung der Ereignisse in der physikalischen Welt. Gegen den Ausdruck „Sehen in die Vergangenheit“ sträubt sich unser Gefühl mit Recht; denn es ruft das Bild hervor,⁷ daß Einer einen Vorgang in der physikalischen Welt sieht, der jetzt gar nicht geschieht, sondern schon vorüber ist. Und die Vorgänge, welche wir „Vorgänge in der physikalischen Welt“, und die, welche wir „Vorgänge in unserer Erinnerung“ nennen, sind einander wirklich nur zugeordnet. Denn wir reden von einem

3 (V): Fluß

4 (V): landen.

5 (O): Edington

6 (O): Entropiesatz

7 (V): es gibt uns ein Bild davon,

Can I say that drama has its own time that is not a section of historical time? That is to say, within a drama I can speak about before and after, but the question whether the events took place, say, before or after Caesar's death makes *no sense*.

Of course the simile of time flowing² is misleading, and it necessarily leads us into quandaries³ if we hold on to it.

What Eddington says about "the direction of time" and the principle of entropy amounts to maintaining that time would reverse its direction if one day people started walking backwards. If you want to, you can certainly state it this way; but then you have to realize that in saying this you're saying only that people have changed the direction in which they walk.

One can understand most of the riddles that the nature of time seems to present us with by examining an analogy that, in one form or another, underlies the various false conceptions: on the one hand it's what goes on within the projector through which the film is running, on the other it's what goes on on the screen.

If one says that the future is already pre-formed, then this obviously means: the pictures on the strip of film that correspond to the future events on the screen already exist. But there just aren't any such pictures for what I'll be doing in an hour, and if there are, then once again we mustn't confuse the pictures on the future part of the film strip with the future events on the screen. Only of the former can we say that they are pre-formed, i.e. that they already exist now. And let's bear in mind that the connection between the events on the screen and what the film images show is an empirical one; we can't prophesy any event on the screen from those images, but can only make hypothetical predictions. Neither can we say – and here is another source of misunderstanding – "It's now the case that this event will occur in an hour" or "It's the case at 5 o'clock that I'll take a walk at 7 o'clock."

»If memory isn't a looking into the past, then how do we know in the first place that it is to be interpreted with reference to the past? If we didn't know that, we might remember an event and be in doubt whether in our memory image we have an image of the past or of the future.

Of course I can say: I don't see the past, but only an image of the past. But how do I *know* that it is an image of the *past* if this isn't contained in the essence of the memory-image? Have we perhaps learned from experience to interpret these images as images of the past? But what would "past" mean here, anyway?«

The data of our memory are ordered; we call this order memory-time, as opposed to physical time, the order of events in the physical world. For good reason, we bristle at the expression "looking into the past"; for it evokes⁴ the image of someone seeing an event in the physical world that is not taking place now at all, but is already past. And the events that we call "events in the physical world" and those that we call "events in our memory" are really only attributed to each other. For we speak about remembering something

2 (V): of the flow of time

3 (V): necessarily lands us in quandaries

4 (V): it gives us

521 Fehlerinnern und das Gedächtnis ist nur *eines* von den Kriterien dafür, daß etwas in der physikalischen Welt geschehen ist.

Die Erinnerungszeit unterscheidet sich unter anderem dadurch von der physikalischen, daß sie ein Halbstrahl ist, dessen Anfangspunkt⁸ die Gegenwart ist. Der Unterschied zwischen Erinnerungszeit und physikalischer Zeit ist natürlich ein logischer. D.h.: die beiden Ordnungen könnten sehr wohl mit ganz verschiedenen Namen bezeichnet werden und man nennt sie nur beide „Zeit“, weil eine gewisse grammatische Verwandtschaft besteht, ganz wie zwischen Kardinal- und Rationalzahlen; Gesichtsraum, Tastraum und physikalischem Raum; Farbtönen und Klangfarben, etc., etc.

Gedächtniszeit. Sie ist (wie der Gesichtsraum) nicht ein Teil der großen Zeit, sondern die spezifische Ordnung der Ereignisse oder Situationen in der Erinnerung.⁹ In dieser Zeit gibt es z.B. keine Zukunft. Gesichtsraum¹⁰ und physikalischer Raum, Gedächtniszeit und physikalische Zeit, verhalten sich zueinander nicht wie ein Stück der Kardinalzahlenreihe zum Gesetz dieser Reihe („der¹¹ ganzen Zahlenreihe“), sondern, wie das System der Kardinalzahlen zu dem, der rationalen Zahlen. Und dieses Verhältnis erklärt auch den Sinn der Meinung, daß der eine Raum den andern einschließt, enthält.

Messung des Raumes und des räumlichen Gegenstandes. Das Seltsame am leeren Raum und an der leeren Zeit. Die Zeit (und der Raum) ein ätherischer Stoff. Von Substantiven verleitet, glauben wir an eine Substanz.¹² Ja, wenn wir der Sprache die Zügel überlassen und nicht dem Leben, dann entstehen die philosophischen Probleme.

522 „Was ist die Zeit?“ – schon in der Frage liegt der Irrtum: als wäre die Frage: woraus, aus welchem Stoff, ist die Zeit gemacht. Wie man etwa sagt, woraus ist dieses feine Kleid gemacht.

Die alles gleichmachende Gewalt der Sprache, die sich am krassesten im Wörterbuch zeigt, und die es möglich macht, daß die *Zeit* personifiziert werden konnte; was nicht weniger merkwürdig ist, als es wäre, wenn wir Gottheiten der logischen Konstanten hätten.

8 (V): Endpunkt

9 (V): im Gedächtnis.

10 (O): Zukunft, Gesichtsraum

11 (V): „zur

12 (V): verleitet, nehmen wir eine Substanz an.

incorrectly, and memory is only *one* of the criteria for something having happened in the physical world.

Among other things, memory-time is distinguished from physical time by being a ray, the origin⁵ of which is the present. Of course, the difference between memory-time and physical time is a logical difference. That is, the two orders could perfectly well be called by completely different names, and one only calls both of them “time” because there’s a certain grammatical relationship, just as between cardinal and rational numbers; as between visual space, tactile space and physical space; as between shades of colour and tone colours, etc., etc.

Memory-time. It (like visual space) is not a part of time in the larger sense, but is the specific order of events or situations in memory. In this time there is no future, for instance; visual and physical space, memory-time and physical time are not related to each other as a section of the series of cardinal numbers is to the law of this series (“of⁶ the entire number-series”), but rather as the system of cardinal numbers is to that of the rational numbers. And this relationship also makes sense of the idea that the one space encloses, contains, the other one.

Measurement of space and an object in space. The strangeness of empty space and empty time. Time (and space) an ethereal stuff. Seduced by substantives, we believe in⁷ Substance. Indeed, when we hand over the reins to language and not to life, that’s when the philosophical problems arise.

“What is time?” – the error is already contained in the question, as if the question were: of what, of what material, is time made? As one might say – of what is this fine dress made?

The all-levelling power of language that appears in its crassest form in the dictionary, and that makes it possible for *time* to be personified; which is no less remarkable than if we had deities for the logical constants.

5 (V): the end-point

7 (V): we assume

6 (V): (“to

„Hier“ und „Jetzt“.

In gewissem Sinne ist die Bedeutung der Wörter „hier“, „jetzt“ (etc.) die einzige, die ich nicht von vornherein festlegen kann. Aber das ist natürlich irreführend ausgedrückt: Die Bedeutung *ist* festzulegen und festgelegt, wenn die Regeln bezüglich dieser Worte festgelegt sind, und das kann geschehen, ehe sie¹ in einem bestimmten Fall angewandt werden; denn wozu auch sonst *ein* Wort in verschiedenen Fällen gebrauchen.

Die Wörter „hier“, „jetzt“, etc. bezeichnen den Ursprung² eines Koordinatensystems: Wie der Buchstabe „O“, aber sie stehen nicht für Beschreibungen der Lage des Punktes O im Verhältnis zu räumlichen Gegenständen.³ Sie stehen nicht für die Beschreibung einer räumlichen Situation.

Unterschied zwischen Sage und Märchen. Märchen⁴ (und andere Dichtungen) vom Jetzt und Hier abgeschnitten.

524 Es ist aber ein wichtiger Satz in der Grammatik des Wortes „hier“, daß es keinen Sinn hat, „hier“ zu schreiben, wo eine Ortsangabe stehen soll; daß ich also auf einen Gegenstand kein Täfelchen befestigen soll, mit der Aufschrift „Dieser Gegenstand ist immer nur hier zu benützen“.

Ich kann natürlich in Bezug auf die Wörter „jetzt“ und „hier“ etc. nur tun, was ich sonst tue, nämlich ihren Gebrauch beschreiben. Aber⁵ diese Beschreibung muß allgemein sein, d.h. im Vorhinein, *vor* jedem Gebrauch.

Hier und Jetzt sind geometrische Begriffe, wie etwa der Mittelpunkt meines Gesichtsfeldes.

Hier und Jetzt haben nicht eine größere Multiplizität, als sie zu haben scheinen. Das anzunehmen ist die große Gefahr. Ersetze sie, durch welchen Ausdruck Du willst, immer ist es nur *ein* Wort – und daher eins so gut wie das andere.

Das, was „particular“ ist, ist das Ereignis. Das Ereignis, das durch die Worte beschrieben wird, „heute hat es geregnet“ und am nächsten Tag durch „gestern hat es geregnet“.

Was ist denn die „gegenwärtige Situation“? Nun, daß das und das der Fall ist. *Nicht*: „daß das und das *jetzt* der Fall ist“.

„Jetzt“ ist ein Wort. Wozu brauche ich dieses Wort? „Jetzt“ – im Gegensatz wozu? – Im Gegensatz zu „in einer Stunde“, „vor 5 Minuten“, etc. etc.

1 (V): ~~die~~
 2 (V): Anfangspunkt
 3 (V): aber sie beschreiben nicht seine Lage gegenüber den Gegenständen im Raum.

4 (O): Märchen, Märchen
 5 (V): Und

“Here” and “Now”.

In a certain sense the meaning of the words “here”, “now” (etc.) is the only one that I can’t specify in advance. But of course that’s putting it in a misleading way: The meaning *can* be specified and is specified when the rules for these words have been specified, and that can happen before they are applied in a particular case; otherwise why use *one* word for different cases?

The words “here”, “now”, etc. refer to the origin of¹ a system of coordinates, like the letter “O”; but they don’t stand for descriptions of the location of point O relative to objects in space. They don’t stand for the description of a spatial situation.²

The difference between myth and fairy tale. Fairy tales (and other works of fiction) are cut off from the here and now.

But it’s an important proposition in the grammar of the word “here” that it makes no sense to write “here” where a location still needs to be specified; that therefore I shouldn’t attach a label to an object that reads “This object is to be used here exclusively”.

Of course, with respect to the words “now” and “here”, etc., I can only do what I usually do, i.e. describe their use. But³ this description must be general, i.e. there from the start, *before* any use.

“Here” and “now” are geometrical concepts, like, for instance, the centre point of my field of vision.

“Here” and “now” have no greater multiplicity than they seem to have. There’s a huge danger in assuming they do. Replace them with whatever expression you want, it’s always just *one* word – and therefore one word is as good as the other.

What is “particular” is the event. The event described by the words “It rained today”, and the next day by “It rained yesterday”.

What is the “present situation” anyway? Well, that this or that is the case. *Not*: “that this or that is the case *now*”.

“Now” is a word. What do I need this word for? “Now” – as opposed to what? – As opposed to “in an hour”, “5 minutes ago”, etc., etc.

1 (V): the beginning point for

3 (V): And

2 (V): letter “O”; but they don’t describe its location vis-à-vis the objects in space.

„Jetzt“ bezeichnet kein System, sondern gehört zu einem System. Es wirkt nicht magisch; wie auch sonst kein Wort.

525 Wenn die Sprache sich mit dem Gelde vergleichen läßt, an dem an und für sich nichts liegt, sondern das nur indirekt von Bedeutung ist, weil man damit⁶ Gegenstände kaufen kann, die für uns Bedeutung haben; so möchte man vielleicht sagen,⁷ daß hier beim Gebrauch der Wörter „ich“, „hier“, „jetzt“ etc. der Tauschhandel in den Geldhandel eintritt.⁸

Wenn ich sage „ich gehe jetzt dorthin“, so kommt in dem Symbol manches vor, was in dem Zeichen allein nicht liegt. Der Satz, wenn ich ihn etwa von unbekannter Hand geschrieben, irgendwo vorfinde, sagt gar nichts; das Wort „ich“, das Wort „jetzt“ und „dorthin“ sind allein ohne die Gegenwart der sprechenden Person, der gegenwärtigen Situation und der im Raum gezeigten Richtung bedeutungslos.

„Jetzt“, „früher“, „hier“, „dort“, „ich“, „Du“, „dieses“, sind solche Wörter zur Anknüpfung an die Wirklichkeit.

„Aber die Wirklichkeit, die solcherart zum Symbol gehört, fällt unter die Herrschaft der Grammatik.“

Nun könnte man fragen: Gehört die Windrose noch zum Plan? Oder vielmehr; gehört die Regel, nach der die Windrose angewandt wird, noch zum Plan? Und es ist klar, daß ich diese Regel durch eine andere Orientierungsregel ersetzen kann, in der von der Windrose nicht die Rede ist, sondern statt deren⁹ etwa von einem Weg auf dem Plan und was ihm in der Gegend entspricht.

526 Wenn (in einem Satz „ich will, daß Du dorthin gehst“) der Sprechende, der Angesprochene und der Pfeil der die Richtung weist, zum Symbolismus gehören, so spielen sie in ihm jedenfalls eine ganz andere Rolle, als die Wörter.

Wenn aber die Grammatik den ganzen Symbolismus umfassen soll, wie zeigt sich in ihr die Ergänzungsbedürftigkeit der Wörter „ich“, „Du“, „dieses“, etc. durch Gegenstände der Realität?

Denn, daß jener Satz ohne eine solche Ergänzung nichts sagt, muß die *Grammatik* sagen. Wenn sie das vollständige Geschäftsbuch der Sprache sein soll (wie ich es meine).

Ich will immer zeigen, daß alles was in¹⁰ der Logik „business“ ist, in der Grammatik gesagt werden muß.

Wie etwa der Fortgang eines Geschäftes aus den Geschäftsbüchern muß vollständig herausgelesen werden können. Sodaß man, auf die Geschäftsbücher deutend, muß sagen können: Hier! hier muß sich alles zeigen; und was sich hier nicht zeigt, gilt nicht. Denn am Ende muß sich hier alles Wesentliche abspielen.

Alles wirklich Geschäftliche – heißt das – muß sich in der Grammatik abwickeln.

Wie erklärt die Grammatik das Wort „jetzt“? Doch wohl durch die Regeln, die sie für seinen Gebrauch angibt. Das Gleiche¹¹ für das Wort „ich“.

6 (V): man mit ihm

7 (V): so kann man sagen,

8 (M): (?)

9 (O): dessen

10 (V): an

11 (V): Gleiche ¶

“Now” doesn’t designate a system; rather, it belongs to one. It works no magic – any more than any other word.

If language can be compared to money – which means nothing in and of itself, but is only of importance indirectly – because with it one can buy things that are important to us, then one might be inclined to say⁴ that here, in the use of the words “I”, “here”, “now”, etc., barter enters into the commerce of money.⁵

If I say “Now I’m going there”, then some things occur in the symbol that aren’t contained in the sign alone. If, say, I find the sentence somewhere, written by an unknown hand, then it doesn’t mean anything at all; by themselves, in the absence of a speaker, a present situation and an indication of a spatial direction, the word “I”, the word “now”, and “there” are meaningless.

“Now”, “earlier”, “here”, “there”, “I”, “you”, “this” are words for ligatures to reality. “But the reality that belongs to a symbol in this way falls under the domain of grammar.”

Now one could ask: Is the compass rose part of a map? Or rather: Is the rule according to which the compass rose is applied part of a map? And it’s clear that I can replace this rule with a different rule of orientation, in which there is no mention of a compass rose, but instead, say, of a path on the map and of what corresponds to it on the ground.

If (in the sentence “I want you to go over there”) the speaker, the person being spoken to, and the arrow indicating the direction all belong to the symbolism, then nevertheless they play an entirely different role within it than do the words.

But if grammar is to encompass the entire symbolism, how is it shown in grammar that there’s a need to supplement the words “I”, “you”, “this”, etc., with real objects?

For it is *grammar* that has to say that a proposition with these words means nothing without such a supplement. If it’s to be the complete ledger of language (as I believe).

I’m always wanting to show that everything that’s “business” in logic⁶ has to be stated in grammar.

As, say, the progress of a business has to be completely discernible from its ledgers. So that one has to be able to point to the ledgers and say: There! Everything has to show up there; and what doesn’t show up there doesn’t count. For in the end, everything that is essential must take place there.

And this means that everything actually pertaining to business has to be transacted in grammar.

How does grammar explain the word “now”? Surely via the rules it gives for its use. The same goes for the word “I”.

4 (V): one can say

5 (M): (?)

6 (V): show that the “business” of logic

Ich könnte mir denken, daß Einer, um das Wort „jetzt“ zu erklären, auf den gegenwärtigen Zeigerstand einer Uhr zeigt.¹² So wie¹³ er zur Erklärung des Ausdrucks „in fünf Minuten“ auf die Ziffer der Uhr zeigen kann, wo der Zeiger sich in fünf Minuten befinden wird.

Es ist klar, daß dadurch nur die Uhr in unsere Zeichensprache einbezogen wird.

527 Das Wort „jetzt“ wirkt gleichsam als Schlag eines Zeitmessers. Es gibt durch sein Ertönen eine Zeit an. Man kann es ja auch wirklich durch ein anderes Zeitzeichen ersetzen. Wenn man z.B. sagt: tu das, wenn ich in die Hände klatsche. Das Klatschen ist dann ein Zeitzeichen, wie der Pfeil ein Richtungszeichen ist, wenn ich sage „gehe dort → hin“.

Wenn mir z.B. die Rede, die ein Anderer gestern gesprochen hat, mitgeteilt wird: „es¹⁴ geschieht heute das und das“, so muß ich verstehen, daß der Satz, wenn ich ihn höre, nicht so verifiziert werden kann, wie er zu verifizieren war, als er ursprünglich ausgesprochen wurde. Die Grammatik sagt mir: wenn ich gestern sagte „heute geschieht es“, so heißt das soviel, wie wenn ich heute sage „gestern ist es geschehen“.

Wenn man nun sagt „dieser Mensch heißt N“, so muß uns die Grammatik sagen, daß diese Wortfolge keinen Sinn hat, wenn sie nicht durch ein Hinweisen ergänzt wird.

12 (V): gegenwärtigen Stand der Zeiger einer Uhr zeigt.

13 (O): Sowie

14 (O): wird. „es

I could well imagine that to explain the word “now”, someone points to the present position of the hands of a clock. Just as, in order to explain the expression “in five minutes”, he can point to the number on the clock where the hand will be in five minutes.

It is clear that in so doing he’s just including the clock in our language of signs.

The word “now” works like the ring of a timer, as it were. The sound gives the time. Indeed, one can actually replace it with a different sign for time. If we say, for instance: “Do this when I clap my hands”. There, clapping is a sign for time, as the arrow is a sign for direction when I say “Go over there →”.

If, for instance, I’m told of a statement that someone made yesterday: “Such and such is happening today”, then I have to understand that that proposition can’t be verified in the same way when I hear it as it could be verified when it was originally uttered. Grammar tells me: If yesterday I said “It’s happening today”, that means the same as if today I say “It happened yesterday”.

Now if one says “This man’s name is N”, grammar has to tell us that this sequence of words makes no sense unless it is supplemented with pointing.

Farbe, Erfahrung, etc. als formale Begriffe.

Man überlege: welchen Grund hat man, ein neues Phänomen *Farbe* zu nennen, wenn es sich nicht in unser bisheriges Farbenschema einfügt.

Erfahrung ist nicht etwas, das man durch Bestimmungen von einem *Andren* abgrenzen kann, was nicht Erfahrung ist; sondern eine logische Form.

Die Erfahrung (Der Begriff der Erfahrung) scheint (uns) von völligem Dunkel begrenzt. Aber auch Schwarz ist¹ eine Farbe, und wenn eine Farbe gegen Schwarz abgegrenzt ist, so durch eine Farbgrenze, wie jede andre.

Unmittelbare Erfahrung (Sinnes-Datum) ist entweder ein Begriff von trivialer Abgrenzung oder eine Form.

1 (V): wäre

Colour, Experience, etc., as Formal Concepts.

Consider: What reason does anyone have to call a new phenomenon *a colour* if it doesn't fit in with the colour scheme we've been using so far?

Experience isn't something you can demarcate from something else that isn't experience by stipulation; rather, it's a logical form.

Experience (the concept of experience) seems (to us) to be bordered by utter darkness.

But even black is¹ a colour, and when a colour is demarcated from black that's done with a colour border, like any other colour border.

Immediate experience (a sense datum) is either a concept with trivial demarcations, or a form.

1 (V): black would be

Grundlagen der Mathematik.

Foundations of Mathematics.

Die Mathematik mit einem Spiel verglichen.

Was spricht man der Mathematik ab wenn man sagt, sie sei nur ein Spiel (oder: sie sei ein Spiel)?

Ein Spiel, im Gegensatz wozu? – Was spricht man ihr zu, wenn man sagt (sie sei kein Spiel), ihre Sätze hätten Sinn?¹

Der Sinn außerhalb des Satzes.

Und was geht uns der an? Wo zeigt er sich und was können wir mit ihm anfangen? (Auf die Frage „was ist der Sinn dieses Satzes?“ kommt ein Satz zur Antwort.)²

(„Aber der mathematische Satz drückt doch einen Gedanken aus“ – Welchen Gedanken? –)

Kann er durch einen anderen Satz ausgedrückt werden? oder nur durch *diesen* Satz? – Oder überhaupt nicht? In diesem Falle geht er uns nichts an.

531 Will man durch die mathematischen Sätze von andern Gebilden, den Hypothesen, etc. etwa unterscheiden? Daran tut man Recht, und daß dieser Unterschied besteht, unterliegt ja keinem Zweifel.

Will man sagen, die Mathematik werde gespielt, wie das Schach, oder eine Patience und es laufe dabei auf ein Gewinnen oder Ausgehen hinaus,³ so ist das offenbar unrichtig.

Sagt man, daß die seelischen Vorgänge, die den Gebrauch der mathematischen Symbole begleiten, andere sind, als die, die das Schachspiel⁴ begleiten, so weiß ich darüber nichts zu sagen.

Es gibt auch beim Schach einige Konfigurationen, die unmöglich sind, obwohl jeder Stein in einer ihm erlaubten Stellung steht. (Wenn z.B.⁵ die Anfangsstellung der Bauern intakt ist und ein Läufer schon auf dem Feld.) Aber man könnte sich ein Spiel denken, in welchem⁶ die Anzahl der Züge vom Anfang der Partie notiert würde, und dann gäbe es den Fall, daß nach n Zügen diese Konfiguration nicht eintreten könnte und man es der Konfiguration doch nicht ohneweiters ansehen kann, ob sie als n-te möglich ist, oder nicht.

Die Handlungen im Spiel müssen den Handlungen im Rechnen entsprechen. (Ich meine: darin muß die Entsprechung bestehen, oder, so müssen die beiden einander zugeordnet sein.)

1 (V): Was spricht man ihr zu, wenn man sagt, ihre Sätze hätten Sinn?

2 (O): zur Antwort. (V): Satzes?“ antwortet ein Satz.

3 (V): und es gebe dabei ein Gewinnen oder Ausgehen,

4 (V): Schachspielen

5 (V): (Z.B. wenn

6 (V): denken, worin

Mathematics Compared to a Game.

What do we deny mathematics when we say it is only a game (or: it is a game)?

A game, in contrast to what? – What do we award mathematics when we say (it isn't a game), its propositions make sense?¹

The sense outside the proposition.

And what concern is it of ours? Where does it manifest itself and what can we do with it? (The question “What is the sense of this proposition?” is answered by a proposition.) (“But a mathematical proposition does express a thought!” – Which thought? –)

Can it be expressed by another proposition? Or only by *this* proposition? – Or not at all? In that case it is no concern of ours.

Do you want to distinguish mathematical propositions from other constructions, such as hypotheses? You are right to do so, and there is no doubt that this distinction exists.

If you want to say that mathematics is played like chess or patience, and the point of it is² winning or going out, that is obviously incorrect.

If you say that the mental processes accompanying the use of mathematical symbols are different from those accompanying chess,³ I don't know what to say about that.

In chess there are some configurations that are impossible even though each piece is in a permissible position. (If, for example,⁴ all the pawns are still in their initial position, but a bishop is already in play.) But one could imagine a game in which a record was kept of the number of moves from the beginning of the game, and then there might be the situation where a configuration couldn't occur after *n* moves, and yet one couldn't tell just by looking at the configuration whether or not it was possible as the *n*th configuration.

Moves in games must correspond to moves in calculating. (I mean: that's what the correspondence must consist in, or, that's the way that the two must be correlated with each other.)

1 (V): when we say its propositions make sense?

2 (V): and in it there is

3 (V): accompanying the playing of chess,

4 (V): (For example, if

Handelt die Mathematik von Schriftzeichen?⁷ Ebensowenig, wie das Schachspiel von Holzfiguren handelt.

Wenn wir von dem Sinn mathematischer Sätze reden, oder; wovon sie handeln, so gebrauchen wir ein falsches Bild. Es ist nämlich hier auch so, als ob unwesentliche, willkürliche Zeichen das Wesentliche – eben den Sinn – miteinander gemein hätten.⁸

532 Weil die Mathematik⁹ ein Kalkül ist und daher wesentlich von nichts handelt, gibt es keine Metamathematik.

Wie verhält sich die Schachaufgabe (das Schachproblem) zur Schachpartie? – Denn, daß die Schachaufgabe der Rechenaufgabe entspricht, eine Rechenaufgabe ist, ist klar.

Ein arithmetisches Spiel wäre z.B. folgendes: Wir schreiben auf gut Glück eine vierstellige Zahl hin, etwa 7368; dieser Zahl soll man sich dadurch nähern, daß man die Zahlen 7, 3, 6 und 8 in irgendeiner Reihenfolge miteinander multipliziert. Die Spielteilnehmer rechnen mit Bleistift auf Papier, und wer in der geringsten Anzahl von Operationen der Zahl 7368 am nächsten kommt, hat gewonnen. (Übrigens lassen sich eine Menge der mathematischen Rätselfragen zu solchen Spielen umformen.)

Angenommen, einem Menschen wäre Arithmetik nur zum Gebrauch in einem arithmetischen Spiel gelehrt worden. Hätte er etwas Anderes gelernt als der, welcher Arithmetik zum gewöhnlichen¹⁰ Gebrauch lernt? Und wenn er nun im Spiel 21 mit 8 multipliziert und 168 erhält, tut er etwas Andres, als der, welcher herausfinden wollte, wieviel 21×8 ist?

Man wird sagen: Der Eine wollte doch eine Wahrheit finden, während der Andre nichts dergleichen wollte.

533 Nun könnte man diesen Fall etwa mit dem des Tennisspiels¹¹ vergleichen wollen, in welchem der Spieler eine bestimmte Bewegung macht, der Ball darauf in bestimmter Weise fliegt und man diesen Schlag nun als Experiment auffassen kann, durch welches man eine bestimmte Wahrheit erfahren hat, oder aber auch als eine Spielhandlung, mit dem alleinigen Zweck, das Spiel zu gewinnen.

Dieser Vergleich würde aber nicht stimmen, denn wir sehen im Schachzug kein Experiment (was wir übrigens *auch* könnten), sondern eine Handlung einer Rechnung.

Es könnte Einer vielleicht sagen: In dem arithmetischen Spiel werden wir zwar multiplizieren $\frac{21 \times 8}{168}$, aber die Gleichung $21 \times 8 = 168$ wird nicht im Spiel vorkommen. Aber ist das nicht ein äußerlicher Unterschied? und warum sollen wir nicht auch so multiplizieren (und gewiß dividieren), daß die Gleichung als solche angeschrieben wird?

Also kann man nur einwenden, daß in dem Spiel die Gleichung kein Satz ist. Aber was heißt das? Wodurch wird sie dann zu einem Satz? Was muß noch dazu kommen, damit sie ein Satz wird? – Handelt es sich nicht um die Verwendung¹² der Gleichung (oder der Multiplikation)? – Und Mathematik ist es wohl dann, wenn es zum Übergang von einem Satz zu einem andern verwendet wird. Und so wäre das unterscheidende Merkmal zwischen Mathematik und Spiel mit dem Begriff des Satzes (nicht „mathematischen Satzes“) gekuppelt, und verliert damit für uns seine Aktualität.

7 (V): Zeichen?

8 (V): miteinander gemeinsam haben.

9 (O): Grammatik (E): Sinngemäß und auf Grund früherer Versionen des Typoskripts [MS 110 (S. 10), TS 211 (S. 123), TS 212 (S.

1391)], haben wir hier statt „Grammatik“ „Mathematik“ gesetzt.

10 (V): normalen

11 (O): Tennisspiel

12 (V): Anwendung

Is mathematics about written signs⁵? No more than chess is about wooden pieces.

When we talk about the sense of mathematical propositions, or what they are about, we are using a false picture. For here too it's as if there were inessential, arbitrary signs that had⁶ something essential in common, namely their sense.

Because mathematics⁷ is a calculus and therefore is really about nothing, there isn't any metamathematics.

How is a chess exercise (a chess problem) related to a game of chess? – For it's clear that chess problems correspond to arithmetical problems, that they are arithmetical problems.

The following would be an example of an arithmetical game: We write down a four-digit number at random, e.g. 7,368; we are to approach this number by multiplying the numbers 7, 3, 6, and 8 with each other in any order. The players calculate with pencil and paper, and the person who comes closest to the number 7,368 in the smallest number of steps has won. (Many mathematical puzzles, incidentally, can be turned into games of this kind.)

Suppose a human being had been taught arithmetic only for use in an arithmetical game. Would he have learned something different from a person who learns arithmetic for its ordinary⁸ use? And if he multiplies 21 by 8 in the game and gets 168, does he do something different from a person who wanted to find out how much 21×8 is?

It will be said: But the one wanted to find out a truth, whereas the other wanted nothing of the sort.

Well, we might want to compare this with a tennis game, where a player moves his racket in a certain way and then the ball flies off in a particular way; and we can view this stroke either as an experiment, by means of which we discovered a particular truth, or as a move with the sole purpose of winning the game.

But this comparison wouldn't be right, because we don't regard a move in chess as an experiment (which, incidentally we could do *as well*), but as a step in a calculation.

Someone might perhaps say: In the arithmetical game, we may do the multiplication
$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 8 \\ \hline 168 \end{array}$$
 but the equation $21 \times 8 = 168$ needn't occur in the game. But isn't that a superficial distinction? And why shouldn't we multiply (and of course divide) in such a way that the equation is written down as an equation?

So one can only object that in the game the equation is not a proposition. But what does that mean? How does it become a proposition? What must be added to it to make it a proposition? – Isn't it a matter of the use⁹ of the equation (or of the multiplication)? – And it is mathematics, I should think, when it is used for the transition from one proposition to another. And thus the distinguishing mark between mathematics and a game becomes linked to the concept of a proposition (not “mathematical proposition”), thereby causing the mark to lose its actuality for us.

5 (V): about signs
 6 (V): have
 7 (O): grammar (E): On the basis of earlier versions of this remark (in MS 110, p. 10; TS 211, p. 123; TS 212, p. 1391), we have replaced “grammar” here with “mathematics”.
 8 (V): normal
 9 (V): application

534 Man könnte aber sagen, daß der eigentliche Unterschied darin bestehe, daß für Bejahung und Verneinung im Spiel kein Platz sei. Es wird da z.B. multipliziert und $21 \times 8 = 148$ wäre ein falscher Zug, aber „ $\sim(21 \times 8 = 148)$ “, welches ein richtiger arithmetischer Satz ist, hätte in unserm Spiel nichts zu suchen.

(Da mag man sich daran erinnern, daß in der Volksschule nie mit Ungleichungen gearbeitet wird, vom Kind nur die richtige Ausführung der Multiplikation verlangt wird und nie – oder höchst selten – die Konstatierung einer Ungleichung.)

Wenn ich in unserm Spiel 21×8 ausrechne, und wenn ich es tue, um damit eine praktische Aufgabe zu lösen, so ist jedenfalls die Handlung der Rechnung in beiden Fällen die Gleiche (und auch für Ungleichungen könnte in einem Spiele Platz geschaffen werden). Dagegen ist mein übriges Verhalten zu der Rechnung jedenfalls in den zwei Fällen verschieden.

Die Frage ist nun: kann man von dem Menschen, der im Spiel die Stellung „ $21 \times 8 = 168$ “ erhalten hat, sagen, er habe herausgefunden, daß $21 \times 8 = 168$ sei? Und was fehlt ihm dazu? Ich glaube, es fehlt nichts, es sei denn eine Anwendung der Rechnung.

Die Arithmetik ein Spiel zu nennen, ist ebenso falsch, wie das Schieben von Schachfiguren (den Schachregeln gemäß) ein Spiel zu nennen; denn es kann auch eine Rechnung sein.

535 Man müßte also sagen: Nein, das Wort „Arithmetik“ ist nicht der Name eines Spiels. (Das ist natürlich wieder eine Trivialität.) – Aber die Bedeutung des Wortes „Arithmetik“ kann erklärt werden durch die Beziehung der Arithmetik zu einem arithmetischen Spiel, oder auch durch die Beziehung der Schachaufgabe zum Schachspiel.

Dabei aber ist es *wesentlich*, zu erkennen, daß dieses Verhältnis nicht das ist, einer Tennisaufgabe zum Tennisspiel.

Mit „Tennisaufgabe“ meine ich etwa die Aufgabe, einen Ball unter gegebenen Umständen in bestimmter Richtung zurückzuwerfen. (Klarer wäre der Fall, vielleicht, einer Billardaufgabe.) Die Billardaufgabe ist keine mathematische Aufgabe (obwohl zu ihrer Lösung Mathematik angewendet werden kann). Die Billardaufgabe ist eine physikalische Aufgabe und daher „Aufgabe“ im Sinne der Physik; die Schachaufgabe ist eine mathematische Aufgabe und daher „Aufgabe“ in einem andern (im mathematischen) Sinn.

In dem Kampf zwischen dem „Formalismus“ und der „inhaltlichen Mathematik“, – was behauptet denn jeder Teil? Dieser Streit ist so ähnlich dem, zwischen Realismus und Idealismus! Darin z.B.,¹³ daß er bald obsolet (geworden) sein wird und daß beide Parteien, entgegen ihrer täglichen Praxis, Ungerechtigkeiten behaupten.

Die Arithmetik *ist* kein Spiel, niemandem wäre es eingefallen, unter den Spielen der Menschen die Arithmetik zu nennen.

Worin besteht denn das Gewinnen und Verlieren in einem Spiel (oder das Ausgehen der Patience)? Natürlich nicht in der Konfiguration,¹⁴ die das Gewinnen – z.B. – hervorbringt. Wer gewinnt, muß durch eine besondere¹⁵ Regel festgestellt werden. („Dame“ und „Schlagdame“ sind nur durch diese Regel unterschieden.)

13 (V): Idealismus! Auch darin
14 (V): der Situation des Spiels,

15 (V): eigene

But one could say that the real distinction lay in the fact that in the game there is no room for affirmation and negation. For instance, there is multiplication in the game, and $21 \times 8 = 148$ would be a false move, but “ $\sim(21 \times 8 = 148)$ ”, which is a correct arithmetical proposition, would have no place in our game.

(Here we may remind ourselves that in elementary schools they never work with inequations. The children are only asked to carry out multiplications correctly and never – or hardly ever – asked to set up an inequation.)

When I work out 21×8 in our game, and when I do it in order to solve a practical problem, the mechanics of the calculation are the same in both cases (and we could make room in a game for inequations as well). But in all other respects my attitude to the calculation – in these two cases, at any rate – is different.

Now the question is: Can we say of someone who has reached the position “ $21 \times 8 = 168$ ” in the game that he has found out that 21×8 is 168? What is he lacking? I think the only thing missing is an application for the calculation.

Calling arithmetic a game is just as wrong as calling the movement of chess pieces (according to chess-rules) a game; for that can be a calculation too.

So one ought to say: No, the word “arithmetic” is not the name of a game. (Of course once again this is trivial.) – But the meaning of the word “arithmetic” can be explained by the relationship of arithmetic to an arithmetical game, or also by the relationship of a chess problem to the game of chess.

But in doing so it is *essential* to recognize that this relationship is not that of a tennis problem to the game of tennis.

By “tennis problem” I mean something like the problem of returning a ball in a particular direction in given circumstances. (Perhaps a billiards problem would be a clearer case.) A billiards problem isn’t a mathematical problem (although mathematics can be applied to solve it). A billiards problem is a physical problem, and thus a “problem” in the sense of physics; a chess problem is a mathematical problem, and thus a “problem” in a different (the mathematical) sense.

In the battle between “formalism” and “content mathematics” – what is it that each side is claiming? This dispute is similar to the one between realism and idealism! For instance, in so far¹⁰ as it will soon be (have become) obsolete, and both parties make unjust claims that conflict with their everyday practices.

Arithmetic *is* no game; nobody would have thought of listing arithmetic among the games human beings play.

What constitutes winning and losing in a game (or going out in patience)? Not the configuration¹¹ that produces, say, the win. The winner must be established by a particular¹² rule. (“Draughts” and “Losing Draughts” differ only because of this rule.)

10 (V): Among other reasons, in so far

11 (V): situation

12 (V): special

536 Konstatiert nun die Regel etwas, die sagt, „wer zuerst seine Steine im Feld des Andern hat, hat gewonnen“? Wie ließe sich das verifizieren? Wie weiß ich, ob Einer gewonnen hat? Etwa daraus, daß er sich freut?

Diese Regel sagt doch wohl: Du mußt versuchen, Deine Steine so rasch als möglich etc.

Die Regel in dieser Form bringt das Spiel schon mit dem Leben in Zusammenhang. Und man könnte sich denken, daß in einer Volksschule, in der das Schachspielen ein Lehrgegenstand¹⁶ wäre, die Reaktion des Lehrers auf das schlechte Spiel eines Schülers genau dieselbe¹⁷ wäre, wie die auf eine falsch gerechnete Rechenaufgabe.

Ich möchte beinahe sagen: Im Spiel gibt es (zwar) kein „wahr“ und „falsch“, dafür gibt es aber in der Arithmetik kein „Gewinnen“ und „Verlieren“.

Ich sagte einmal, es wäre denkbar, daß Kriege auf einer Art großem Schachbrett nach den Regeln des Schachspiels ausgefochten würden. Aber: Wenn es wirklich bloß nach den Regeln des Schachspiels ginge, dann brauchte man eben kein Schlachtfeld für diesen Krieg, sondern er könnte auf einem gewöhnlichen Brett gespielt werden. Und dann wäre es (eben) im gewöhnlichen¹⁸ Sinne kein Krieg. Aber man könnte sich ja auch eine Schlacht von den Regeln des Schachspiels geleitet denken. Etwa so, daß der „Läufer“ mit der „Dame“ nur kämpfen dürfte, wenn seine Stellung zu ihr es ihm im Schachspiel erlaubte, sie zu „nehmen“.

537 Könnte man sich eine Schachpartie gespielt denken, d.h., sämtliche Spielhandlungen ausgeführt denken, aber *in einer andern Umgebung*, so daß dieser Vorgang von uns¹⁹ nicht die Partie eines Spiels genannt werden könnte?²⁰

Gewiß, es könnte sich ja um eine *Aufgabe* handeln, die die Beiden miteinander lösen. (Und einen Fall für die Nützlichkeit einer solchen Aufgabe kann man sich ja nach dem Oberen leicht konstruieren.)

Die Regel über das Gewinnen und Verlieren unterscheidet eigentlich nur zwei Pole. Welche Bewandtnis es (dann) mit dem hat, der gewinnt (oder verliert), geht sie eigentlich nichts an. Ob z.B. der Verlierende dann etwas zu zahlen hat.

(Und ähnlich, kommt es uns ja vor, verhält es sich mit dem „richtig“ und „falsch“ im Rechnen.)

In der Logik geschieht immer wieder, was in dem Streit über das Wesen der Definition geschehen ist. Wenn man sagt, die Definition habe es nur mit Zeichen zu tun und ersetze bloß ein Zeichen durch ein anderes,²¹ so wehren sich die Menschen dagegen und sagen, die Definition leiste nicht *nur* das, oder es gebe eben verschiedene Arten der Definition²² und die interessante und wichtige sei nicht die (reine) „Verbaldefinition“.

Sie glauben nämlich, man nehme der Definition ihre Bedeutung, Wichtigkeit, wenn man sie als bloße Ersetzungsregel, die von Zeichen handelt, hinstellt. Während die *Bedeutung* der Definition in ihrer Anwendung liegt, quasi in ihrer Lebenswichtigkeit. Und eben das geht (heute) in dem Streit zwischen Formalismus, Intuitionismus, etc. vor sich. Es ist den Leuten unmöglich, die Wichtigkeit einer Tatsache,²³ ihre Konsequenzen, ihre Anwendung, von

16 (V): ein obligater Gegenstand

17 (V): Schülers dieselbe

18 (V): normalen

19 (O): Vorgang uns

20 (V): Spiels genannt würde?

21 (V): bloß ein kompliziertes Zeichen durch ein einfacheres,

22 (V): Arten von Definitionen

23 (V): Sache // Handlung,

Now does the rule that says “Whoever first gets his pieces on his opponent’s side has won” state anything? How could this be verified? How do I know whether someone has won? Perhaps by the fact that he is happy?

This rule really says: You have to try to get your pieces as quickly as possible, etc.

In this form the rule connects the game with life. And one could imagine that in an elementary school in which chess were a subject,¹³ the teacher’s reaction to a pupil’s poor playing would be exactly the same¹⁴ as to a calculation carried out incorrectly.

I’m almost inclined to say: In a game there is (to be sure) no “true” and “false”, but then again in arithmetic there is no “winning” and “losing”.

I once said that it was conceivable that wars might be fought on a kind of huge chess board according to the rules of chess. But if everything really went only according to the rules of chess, then you wouldn’t need a battlefield for this war; it could be played on an ordinary board. And then it wouldn’t be a war in the ordinary¹⁵ sense. But of course you *could* also imagine a battle governed by the rules of chess. Such that, say, the “bishop” would be allowed to fight with the “queen” only when his position relative to her would allow him to “take” her in chess.

Could we imagine a game of chess being played (i.e. a complete set of chess moves being carried out), but *in such different surroundings* that what went on wasn’t something we could¹⁶ call a game in a match?

Certainly – it *could* be a case of the two participants collaborating to solve a *problem*. (And indeed, along these lines we can easily come up with a case where such a problem might be useful.)

All the rule about winning and losing really does is to distinguish between two poles. What happens later to the winner (or loser) is really none of its business. – Whether, for instance, the loser has to pay something afterwards.

(And, so it seems, things are similar with “right” and “wrong” in calculations.)

What keeps happening in logic is the same thing that happened in the dispute about the nature of definition. If someone says that a definition is concerned only with signs and does no more than substitute one sign for another,¹⁷ people resist and say that that isn’t *all* a definition does, or that there simply are different kinds of definition,¹⁸ and that the interesting and important one isn’t the (purely) “verbal definition”.

For they think that if you make definition out to be a mere substitution rule for signs you take away its significance and importance. Whereas the *significance* of a definition lies in its application, in its importance for life, as it were. And precisely the same thing is happening (today) in the dispute between formalism and intuitionism, etc. People can’t distinguish the

13 (V): a required subject,

14 (V): be the same

15 (V): normal

16 (V): would

17 (V): substitute a simpler for a complicated sign,

18 (V): definitions,

ihr selbst zu unterscheiden; die Beschreibung einer Sache von der Beschreibung ihrer Wichtigkeit.

- 538 Immer wieder hören wir (so), daß der Mathematiker mit dem Instinkt arbeitet (oder etwa, daß er nicht mechanisch nach der Art eines Schachspielers vorgehe), aber wir erfahren nicht, was das mit dem Wesen der Mathematik zu tun haben soll. Und wenn ein solches psychisches Phänomen in der Mathematik eine Rolle spielt, wie weit wir überhaupt exakt über die Mathematik reden können, und wie weit nur mit der Art der Unbestimmtheit, mit der wir über Instinkte, etc. reden müssen.

Immer wieder möchte ich sagen: *Ich* kontrolliere die *Geschäftsbücher* der Mathematiker; die seelischen Vorgänge, Freuden, Depressionen, Instinkte, der *Geschäftsleute*, so wichtig sie in andrer Beziehung sind, kümmern mich nicht.²⁴

24 (V): die seelischen Vorgänge in den *Inhabern*,
so wichtig sie sind, kümmern mich nicht.

importance, the consequences, the application, of a fact from the fact itself;¹⁹ they can't distinguish the description of a thing from the description of its importance.

Again and again we hear that a mathematician uses his instincts in his work (or, say, that he doesn't proceed mechanically like a chess player), but we aren't told what that's supposed to have to do with the nature of mathematics. And if such a psychological phenomenon has a role in mathematics, we are also not told how far we can speak about mathematics with any exactitude, and how far we can speak about it only with the kind of indeterminacy we have to use in speaking about instincts, etc.

Time and again I would like to say: *I check the ledgers of mathematicians; as important as they are in other respects, the mental processes, joys, depressions and instincts of these business people are no concern of mine.*²⁰

19 (V): of a thing from the thing itself; // of an action from the action itself;

20 (V): respects, the mental processes that take place within the owners, as important as they are, are no concern of mine.

Es gibt keine Metamathematik.

Kein Kalkül kann ein philosophisches Problem entscheiden.

Der Kalkül kann uns nicht prinzipielle Aufschlüsse über die Mathematik geben.

Es kann darum¹ auch keine „führenden Probleme“ der mathematischen Logik geben, denn das wären solche, deren Lösung uns endlich das Recht geben würde² Arithmetik zu treiben, wie wir es tun.

Und dazu können wir nicht auf den Glücksfall der Lösung eines mathematischen Problems warten.

Ich sagte oben „Kalkül ist kein mathematischer Begriff“;³ das heißt, das Wort „Kalkül“ ist kein Schachstein der Mathematik.

Es brauchte in der Mathematik nicht vorzukommen. – Und wenn es doch in einem Kalkül gebraucht wird, so ist dieser nun kein Metakalkül. Vielmehr ist dann dieses Wort wieder nur ein Schachstein wie alle andern.

540 Auch die Logik ist keine Metamathematik, d.h. auch das Arbeiten mit dem logischen Kalkül kann⁴ keine wesentlichen Wahrheiten *über* die Mathematik zu Tage fördern. Siehe hierzu das „Entscheidungsproblem“ und ähnliches in der modernen mathematischen Logik.

[Durch Russell, aber besonders durch Whitehead, ist in die Philosophie eine Pseudoexaktheit gekommen, die die schlimmste Feindin wirklicher Exaktheit ist. Am Grunde liegt hier der Irrtum, ein Kalkül könne die metamathematische Grundlage der Mathematik sein.]

Die Zahl ist durchaus kein „grundlegender mathematischer Begriff“. Es gibt so viele Rechnungen,⁵ in denen von Zahlen nicht die Rede ist.

Und was die Arithmetik betrifft, so ist es mehr oder weniger willkürlich, was wir noch Zahlen nennen wollen. Und im Übrigen ist der Kalkül – z.B. – der Kardinalzahlen zu beschreiben, d.h. seine Regeln sind anzugeben, und damit ist der Arithmetik der Grund gelegt.⁶

Lehre sie uns, dann hast Du sie begründet.

[Hilbert stellt Regeln eines bestimmten Kalküls als Regeln der⁷ Metamathematik auf.]

Es ist ein Unterschied, ob ein System auf ersten Prinzipien *ruht*, oder ob es bloß von ihnen ausgehend entwickelt wird. Es ist ein Unterschied, ob es, wie ein Haus, auf seinen

1 (V): daher

2 (V): endlich berechtigten würde

3 (E): Siehe S. 231.

4 (V): auch Operationen des logischen Kalküls können

5 (V): Kalküle,

6 (V): und damit sind die Grundlagen der Arithmetik gegeben. // und damit ist die Arithmetik begründet.

7 (V): einer

There is no Metamathematics.

No calculus can decide a philosophical problem.

A calculus cannot give us fundamental insights into mathematics.

So neither can there be any “leading problems” of mathematical logic; for those would be problems whose solution would at long last give us the right to¹ do arithmetic as we do.

And to do that we can’t wait for the windfall of the solution of a mathematical problem.

Earlier I said “calculus is not a mathematical concept”;² in other words, the word “calculus” is not a chess piece in mathematics.

It needn’t occur in mathematics. – And if it is used in a calculus nonetheless, that doesn’t make the calculus into a metacalculus; in such a case the word “calculus” is itself just a chess piece, like all the others.

Neither is logic metamathematics; that is, work with the³ logical calculus can’t bring to light any essential truths *about* mathematics either. In this connection look at the “decision problem” and similar topics in modern mathematical logic.

|Through Russell, but especially through Whitehead, there entered into philosophy a false exactitude that is the worst enemy of real exactitude. At the bottom of this lies the erroneous belief that a calculus could be the metamathematical foundation of mathematics. |

Number is in no way a “fundamental mathematical concept”. There are plenty of calculations⁴ in which numbers aren’t mentioned.

And as for arithmetic, what we are willing to call numbers is more or less arbitrary. And as for the rest, what has to be done is to describe the calculus – say – of the cardinal numbers. That is, its rules must be given, and thereby the foundation is laid for arithmetic.⁵

Teach them to us, and then you have laid its foundation.

|Hilbert sets up rules of a particular calculus as rules of metamathematics.⁶|

It makes a difference whether a system *rests* on first principles, or whether it is merely developed from them. It makes a difference whether, like a house, it rests on its foundation

1 (V): last entitle us to

2 (E): Cf. p. 231e.

3 (V): that is, operations of the

4 (V): calculi

5 (V): thereby the foundations of arithmetic are given. // thereby arithmetic is grounded.

6 (V): of a metamathematics.

541 untersten Mauern ruht oder ob es, wie etwa ein Himmelskörper, im Raum frei schwebt und wir bloß unten zu bauen angefangen haben, obwohl wir es auch irgendwo anders hätten tun können.

Die Logik und die Mathematik *ruht* nicht auf Axiomen; so wenig eine Gruppe auf den sie definierenden Elementen und Operationen ruht. Hierin liegt der Fehler, das Einleuchten, die Evidenz, der Grundgesetze als Kriterium der Richtigkeit in der Logik zu betrachten.

Ein Fundament, das auf nichts steht, ist ein schlechtes Fundament.

$(p \& q) \vee (p \& \sim q) \vee (\sim p \& q) \vee (\sim p \& \sim q)$: Das wird meine Tautologie, und ich würde dann nur sagen, daß sich jedes „Gesetz der Logik“⁸ nach bestimmten Regeln auf diese Form bringen läßt. Das heißt aber dasselbe, wie:⁹ sich von ihr ableiten läßt; und hier wären wir bei der Russell'schen Art der Demonstration angelangt und alles, was wir dazusetzen ist nur, daß diese Ausgangsform selber kein selbständiger Satz ist und daß dieses und alle anderen „Gesetze der Logik“ die Eigenschaft haben $p \& \text{Log} = p$, $p \vee \text{Log} = \text{Log}$.

Das Wesen des „logischen Gesetzes“ ist es ja, daß es im Produkt mit irgendeinem Satz diesen Satz ergibt. Und man könnte den Kalkül Russells auch mit Erklärungen beginnen von der Art:

$$p \supset p \text{ \& } q = q$$

$$p \text{ \& } p \vee q = p \text{ etc.}$$

8 (V): sich jeder „Satz der Logik“

9 (V): als:

or whether, like a celestial body, it floats freely in space and we have just begun to build at the bottom, although we could have begun building anywhere else.

Logic and mathematics are not *based* on axioms, any more than a group is based on the elements and operations that define it. Herein lies the error: regarding the intuitiveness, the self-evidence, of the fundamental rules as a criterion for correctness in logic.

A foundation that rests on nothing is a bad foundation.

$(p \ \& \ q) \vee (p \ \& \ \sim q) \vee (\sim p \ \& \ q) \vee (\sim p \ \& \ \sim q)$: That will be my tautology, and all I would say is that every “law⁷ of logic” can be reduced to this form in accordance with specific rules. But that means the same as: can be derived from it. And now we’ve arrived at the Russellian method of demonstration, and all we add to it is that this initial form is not itself an independent proposition, and that this and all other “laws of logic” have the property $p \ \& \ \text{Log} = p$, $p \ \vee \ \text{Log} = \text{Log}$.

It is indeed the essence of a “logical law” that taken together with any proposition it yields that proposition. And one could begin Russell’s calculus with definitions such as:

$$p \supset p \ \&. \ q = q$$

$$p \ \&. \ p \ \vee \ q = p, \text{ etc.}$$

7 (V): “proposition

Beweis der Relevanz.

542

Wenn man die Lösbarkeit beweist, so muß in diesem Beweis irgendwie der Begriff „Lösung“ vorhanden sein. (In dem Mechanismus des Beweises muß irgend etwas diesem Begriff entsprechen.) Aber dieser Begriff ist nicht durch eine äußere Beschreibung zu repräsentieren, sondern nun wirklich darzustellen.

Der Beweis der Beweisbarkeit eines Satzes wäre der Beweis des Satzes selbst. Dagegen gibt es etwas, was wir den Beweis der Relevanz nennen könnten. Das wäre z.B. der Beweis, der mich davon überzeugt, daß ich die Gleichung $17 \times 38 = 456$ nachprüfen *kann*, noch ehe ich es getan habe. Woran erkenne ich nun, daß ich $17 \times 38 = 456$ überprüfen kann, während ich das beim Anblick eines Integralausdrucks vielleicht nicht weiß? Ich erkenne offenbar, daß er nach einer bestimmten Regel gebaut ist und auch, wie die Regel¹ zur Lösung der Aufgabe an dieser Bauart des Satzes haftet. Der Beweis der Relevanz ist dann etwa eine Darstellung der allgemeinen Form der Lösungsmethode, etwa der Multiplikationsaufgaben, die die allgemeine Form der Sätze erkennen läßt, deren Kontrolle sie möglich macht. Ich kann dann sagen, ich erkenne, daß diese Methode auch diese Gleichung nachprüft, obwohl ich die Nachprüfung noch nicht vollzogen habe.

543

Wenn von Beweisen der Relevanz (und ähnlichen Dingen der Mathematik) geredet wird, so geschieht es immer, als hätten wir, abgesehen von den einzelnen Operationsreihen, die wir Beweise der Relevanz nennen, noch einen ganz scharfen umfassenden Begriff so eines Beweises oder überhaupt eines mathematischen Beweises. Während in Wirklichkeit dieses Wort wieder in vielen, mehr oder weniger verwandten Bedeutungen angewandt wird. (Wie etwa die Wörter „Volk“, „König“, „Religion“, etc.; siehe Spengler.) Denken wir nur an die Rolle, die bei² der Erklärung so eines Wortes ein Beispiel spielt. Denn, wenn ich erklären will, was ich unter „Beweis“ verstehe, werde ich auf Beispiele von Beweisen zeigen müssen, wie ich bei der Erklärung des Wortes „Apfel“ auf Äpfel zeigen werde. Mit der Erklärung des Wortes „Beweis“ verhält es sich nun wie mit der des Wortes „Zahl“: ich kann das Wort „Kardinalzahl“ erklären, indem ich auf Beispiele von Kardinalzahlen weise, ja, ich kann geradezu für dieses Wort das Zeichen „1, 2, 3, u.s.w. ad inf.“ gebrauchen; ich kann andererseits das Wort „Zahl“ erklären, indem ich auf verschiedene Zahlenarten hinweise; aber dadurch werde ich den Begriff „Zahl“ nun nicht so scharf fassen, wie früher den der Kardinalzahl, es sein denn, daß ich sagen will, daß nur diejenigen Gebilde, die wir heute als Zahlen bezeichnen, den Begriff „Zahl“ konstituieren. Dann aber kann man von keiner neuen Konstruktion sagen, sie sei die Konstruktion einer Zahlenart. Das Wort „Beweis“ aber wollen wir ja so gebrauchen, daß es nicht einfach durch eine Disjunktion gerade heute üblicher Beweise definiert wird, sondern wir wollen es in Fällen gebrauchen,³ von denen wir uns heute „noch

1 (V): Vorschrift

2 (V): in

3 (V): sondern in Fällen gebrauchen,

Proof of Relevance.

If we prove that a problem can be solved, the concept “solution” must somehow occur in the proof. (There must be something in the mechanism of the proof that corresponds to this concept.) But the concept mustn’t be represented by an external description; it must really be demonstrated.

The proof of the provability of a proposition is the proof of the proposition itself. On the other hand there is something we could call a proof of relevance: an example would be a proof convincing me that I *can* verify the equation $17 \times 38 = 456$ even before I have actually done so. Now what lets me know that I can check $17 \times 38 = 456$, whereas I might not know that I can do that when I look at an expression in the integral calculus? Obviously, because I recognize that the equation is constructed in accordance with a particular rule, and I also recognize how the rule¹ for the solution of the problem is connected to the way the proposition is constructed. In this case a proof of relevance might be something like a presentation of the general form of the method for solving problems – say multiplication problems – which enables us to recognize the general form of the propositions it makes it possible to check. Then I can say I recognize that this method will verify this equation, even though I haven’t yet carried out the verification.

When we speak of proofs of relevance (and other like things in mathematics) it always looks as if we had, in addition to the particular series of operations called proofs of relevance, another quite definite inclusive concept of such proofs, or of mathematical proof in general. But in fact the word “proof” is used with many more or less related meanings. (Like words such as “people”, “king”, “religion”, etc.; cf. Spengler.) Let’s think about the role of an example in the explanation of such a word. For if I want to explain what I understand by “proof”, I will have to point to examples of proofs, just as when explaining the word “apple” I will point to apples. Now it’s the same with the definition of the word “proof” as it is with that of “number”: I can explain the expression “cardinal number” by pointing to examples of cardinal numbers; indeed, for this expression I can simply substitute the sign “1, 2, 3, and so on *ad inf.*”. And I can define the word “number” by pointing to various kinds of numbers; but in so doing, I won’t circumscribe the concept “number” as precisely as I previously circumscribed the concept cardinal number, unless I want to say that only those entities that we at present call numbers constitute the concept “number”. But in that case we can’t say of any new construction that it is the construction of a kind of number. And we want to use the word “proof” so that it isn’t simply defined by a disjunction of proofs that happen to be currently in use; rather, we want to use it² in cases that at present

1 (V): prescript

2 (V): we use it

gar keine Vorstellung machen können“. Soweit der Begriff des Beweises *scharf*⁴ gefaßt ist, ist er es durch einzelne Beweise, oder durch Reihen von Beweisen (den Zahlenreihen analog) und das müssen wir bedenken, wenn wir mit voller Exaktheit über Beweise der Relevanz, der Widerspruchsfreiheit, etc. etc. reden wollen.⁵

544 Man kann sagen: Ein Beweis der Relevanz wird den Kalkül des Satzes, auf den er sich bezieht, *ändern*. Einen Kalkül mit diesem Satz *rechtfertigen* kann er nicht; in dem Sinn, in welchem die Ausführung der Multiplikation 17×23 das Anschreiben der Gleichung $17 \times 23 = 391$ rechtfertigt. Wir müßten nur dem Wort „rechtfertigen“ ausdrücklich jene Bedeutung geben. Dann darf man aber nicht glauben, daß die Mathematik, ohne diese Rechtfertigung, in irgend einem allgemeineren und allgemein feststehenden Sinne unerlaubt, oder mit einem Dolus behaftet sei. (Das wäre ähnlich, als wollte Einer sagen: „der Gebrauch des Wortes ‘Steinhaufen’ ist im Grunde unerlaubt, ehe wir nicht offiziell festgelegt haben, wieviel Steine einen Haufen machen“. Durch so eine Festlegung würde der Gebrauch des Wortes „Haufen“ modifiziert, aber nicht in irgend einem allgemein anerkannten Sinne „gerechtfertigt“. Und wenn eine solche offizielle Definition gegeben würde,⁶ so wäre dadurch nicht der Gebrauch, den man früher von dem Wort gemacht hat, als etwas Unrichtiges⁷ gekennzeichnet.)

Der Beweis der Kontrollierbarkeit von $17 \times 23 = 391$ ist „Beweis“ in einem andern Sinne dieses Wortes, als der, der Gleichung selbst. (Der Müller mahlt, der Maler malt: beide . . .) Die Kontrollierbarkeit der Gleichung *entnehmen*⁸ wir aus ihrem Beweis in analoger Weise, wie die Kontrollierbarkeit des Satzes „die Punkte A und B sind nicht durch eine Windung der Spirale getrennt“ aus der Figur.⁹ Und man sieht auch schon, daß der Satz, der die Kontrollierbarkeit aussagt, „Satz“ in einem andern Sinne ist, als der, dessen Kontrollierbarkeit behauptet wird. Und hier kann man wieder nur sagen: Sieh Dir den Beweis an, dann wirst Du sehen, *was* hier bewiesen wird, was „der bewiesene Satz“ genannt wird.



545 Kann man sagen, daß wir zu jedem Schritt eines Beweises eine frische Intuition brauchen? (Individualität der Zahlen.) Es wäre etwa so: Ist mir eine allgemeine (variable) Regel gegeben, so muß ich immer von neuem erkennen, daß diese Regel auch *hier* angewendet werden kann (daß sie auch für *diesen* Fall gilt). Kein Akt der Voraussicht kann mir diesen Akt der *Einsicht* ersparen. Denn tatsächlich ist die Form, auf die die Regel angewandt wird, bei jedem neuen Schritte eine neue. – Es handelt sich aber hier nicht um einen Akt der *Einsicht*, sondern um einen Akt der *Entscheidung*.

Der sogenannte Beweis der Relevanz steigt die Leiter zu seinem Satz nicht hinaus, denn dazu *muß* man jede Stufe nehmen, sondern zeigt nur, daß die Leiter in der Richtung zu jenem Satze führt. (In der Logik gibt es kein Surrogat.) Es ist auch der Pfeil, der die Richtung weist, kein Surrogat für das Durchschreiten aller Stufen bis zum bestimmten Ziel.

4 (V): „*scharf*“

5 (V): wenn wir uns anschicken, mit voller Exaktheit über Beweise der Relevanz, der Widerspruchsfreiheit, etc. etc. zu reden.

6 (V): wäre,

7 (V): als unrichtig

8 (V): *ersehen*

9 (F): MS 113, S. 103v.

we “can’t even conceive of”. To the extent that the concept of proof is *sharply* circumscribed, it is so only by individual proofs, or by a series of proofs (analogous to the number series), and we must keep that in mind if we want to³ speak absolutely precisely about proofs of relevance, consistency proofs, etc., etc.

We can say: A proof of relevance will *change* the calculus of the proposition to which it refers. It cannot *justify* a calculus containing this proposition, in the sense in which carrying out the multiplication 17×23 justifies writing down the equation $17 \times 23 = 391$. Not, that is, unless we expressly give the word “justify” that meaning. But in that case we mustn’t believe that without this justification, mathematics is in some more general and widely established sense illegitimate, or intentionally deceptive. (That’s like someone wanting to say: “The use of the expression ‘pile of stones’ is fundamentally illegitimate until we have laid down officially how many stones make a pile.” Such a stipulation would modify the use of the word “pile”, but it wouldn’t “justify” it in any generally recognized sense; and if such an official definition were given⁴, it wouldn’t mean that the previous use of the word would be labelled as something incorrect.)⁵

The proof of the verifiability of $17 \times 23 = 391$ is a “proof” in a different sense of this word than the proof of the equation itself. (A cobbler heels, a doctor heals: both . . .) We infer⁶ the verifiability of the equation from its proof, analogously to our inferring the verifiability of the proposition “The points A and B are not separated by a turn of the spiral” from the figure.⁷ And we also see that the proposition that expresses verifiability is a “proposition” in a different sense from the one whose verifiability is asserted. And here again, one can only say: Take a look at the proof, and you will see *what* is being proved here, what gets called “the proposition that is proved”.



Can one say that for each step of a proof we need a fresh intuition? (The individuality of numbers.) That might be argued something like this: If I have been given a general (variable) rule, I must recognize each time anew that this rule can be applied *here* too (that it holds for *this* case as well). No act of foresight can spare me this act of *insight*. For the form to which the rule is applied is in fact a new one at each new step. – But here it’s not a matter of an act of *insight*, but of an act of *decision*.

The so-called proof of relevance does not climb the ladder to its proposition – for that *requires* you to climb rung by rung – but only shows that the ladder leads in the direction of that proposition. (There is no surrogate in logic.) Neither is an arrow that indicates the direction a surrogate for going through all the stages to a particular goal.

3 (V): we set out to

4 (V): definition had been given

5 (V): as incorrect.)

6 (V): see

7 (F): MS 113, p. 103v.

Beweis der Widerspruchsfreiheit.

Irgendetwas sagt mir: eigentlich dürfte ein Widerspruch in den Axiomen eines Systems nicht schaden, als bis er offenbar wird. Man denkt sich einen versteckten Widerspruch wie eine versteckte Krankheit, die schadet, obwohl (und vielleicht gerade deshalb weil) sie sich uns nicht deutlich zeigt. Zwei Spielregeln aber, die einander für einen bestimmten Fall widersprechen, sind vollkommen in Ordnung, bis dieser Fall eintritt und dann erst wird¹ es nötig, durch eine weitere Regel zwischen ihnen zu entscheiden.

Der Beweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome, von dem die Mathematiker heute soviel Aufhebens machen. Ich habe das Gefühl: wenn in den Axiomen eines Systems ein Widerspruch wäre, so wäre das gar nicht so ein großes Unglück. Nichts leichter, als ihn zu beseitigen.

„Man darf ein System von Axiomen nicht benutzen, ehe seine Widerspruchsfreiheit nachgewiesen ist.“

„In den Spielregeln dürfen keine Widersprüche vorkommen.“

547 Warum nicht? „Weil man dann nicht wüßte, wie man zu spielen hat“?

Aber wie kommt es, daß man auf den Widerspruch mit dem Zweifel reagiert?

Auf den Widerspruch reagiert man überhaupt nicht. Man könnte nur sagen: Wenn das wirklich so gemeint ist (wenn der Widerspruch hier stehen *soll*), so versteh' ich es nicht. Oder: ich hab' es nicht gelernt. Ich verstehe die Zeichen nicht. Ich habe nicht gelernt, was ich daraufhin tun soll, ob es überhaupt ein Befehl ist; etc.

Wie wäre es etwa, wenn man in der Arithmetik zu den üblichen Axiomen die Gleichung $2 \times 2 = 5$ hinzunehmen wollte? Das hieße natürlich, daß das Gleichheitszeichen nun seine Bedeutung geändert² hätte, d.h., daß nun andere Regeln für das Gleichheitszeichen gälten.³

Wenn ich nun sagte: „also kann ich es nicht als Ersetzungszeichen gebrauchen; so hieße das, daß seine Grammatik nun nicht mehr mit der des Wortes „ersetzen“ („Ersetzungszeichen“, etc.) übereinstimmt. Denn das Wort „kann“ in diesem Satz deutet nicht auf eine physische (physiologische, psychologische) Möglichkeit.⁴

„Die Regeln dürfen einander nicht widersprechen“, das ist wie: „die Negation darf nicht verdoppelt eine Negation ergeben“. Es liegt nämlich in der Grammatik des Wortes „Regel“, daß „p & ~p“ keine Regel ist (wenn „p“ eine Regel ist).⁵

1 (V): dann wird

2 (V): gewechselt

3 (O): gälte.

4 (O): (physiologische, psychologische Möglichkeit.

5 (V): daß „p \vee ~p“ (wenn „p“ eine Regel ist) keine Regel ist.

Consistency Proof.

Something tells me that a contradiction in the axioms of a system really can't do any harm until it is revealed. We think of a hidden contradiction as being like a hidden illness, which does harm even though (and perhaps precisely because) it doesn't clearly reveal itself to us. But two rules of a game that contradict each other in a particular case are perfectly in order until that case crops up, and it's only then¹ that it becomes necessary to decide between them with a further rule.

The proof of the consistency of axioms that mathematicians make so much fuss about nowadays. I have the feeling that if there were a contradiction in the axioms of a system it wouldn't be such a great misfortune. Nothing's easier than removing it.

“We mustn't use a system of axioms before its consistency has been proved.”

“There mustn't be any contradictions in the rules of a game.”

Why not? “Because then one wouldn't know how to play”?

But how does it happen that we react to a contradiction with doubt?

We don't have any reaction to a contradiction. We can only say: If it's really meant like that (if the contradiction *is supposed to* be there), then I don't understand it. Or: it isn't something I've learned. I don't understand the signs. I haven't learned what I'm supposed to do with it, whether it's a command; etc.

What would it be like, for instance, if one wanted to add the equation $2 \times 2 = 5$ to the usual axioms of arithmetic? Of course that would mean that the equals-sign had now changed² its meaning, i.e. that different rules would now apply to it.

Now if I said: “So I can't use it as a substitution sign”, that would mean that its grammar no longer matched the grammar of the word “substitute” (“substitution sign”, etc.). For the word “can” in that proposition doesn't indicate a physical (physiological, psychological) possibility.

“Rules mustn't contradict each other” is like: “Negation, when doubled, mustn't yield a negation”. For it is part of the grammar of the word “rule” that “ $p \ \& \ \sim p$ ”³ is not a rule (if “ p ” is a rule).

1 (V): it's then

2 (V): switched

3 (V): “ $p \vee \sim p$ ”

Das heißt, man könnte also auch sagen: die Regeln dürfen⁶ einander widersprechen, wenn andere Regeln für den Gebrauch des Wortes⁷ „Regel“ gelten – wenn das Wort „Regel“ eine andere Bedeutung hat.


Wir können eben auch hier nicht begründen (außer (etwa) biologisch oder historisch) sondern nur die Übereinstimmung oder den Gegensatz der Regeln für gewisse Wörter konstatieren, also sagen, daß diese Worte mit diesen Regeln gebraucht werden.⁸

Es läßt sich nicht zeigen, beweisen, daß man diese⁹ Regeln als Regeln dieser Handlung gebrauchen *kann*.

Außer, indem man zeigt, daß die Grammatik der Beschreibung¹⁰ der Handlung mit der jener Regeln übereinstimmt.

„In den Regeln *darf* kein Widerspruch sein“, das klingt so, wie eine Vorschrift: „in einer Uhr darf der Zeiger nicht locker auf seiner Welle sitzen“. Man erwartet sich dann eine Begründung: weil sonst . . . Im ersten Falle könnte diese Begründung aber nur lauten: weil es sonst kein Regelverzeichnis ist. Es ist eben wieder ein Fall der grammatischen Struktur, die sich logisch nicht begründen läßt.

| Zum indirekten Beweis, daß eine Gerade über einen Punkt hinaus nur *eine* Fortsetzung hat: Wir nahmen an, es könnte eine Gerade zwei Fortsetzungen haben. – Wenn wir das annehmen, so muß diese Annahme einen Sinn haben –. Was heißt es aber: das annehmen? Es heißt nicht, eine naturgeschichtlich falsche Annahme machen, wie etwa die, daß ein Löwe zwei Schwänze hätte. – Es heißt nicht, etwas annehmen, was gegen die Konstatierung einer Tatsache verstößt.¹¹ Es heißt vielmehr, eine Regel annehmen; und gegen die ist weiter nichts zu sagen, außer daß sie etwa einer anderen widerspricht und ich sie darum fallen lasse.

Wenn im Beweis nun gezeichnet wird ,¹² und das eine Gerade darstellen soll, die sich gabelt, so ist darin nichts Absurdes (Widersprechendes), es sei denn, daß wir eine Festsetzung getroffen haben, der es widerspricht.¹³

Wenn nachträglich ein Widerspruch gefunden wird, so waren vorher die Regeln noch nicht klar und eindeutig. Der Widerspruch macht also nichts, denn er ist dann durch das Aussprechen einer Regel zu entfernen.

In einem grammatisch geklärten System¹⁴ gibt es keinen versteckten Widerspruch, denn da muß die Regel gegeben sein, nach welcher ein Widerspruch zu finden ist. Versteckt kann der Widerspruch nur in dem Sinn sein, daß er gleichsam in der Unordnung der Regeln,¹⁵ in dem¹⁶ ungeordneten Teil der Grammatik versteckt ist; dort aber macht er nichts,¹⁷ da er durch ein Ordnen der Grammatik zu entfernen ist.

Warum dürfen sich Regeln nicht widersprechen? Weil es sonst keine Regeln wären. |

6 (V): können

7 (V): für das Wort

8 (V): historisch) und // sondern // (können) nur beschreiben, wie das Wort „Regel“ gebraucht wird.

9 (V): gewisse

10 (V): Bezeichnung

11 (V): spricht.

12 (F): MS 112, S. 21r.

13 (V): Wenn im Beweis nun eine Gerade gezeichnet wird, die sich gabelt, so darf das an und

für sich nicht absurd sein, und ich kann nur sagen: so etwas // das // nenne ich keine Gerade.

14 (V): In einem völlig geklärten System // mit klarer Grammatik

15 (V): gleichsam im „Kraut-und-Rüben“ der Regeln,

16 (V): in dem g

17 (V): versteckt ist; das aber macht nichts,

That means we could also say: Rules are allowed to⁴ contradict each other, if different rules are valid for the use of the word⁵ “rule” – if the word “rule” has a different meaning.


Here too we simply can't give any reasons (except, say, biological or historical ones); all we can do is to note the agreement or disagreement between the rules for certain words, and say that these words are used with these rules.⁶

It cannot be shown, proved, that one *can* use these⁷ rules as the rules for this activity.

Except by showing that the grammar of the description⁸ of the activity matches the grammar of those rules.

“In the rules there *must* not be any contradiction.” This sounds like a directive: “In a clock the hand mustn't be loose on its shaft”. We then expect a reason: because otherwise. . . . But in the first case this reason could only be: Because otherwise it won't be a set of rules. Once again it's simply a case of a grammatical structure that can't be given a logical foundation.

| In the indirect proof that a straight line has only *one* continuation beyond a point we were assuming that a straight line could have two continuations. – If we assume that, then that supposition must make sense. – But what does it mean to make that assumption? It doesn't mean making a false assumption of natural history, such as the assumption that a lion has two tails. – It doesn't mean making an assumption that *contravenes*⁹ a statement of fact. Rather it means assuming a rule; and there's nothing further to be said against that rule except that perhaps it contradicts another rule, and that for that reason I drop it.

Now if in the proof there's the following drawing, ¹⁰ and this is supposed to represent a straight line that forks off, then there is nothing absurd (contradictory) in that unless it contradicts some stipulation we have made.¹¹

If a contradiction is found later on, that means that earlier the rules weren't clear and unambiguous. So the contradiction doesn't matter, because we can get rid of it later by enunciating a rule.

In a grammatically clear system¹² there is no hidden contradiction, because such a system must include the rule according to which a contradiction can be found. A contradiction can only be hidden in the sense that it is hidden in a disarray¹³ of rules, in an unorganized part of grammar, as it were; but there it doesn't¹⁴ do any harm, since it can be removed by putting the grammar in order.

Why are rules not allowed to contradict one another? Because otherwise they wouldn't be rules. |

4 (V): Rules can

5 (V): for the word

6 (V): ones); and // rather // we (can) only describe how the word “rule” is used.

7 (V): certain

8 (V): designation

9 (V): contradicts

10 (F): MS 112, p. 21r.

11 (V): Now if in the proof a straight line that forks off is drawn, then in and of itself that needn't be absurd, and all I can say is: I don't call something like that // call that // a straight line.

12 (V): In a completely clarified system // with a clear grammar

13 (V): in the mish-mash

14 (V): but that doesn't

Die Begründung der Arithmetik, in der diese auf ihre Anwendungen vorbereitet wird. (Russell, Ramsey.)

Man empfindet immer eine Scheu, die Arithmetik zu begründen, indem man etwas über ihre Anwendung ausspricht. Sie scheint fest genug in sich selbst begründet zu sein. Und das kommt natürlich daher, daß die Arithmetik ihre eigene Anwendung ist.

Man könnte sagen: Wozu die Anwendung der Arithmetik einschränken, sie sorgt für sich selbst. (Ich kann ein Messer herstellen ohne Rücksicht darauf, welche Klasse von Stoffen ich damit werde schneiden lassen; das wird sich dann schon zeigen.)

Gegen die Abgrenzung des Anwendungsgebiets spricht nämlich das Gefühl, daß wir die Arithmetik verstehen können, ohne ein solches Gebiet im Auge zu haben. Oder sagen wir so: Der Instinkt sträubt sich gegen alles, was nicht bloß eine Analyse der schon vorhandenen Gedanken ist.

551 Man könnte sagen: Die Arithmetik ist eine Art Geometrie; d.h., was in der Geometrie die Konstruktionen auf dem Papier sind, sind in der Arithmetik die Rechnungen (auf dem Papier). – Man könnte sagen, sie ist eine allgemeinere Geometrie.

Es handelt sich immer darum, ob und wie es möglich ist, die allgemeinste Form der Anwendung der Arithmetik darzustellen. Und hier ist eben das Seltsame, daß das in gewissem Sinne nicht nötig zu sein scheint. Und wenn es wirklich nicht nötig ist, dann ist es auch unmöglich.

Es scheint nämlich die allgemeine Form ihrer Anwendung dadurch dargestellt zu sein, daß *nichts* über sie ausgesagt wird. (Und ist das eine mögliche Darstellung, so ist es auch die *einzig* richtige.)

Der Sinn der Bemerkung, daß die Arithmetik eine Art Geometrie sei, ist eben, daß die arithmetischen Konstruktionen autonom sind, wie die geometrischen, und daher sozusagen ihre Anwendbarkeit selbst garantieren.

Denn auch von der Geometrie muß man sagen können, sie sei ihre eigene Anwendung.

(In dem Sinne von möglichen und wirklich gezogenen Geraden können¹ wir auch von möglichen und wirklich dargestellten Zahlen reden.)



²Das ist eine arithmetische Konstruktion und in *etwas* erweitertem Sinn auch eine geometrische.

1 (V): könnten

2 (F): TS 209, S. 47.

Laying the Foundations for Arithmetic as Preparation for its Applications. (Russell, Ramsey.)

One always shies away from giving arithmetic a foundation by uttering something about its application. It appears firmly enough grounded in itself. And of course the reason for that is that arithmetic is its own application.

You could say: Why limit the application of arithmetic? Its application takes care of itself. (I can make a knife without bothering about what kinds of materials I will cut with it; that will become apparent soon enough.)

What speaks against our demarcating an area of application is the feeling that we can understand arithmetic without having such an area in mind. Or let's put it like this: Our instinct resists anything that isn't merely an analysis of the thoughts already before us.

You could say arithmetic is a kind of geometry; that is to say, what are constructions on paper in geometry are calculations (on paper) in arithmetic. – You could say it is a more general kind of geometry.

It is always a question of whether and how it's possible to represent the most general form of the application of arithmetic. And here the strange thing is that in a certain sense this doesn't seem to be necessary. And if it really isn't necessary, then it's also impossible.

The general form of its application seems to be represented by the fact that *nothing* is said about it. (And if that's a possible representation, then it is also the *only* right one.)

The point of the remark that arithmetic is a kind of geometry is simply that arithmetical constructions are autonomous, like geometrical ones, and that therefore they guarantee their applicability themselves, so to speak.

For it must be possible to say of geometry too that it is its own application.

(In the sense in which we speak of possible versus actually drawn lines we can¹ also speak of possible versus actually represented numbers.)



²This is an arithmetical construction, and in a *somewhat* extended sense also a geometrical one.

1 (V): could

2 (F): TS 209, p. 47.

Angenommen, mit dieser Rechnung wollte ich folgende Aufgabe lösen: Wenn ich 11 Äpfel habe und Leute mit je 3 Äpfeln beteilen will, wieviele Leute kann ich beteilen? Die Rechnung liefert mir die Lösung 3. Angenommen nun, ich vollzöge alle Handlungen des Beteilens und am Ende hätten 4 Personen je 3 Äpfel in der Hand. Würde ich nun sagen, die Ausrechnung hat ein falsches Resultat ergeben? Natürlich nicht. Und das heißt ja nur, daß die Ausrechnung kein Experiment war.

Es könnte scheinen, als berechtigte uns die mathematische Ausrechnung zu einer Vorhersagung, etwa, daß ich 3 Personen werde beteilen können und 2 Äpfel übrigbleiben werden. So ist es aber nicht. Zu dieser Vorhersagung berechtigt uns eine physikalische Hypothese, die außerhalb der Rechnung steht. Die Rechnung ist nur eine Betrachtung der logischen Formen, der Strukturen, und kann an sich nichts Neues liefern.

Wenn 3 Striche auf dem Papier das Zeichen für die 3 sind, dann kann man sagen, die 3 ist in unserer Sprache so anzuwenden, wie sich 3 Striche anwenden lassen.

Ich sagte: „Eine Schwierigkeit der Frege’schen Theorie ist die Allgemeinheit der Worte ‚Begriff‘ und ‚Gegenstand‘. Denn, da man Tische, Töne, Schwingungen und Gedanken zählen kann, so ist es schwer, sie alle unter einen Hut zu bringen“. – Aber was heißt es: „man *kann* sie zählen“? Doch, daß es *Sinn hat*, auf sie die Kardinalzahlen anzuwenden.³ Wenn wir aber das wissen, *diese* grammatische Regel wissen, was brauchen wir uns da den Kopf über die andern grammatischen Regeln zu zerbrechen, wenn es sich uns nur um eine Rechtfertigung der Anwendung der Kardinalarithmetik handelt? Es ist nicht schwer „sie alle unter einen Hut zu bringen“, sondern sie sind, soweit das für diesen Fall⁴ nötig ist, unter einen Hut gebracht.

Die Arithmetik aber kümmert sich (wie wir alle sehr wohl wissen) überhaupt nicht um diese Anwendung. Ihre Anwendbarkeit sorgt für sich selbst.

552 Daher ist alles ängstliche Suchen nach den Unterschieden zwischen Subjekt-Prädikat-Formen, aber auch die Konstruktion von Funktionen „in extension“ (Ramsey), zur Begründung der Arithmetik Zeitverschwendung.

Die Gleichung 4 Äpfel + 4 Äpfel = 8 Äpfel ist eine Ersetzungsregel, die ich verwende, wenn ich nicht das Zeichen „4 + 4“ durch „8“, sondern das Zeichen „4 Äpfel + 4 Äpfel“ durch „8 Äpfel“ ersetze.

Man muß sich aber davor hüten zu glauben „4 Äpfel + 4 Äpfel = 8 Äpfel“ ist die konkrete Gleichung, dagegen $4 + 4 = 8$ der abstrakte Satz, wovon die erste Gleichung nur eine spezielle Anwendung sei.⁵ So daß zwar die Arithmetik der Äpfel viel weniger allgemein wäre,⁶ als die eigentliche allgemeine, aber eben in ihrem beschränkten Bereich (für Äpfel) gälte. – Es gibt aber keine „Arithmetik der Äpfel“, denn die Gleichung $4 \text{ Äpfel} + 4 \text{ Äpfel} = 8 \text{ Äpfel}$ ⁷ ist nicht ein Satz, der von Äpfeln handelt. Man kann sagen, daß in dieser Gleichung das Wort „Äpfel“ keine Bedeutung hat. (Wie man es überhaupt von dem Zeichen in einer Zeichenregel sagen kann, die seine Bedeutung bestimmen hilft.)

Wie kann man Vorbereitungen zum Empfang von etwas eventuell Existierendem treffen, – in dem Sinn, in welchem Russell und Ramsey das (immer) tun wollten? Man bereitet etwa die Logik für die Existenz von vielstelligen Relationen vor, oder für die Existenz einer unendlichen Zahl von Gegenständen. –

3 (V): *Sinn hat*, sie zu zählen.

4 (V): Zweck

5 (V): ist.

6 (V): ist,

7 (V): Gleichung mit den benannten Zahlen

Suppose I wished to use this calculation to solve the following problem: if I have 11 apples and want to share them among some people in such a way that each is given 3 apples, how many people can I share with? The calculation supplies me with the answer 3. Now suppose I were to go through the whole process of sharing and at the end 4 people each had 3 apples in their hands. Would I then say that the computation had come out wrong? Of course not. And of course all that means is that the computation wasn't an experiment.

It might look as though the mathematical computation entitled us to make a prediction, say, that I will be able to give three people their share and that two apples will be left over. But that isn't so. What justifies us in making this prediction is a hypothesis of physics, which lies outside the calculation. The calculation is only an examination of logical forms, of structures, and of itself can't yield anything new.

If 3 lines on paper are the sign for the number 3, then you can say the number 3 is to be applied in our language in the way in which the 3 lines can be applied.

I said: "One difficulty in the Fregean theory is the generality of the words 'Concept' and 'Object'. For even though you can count tables, tones, vibrations and thoughts, it is difficult to bring them all under one heading." – But what does "you *can* count them" mean? What it means is that it *makes sense* to apply the cardinal numbers to them.³ But if we know that, if we know *this* grammatical rule, why do we need to rack our brains about the other grammatical rules, when all we are concerned with is justifying the application of cardinal arithmetic? It isn't difficult "to bring them all under one heading"; rather, so far as is necessary for the present case,⁴ they are already brought together.

But (as we all know perfectly well) arithmetic isn't at all concerned with this application. Its applicability takes care of itself.

Therefore all the anxious searching for distinctions between subject-predicate forms, as well as the construction of functions "in extension" (Ramsey) in order to establish a foundation of arithmetic, is a waste of time.

The equation 4 apples + 4 apples = 8 apples is a substitution rule that I use if I substitute not "8" for the sign "4 + 4", but "8 apples" for the sign "4 apples + 4 apples".

But we must beware of thinking that "4 apples + 4 apples = 8 apples" is the concrete equation whereas $4 + 4 = 8$ is the abstract proposition, of which the former is only a special application, so that despite the arithmetic of apples being much less general than the truly general arithmetic, it is nevertheless valid in its restricted domain (for apples). – But there isn't any "arithmetic of apples", because the equation 4 apples + 4 apples = 8 apples is⁵ not a proposition about apples. We can say that in this equation the word "apples" has no meaning. (As we can say in general about a sign in a rule that helps determine its meaning.)

How can we make preparations to receive something that possibly exists – in the sense in which Russell and Ramsey (always) wanted to do this? We get logic ready for the existence of many-placed relations, for instance, or for the existence of an infinite number of objects. –

3 (V): *sense* to count them.

4 (V): purpose,

5 (V): equation with the given numbers is

554 Nun kann man doch für die Existenz eines Dinges vorsorgen: Ich mache z.B. ein Kästchen, um den Schmuck hineinzulegen, der vielleicht einmal gemacht werden wird. – Aber hier kann ich doch sagen, was der Fall sein muß, – welcher Fall es ist, für den ich vorsorge. Dieser Fall läßt sich jetzt so gut beschreiben,⁸ wie, nachdem er schon eingetreten ist; und auch dann, wenn er nie eintritt. (Lösung mathematischer Probleme.) Dagegen sorgen Russell und Ramsey für eine eventuelle Grammatik vor.

Man denkt einerseits, daß es die Mathematik mit der Art der Funktionen zu tun hat und ihren Argumenten,⁹ von deren Anzahlen sie handelt. Aber man will sich nicht durch die uns jetzt bekannten Funktionen binden lassen und man weiß nicht, ob jemals eine gefunden werden wird, die 100 Argumentstellen hat; also muß man vorsorgen und eine Funktion konstruieren, die alles für die 100-stellige Relation vorbereitet, wenn sich eine finden sollte. – Was heißt es aber überhaupt: „es findet sich (oder: es gibt) eine 100-stellige Relation“? Welchen Begriff haben wir von ihr? oder auch von einer 2-stelligen? – Als Beispiel einer 2-stelligen Relation gibt man etwa die zwischen Vater und Sohn. Aber welche Bedeutung hat dieses Beispiel für die weitere logische Behandlung der 2-stelligen Relationen? Sollen wir uns jetzt statt jedes „aRb“ vorstellen „a ist der Vater des b“? – Wenn aber nicht, ist dann das Beispiel, oder irgend eins überhaupt, essentiell? Spielt dieses Beispiel nicht die gleiche Rolle, wie eines in der Arithmetik, wenn ich jemandem $3 \times 6 = 18$ an 3 Reihen zu je 6 Äpfeln erkläre?

Hier handelt es sich um unsern Begriff der *Anwendung*. – Man hat etwa die Vorstellung von einem Motor, der erst leer geht, und dann eine Arbeitsmaschine treibt.

Aber was gibt die Anwendung der Rechnung?¹⁰ Fügt sie ihr einen neuen Kalkül bei?¹¹ Dann ist sie ja jetzt eine *andere* Rechnung. Oder gibt sie ihr in irgend einem, der Mathematik (Logik) wesentlichen,¹² Sinne Substanz? Wie kann man dann überhaupt, auch nur zeitweise, von der Anwendung absehen?

Nein, die Rechnung mit Äpfeln ist wesentlich dieselbe, wie die mit Strichen oder Ziffern. Die Arbeitsmaschine setzt den Motor fort, aber die Anwendung (in diesem Sinne) nicht die Rechnung.

Wenn ich nun, um ein Beispiel zu geben, sage: „die Liebe ist eine 2-stellige Relation“, –¹³ sage ich hier etwas über die Liebe aus? Natürlich nicht. Ich gebe eine Regel für den Gebrauch des Wortes „Liebe“ und will etwa sagen, daß wir *dieses* Wort z.B. so gebrauchen.

556 Nun hat man aber doch das Gefühl, daß, mit dem Hinweis auf die 2-stellige Relation „Liebe“, in die Hülse des Relationskalküls Sinn gesteckt wurde. – Denken wir uns eine geometrische Demonstration statt an einer Zeichnung oder an analytischen Symbolen an einem Lampenzylinder durchgeführt.¹⁴ In wiefern ist hier von der Geometrie eine Anwendung gemacht? Tritt denn der Gebrauch des Glaszylinders als Lampenglas in die geometrische Überlegung ein? Und tritt der Gebrauch des Wortes „Liebe“ in einer Liebeserklärung in meine Überlegungen¹⁵ über die 2-stelligen Relationen ein?

8 (V): vorsorge. Ich kann diesen Fall jetzt so gut beschreiben,

9 (V): Gegenständen,

10 (V): Aber was erhält die Rechnung von ihrer Anwendung?

11 (V): zu?

12 (O): wesentlichem,

13 (O): Relation, – (V): Wenn ich nun sage: „die Liebe ist ein Beispiel einer 2-stelligen Relation“, –

14 (V): vorgenommen.

15 (V): Überlegung

We *can* make preparations for the existence of a thing: for example, I make a box for jewellery that possibly will be crafted some day. – But here I can say what must be the case – which case it is for which I am preparing. This case can be described⁶ just as well now as after it has occurred; and even if it never occurs at all. (Solution of mathematical problems.) On the other hand, what Russell and Ramsey are making preparations for is a possible grammar.

On the one hand we think that mathematics has to do with the nature of functions and their arguments,⁷ and that their number is its business. But we don't want to let ourselves be tied down to the functions now known to us, and we don't know whether people will ever discover one with 100 argument places; thus we have to make preparations and construct a function that gets everything ready for a 100-place relation, just in case one is found. – But what does “a 100-place relation is found (or exists)” mean, anyway? What concept do we have of it? Or of a 2-place relation, for that matter? – As an example of a 2-place relation we cite, say, the relation between father and son. But what is the significance of this example for the further logical treatment of 2-place relations? Instead of every “aRb” are we now to imagine “a is the father of b”? – If not, is this example or any example essential? Doesn't this example play the same role as an example in arithmetic, when I use 3 rows of 6 apples each to explain $3 \times 6 = 18$ to somebody?

Here it is a matter of our concept of *application*. – We have, say, a mental image of an engine that first runs in neutral, and then powers a machine.

But what does the application of a calculation provide for?⁸ Does this application add a new calculus to it?⁹ In that case it's now a *different* calculation! Or does the application give it substance in some sense that's essential to mathematics (logic)? If so, how can we disregard the application at all, even only temporarily?

No, a calculation with apples is essentially the same as a calculation with lines or numbers. A machine is an extension of an engine, but an application is not (in the same sense) an extension of a calculation.

Now if in order to give an example, I say “Love is a 2-place relation”¹⁰ – am I saying something about love? Of course not. I am giving a rule for the use of the word “love”, and I want to say something to the effect that we use *this* word in such and such a way, for instance.

Yet we do have the feeling that when we referred to the 2-place relation “love” we put meaning into the husk of the calculus of relations. – Let's imagine a geometrical demonstration carried out¹¹ using the cylinder of a lamp instead of a drawing or analytical symbols. To what extent has geometry been applied here? Does the use of the glass cylinder as glass for a lamp really enter into the geometrical considerations? And does the use of the word “love” in a declaration of love enter into my considerations¹² about 2-place relations?

6 (V): I can describe this case

7 (V): subjects,

8 (V): does the calculation receive from its application?

9 (V): application inflict a new calculus on it?

10 (V): Now if I say: “Love is an example of a 2-place relation”

11 (V): demonstration done

12 (V): consideration

Wir haben es mit verschiedenen Verwendungen, Bedeutungen, des Wortes „Anwendung“ zu tun. „Die Multiplikation wird in der Division angewandt“; „der Glaszylinder wird in der Lampe angewandt“; „die Rechnung ist auf diese Äpfel angewandt“.

Hier kann man nun sagen: Die Arithmetik ist ihre eigene Anwendung. Der Kalkül ist seine eigene Anwendung.

Wir können nicht in der Arithmetik für eine grammatische Anwendung vorsorgen. Denn, ist die Arithmetik nur ein Spiel, so ist für sie auch ihre Anwendung nur ein Spiel, und entweder das gleiche Spiel (dann führt es uns nicht weiter), oder ein anderes – und dann konnten wir das schon in der *reinen* Arithmetik betreiben.

557 Wenn also der Logiker sagt, er habe für eventuell existierende 6-stellige Relationen in der Arithmetik vorgesorgt, so können wir fragen: Was wird denn nun zu dem, was Du vorbereitet hast, hinzutreten,¹⁶ wenn es seine Anwendung finden wird?¹⁷ Ein neuer Kalkül? – aber den hast Du ja eben nicht vorbereitet. Oder etwas, was den Kalkül nicht tangiert? – dann interessiert uns das nicht, und der Kalkül, den Du uns gezeigt hast, ist uns Anwendung genug.

Die unrichtige Idee ist: die Anwendung eines Kalküls auf die wirkliche Sprache verleihe ihm eine Realität, die er vorher¹⁸ nicht hatte.¹⁹

Aber, wie gewöhnlich in unserem Gebiet, liegt hier der Fehler nicht darin, daß man etwas Falsches glaubt, sondern darin, daß man auf eine irreführende Analogie hinsieht.

Was geschieht denn, wenn die 6-stellige Relation gefunden wird? Wird quasi ein Metall gefunden, das nun die gewünschten (vorher beschriebenen) Eigenschaften (das richtige spezifische Gewicht, die Festigkeit, etc.) hat? Nein; ein *Wort* wird gefunden, das wir tatsächlich in unsrer Sprache so verwenden, wie wir etwa den Buchstaben R verwendet haben. „Ja, aber dieses Wort hat doch Bedeutung und ‚R‘ hatte keine! Wir sehen also jetzt, daß dem ‚R‘ etwas entsprechen kann.“ Aber die Bedeutung des Wortes besteht ja nicht darin, daß ihm etwas entspricht. Außer etwa, wo es sich um Namen und benannten Gegenstand handelt, aber da setzt der Träger des Namens nur den Kalkül fort, also die Sprache. Und es ist *nicht* so, wie wenn man sagt: „diese Geschichte hat sich tatsächlich zugetragen, sie war nicht bloße Erfindung“²⁰.

558 Das alles hängt auch mit dem falschen Begriff der logischen Analyse zusammen, den Russell, Ramsey und ich hatten. So daß man auf eine endliche logische Analyse der Tatsachen wartet, wie auf eine chemische von Verbindungen. Eine Analyse, durch die man dann etwa eine 7-stellige Relation wirklich findet, wie ein Element, das tatsächlich das spezifische Gewicht 7 hat.

Die Grammatik ist für uns ein reiner Kalkül. (Nicht die Anwendung eines auf die Realität.)

559 „Wie kann man Vorbereitungen für etwas eventuell Existierendes treffen“ heißt: Wie kann man die Arithmetik auf eine Logik aufbauen, in der man im Speziellen noch Resultate einer Analyse unserer²¹ Sätze erwartet, und dabei für alle eventuellen Resultate durch eine Konstruktion a priori aufkommen wollen? – Man will sagen: „Wir wissen nicht, ob es sich nicht herausstellen wird, daß es keine Funktionen mit 4 Argumentstellen gibt, oder, daß es

16 (V): hinzukommen,

17 (V): Anwendung findet?

18 (V): früher

19 (V): Die unrichtige Idee ist, daß die Anwendung eines Kalküls in der Grammatik der

wirklichen Sprache, ihm eine Realität zuordnet, eine Wirklichkeit gibt, die er früher nicht hatte.

20 (V): Fiktion

21 (V): der

We are dealing with different uses, meanings, of the word “application”. “Multiplication is applied in division”; “the glass cylinder is applied in the lamp”; “the calculation has been applied to these apples”.

At this point we can say: arithmetic is its own application. The calculus is its own application.

In arithmetic we cannot make preparations for a grammatical application. For if arithmetic is only a game, its application too is only a game, and either the same game (in which case it takes us no further) or a different game – and in that case we were already able to play it in *pure* arithmetic.

So if the logician says that he has made preparations in arithmetic for the possible existence of 6-place relations, we can ask him: When what you have prepared finds its application, what will be added to it? A new calculus? – but in no way is that something you have prepared for. Or something that doesn’t affect the calculus? – then that doesn’t interest us, and the calculus you have shown us is application enough for us.

The incorrect idea is: the application of a calculus to real language endows it with a reality that it didn’t have before.¹³

But here, as is usual in our field of study, the mistake lies not in believing something false, but in turning one’s gaze toward a misleading analogy.

What happens, anyway, when the 6-place relation is found? Is it like a metal being found that has the desired (previously described) properties (the right specific weight, strength, etc.)? No; what is found is a *word* that we in fact use in our language as we used, say, the letter R. “Yes, but this word has meaning, and ‘R’ had none! So now we see that something can correspond to ‘R’.” But the meaning of the word doesn’t consist in something’s corresponding to it; except, say, in the case of a name and the object it names; but in that case the bearer of the name is merely a continuation of the calculus, i.e. language. And it is *not* like saying “This story really happened, it wasn’t mere invention”.¹⁴

This is all connected as well with the false concept of logical analysis that Russell, Ramsey and I used to have. Such that one awaits an ultimate logical analysis of facts, as one waits for a chemical analysis of compounds. An analysis that actually enables one to find, say, a 7-place relation, like an element that actually has the specific weight 7.

Grammar is for us a pure calculus (not the application of a calculus to reality).

“How can we make preparations for something that may or may not exist?” means: How can we base arithmetic upon a logic in which we are still awaiting the results of an analysis of our¹⁵ propositions in particular cases, and at the same time hope to account for all possible results through an *a priori* construction? – One wants to say: “We don’t know whether it mightn’t turn out that there are no functions with 4 argument places, or that there

13 (V): The incorrect idea is that the application of a calculus in the grammar of real language assigns a reality to it, gives it a reality, that it didn’t have before.

14 (V): fiction”.

15 (V): the

nur 100 Argumente gibt, die in Funktionen *einer* Variablen sinnvoll eingesetzt werden können. Gibt es z.B. (die Annahme scheint immerhin möglich) nur *eine* solche Funktion F und 4 Argumente a, b, c, d, und hat es in diesem Falle Sinn, zu sagen ‚ $2 + 2 = 4$ ‘, da es keine Funktionen gibt, um die Teilung in 2 und 2 zu bewerkstelligen?“ Und nun, sagt man sich, werden wir für alle eventuellen Fälle Vorbauen. Aber das heißt natürlich nichts: Denn einerseits baut der Kalkül nicht für eine eventuelle Existenz vor, sondern er konstruiert sich die Existenz, die er überhaupt braucht. Andererseits sind die scheinbaren hypothetischen Annahmen über die logischen Elemente (den logischen Aufbau) der Welt nichts anderes, als Angaben der Elemente eines Kalküls; und die können freilich auch so gemacht²² werden, daß es darin ein $2 + 2$ nicht gibt.

Treffen wir etwa Vorbereitungen für die Existenz von 100 Gegenständen, indem wir 100 Namen einführen und einen Kalkül mit ihnen. Und nehmen wir jetzt an, es werden wirklich 100 Gegenstände gefunden. Aber wie ist das, wenn jetzt den Namen Gegenstände zugeordnet werden, die ihnen früher nicht zugeordnet waren? ändert sich jetzt der Kalkül? – was hat diese Zuordnung überhaupt mit ihm zu tun? Erhält er durch sie mehr Wirklichkeit? Oder gehörte er früher bloß zur Mathematik, jetzt aber zur Logik? – Was ist das für eine Frage: „gibt es 3-stellige Relationen“, „gibt es 1000 Gegenstände“? Wie ist das zu entscheiden? – Aber es ist doch Tatsache, daß wir eine 2-stellige Relation angeben können, etwa die Liebe, und eine 3-stellige, etwa die Eifersucht, aber, vielleicht, nicht eine 27-stellige! – Aber was heißt es „eine 2-stellige Relation angeben“? Das klingt (ja) so, als würden wir auf ein Ding hinweisen und sagen „siehst Du, das ist so ein Ding“ (wie wir es nämlich vorher beschrieben haben). Aber so etwas findet ja gar nicht statt (der Vergleich von dem Hinweisen ist gänzlich falsch). „Die Beziehung der Eifersucht kann nicht in 2-stellige Beziehungen aufgelöst werden“: das klingt ähnlich wie: „Alkohol kann nicht in Wasser und eine feste Substanz zerlegt werden“. Liegt das nun in der Natur der Eifersucht? (Vergessen wir nicht: der Satz „A ist wegen B auf C eifersüchtig“ kann ebenso wenig zerlegt werden wie der: „A ist wegen B auf C nicht eifersüchtig“.) Das, worauf man hinweist, ist etwa die Gruppe der Leute A, B und C. – „Aber wenn nun Lebewesen plötzlich den 3-dimensionalen Raum kennen lernten, nachdem sie bisher nur die Ebene kannten, aber in ihr doch eine 3-dimensionale Geometrie entwickelt hätten?!“ Würde diese Geometrie damit²³ geändert, würde sie inhaltsreicher? – „Ja, aber ist es denn nicht so, als hätte ich mir z.B. einmal beliebige Regeln gesetzt, die es mir verböten in meinem Zimmer bestimmte Wege zu gehen, die ich, was die physikalischen Hindernisse betrifft, ohne weiteres gehen könnte, – und als würden dann physikalische Bedingungen eintreten, etwa Möbel in das Zimmer gestellt, die mich nun zwängen, mich nach den Regeln zu bewegen, die ich mir erst willkürlich gegeben hatte? Wie also der 3-dimensionale Kalkül noch ein Spiel war, da gab es eigentlich noch keine 3 Dimensionen; denn das x, y, z gehorchte²⁴ nur den Regeln, weil ich es so wollte; jetzt, wo wir sie mit den wirklichen 3 Dimensionen gekuppelt haben, können sie sich nicht mehr anders bewegen.“ Aber das ist eine bloße Fiktion. Denn hier handelt es sich nicht um eine Verbindung mit der Wirklichkeit, die nun die Grammatik in ihrer Bahn hält! Die „Verbindung der Sprache mit der Wirklichkeit“, etwa durch die hinweisenden Definitionen, macht die Grammatik nicht zwangsläufig (rechtfertigt die Grammatik nicht). Denn diese bleibt immer nur ein frei im Raume schwebender Kalkül, der zwar²⁵ erweitert, aber nicht gestützt werden kann. Die „Verbindung mit der Wirklichkeit“ erweitert nur die Sprache, aber zwingt sie zu nichts. Wir reden von der

22 (V): getroffen

23 (V): nun

24 (O): gehorchten

25 (V): nur

are only 100 arguments that can be meaningfully inserted into functions of *one* variable. Is there, for example (the supposition does appear possible) only *one* four-place function F and 4 arguments a, b, c, d , and does it then make sense to say ' $2 + 2 = 4$ ', since there aren't any functions to accomplish the division into 2 and 2?" So now, one says to oneself, we will make provision for all possible cases. But of course that means nothing: for on the one hand the calculus doesn't provide for possible existence; it constructs all the existence it needs. On the other hand what look like hypothetical assumptions about the logical elements (the logical structure) of the world are nothing other than specifications of the elements of a calculus; and of course you can make these in such a way that the calculus does not contain any $2 + 2$.

Let's prepare, for example, for the existence of 100 objects by introducing 100 names and a calculus to go along with them. And now let's suppose 100 objects really are found. But what happens if names are now correlated with objects they hadn't been correlated with before? Does the calculus now change? – What does this correlation have to do with it at all? Does it acquire more reality because of this correlation? Or did the calculus previously belong only to mathematics, but now to logic? – What sorts of questions are "Are there 3-place relations?", "Are there 1000 objects?"? How is this to be decided? – But surely it is a fact that we can specify a 2-place relation, say love, and a 3-place one, say jealousy, but perhaps not a 27-place one! – But what does "specify a 2-place relation" mean? That does sound as if we were pointing to a thing and saying "See, that's the kind of thing" (i.e. the kind of thing we described earlier). But nothing like that takes place (the comparison with pointing is completely wrong). "The relation of jealousy cannot be broken up into 2-place relationships" sounds similar to "Alcohol cannot be broken down into water plus a solid substance". Now is that inherent in the nature of jealousy? (Let's not forget: the proposition "A is jealous of C because of B" is no more reducible than the proposition "A is not jealous of C because of B".) What is pointed to is, say, the group of people A, B and C. – "But what if living beings who at first knew only plane surfaces, but had nonetheless developed a 3-dimensional geometry, were to suddenly become acquainted with 3-dimensional space?!" Would this alter their geometry,¹⁶ would it become richer in content? – "Yes, but isn't this as if at some time, for instance, I had made arbitrary rules for myself prohibiting me from taking certain routes in my room, routes that, as far as physical obstacles were concerned, I could take without a problem – and then physical conditions occurred (say furniture was put in the room) that forced me to move in accordance with the rules I had originally imposed on myself arbitrarily? Thus, when the 3-dimensional calculus was only a game, there actually weren't three dimensions; for the x, y, z dimensions only obeyed the rules because that's the way I wanted it; but now that we have linked them up to the real 3 dimensions, they are no longer *able* to move otherwise." But that is mere fiction. For here it's not a matter of a connection with reality that keeps grammar on track! The "connection of language with reality", say by means of ostensive definitions, doesn't make grammar inevitable (doesn't justify grammar). For grammar always remains a calculus floating freely in space, a calculus that can be extended, to be sure,¹⁷ but not supported. The "connection with reality" merely extends language; it doesn't force it to do anything. We speak of discovering a 27-place relation, but on the one

16 (V): Would their geometry *now* be altered,

17 (V): that can only be extended,

Auffindung einer 27-stelligen Relation: aber einerseits kann mich keine Entdeckung zwingen, (das Zeichen und) den Kalkül der 27-stelligen Relation zu gebrauchen; andererseits kann ich die Handlungen dieses Kalküls²⁶ selbst mittels dieser Notation beschreiben.

Wenn man in der Logik scheinbar mehrere verschiedene Universen betrachtet (wie Ramsey), so betrachtet man in Wirklichkeit verschiedene Spiele. Die Erklärung eines „Universums“ würde z.B. in Ramsey's Fall einfach eine²⁷ Definition $(\exists x).\phi x \stackrel{\text{Def.}}{=} \phi a \vee \phi b \vee \phi c \vee \phi d$ sein.

26 (V): ich diesen Kalkül

27 (V): die

hand no discovery can force me to use (the sign and) the calculus for a 27-place relation, and on the other hand I can describe the operations of this calculus¹⁸ itself with this notation.

When it seems in logic that we're looking at several different universes (as does Ramsey), in reality we are looking at different games. In Ramsey's case, for instance, the definition of a "universe" would simply be a definition like¹⁹ $(\exists x). \phi x \stackrel{\text{Def.}}{=} \phi a \vee \phi b \vee \phi c \vee \phi d$.

18 (V): describe this calculus

19 (V): be the definition

Ramsey's Theorie der Identität.

562

Die Theorie der Identität bei Ramsey macht den Fehler, den man machen würde, wenn man sagte, ein gemaltes Bild könne man auch als Spiegel benutzen, wenn auch nur für eine einzige Stellung, wo dann übersehen wird, daß das Wesentliche am Spiegel gerade das ist, daß man aus ihm die Stellung des Körpers vor dem Spiegel schließen kann, während man im Fall des gemalten Bildes erst wissen muß, daß die Stellungen übereinstimmen, ehe man das Bild als Spiegelbild auffassen kann.

Wenn die Dirichlet'sche Auffassung der Funktion einen strengen Sinn hat, so muß sie sich in einer *Definition* ausdrücken, die das Funktionszeichen mit der Tabelle als gleichbedeutend erklärt.

Ramsey erklärt „ $x = x$ “ auf einem Umweg als die Aussage: „jeder Satz ist sich selbst äquivalent“ und „ $x = y$ “ als die Aussage: „jeder Satz ist jedem Satz äquivalent“.¹

563 Er hat also mit seiner Erklärung nichts andres erreicht, als was die zwei Definitionen $x = x$ Def Tautologie

$x = x$ Def Kontradiktion bestimmen. (Das Wort „Tautologie“ kann hier durch jede beliebige Tautologie ersetzt werden und das gleiche gilt für „Kontradiktion“.)

Soweit ist nichts geschehn, als Erklärungen der zwei verschiedenen Zeichenformen $x = x$ und $x = y$ zu geben. Diese Erklärungen können natürlich durch zwei Klassen von Erklärungen ersetzt werden,² z.B.:

$$\left. \begin{array}{l} a = a \\ b = b \\ c = c \end{array} \right\} = \text{Taut.} \quad \left. \begin{array}{l} a = b \\ b = c \\ c = a \end{array} \right\} = \text{Cont.}$$

Nun aber schreibt Ramsey:

„ $(\exists x, y).x \neq y$ “, d.h. „ $(\exists x, y).\sim(x = y)$ “, –

dazu hat er aber gar kein Recht: denn, was bedeutet in diesem Zeichen das „ $x = y$ “? Es ist ja weder das Zeichen „ $x = y$ “, welches ich in der Definition oben gebraucht habe, noch natürlich das „ $x = x$ “ in der vorhergehenden Definition. Also ist es ein noch unerklärtes Zeichen. Um übrigens die Müßigkeit dieser³ Definitionen einzusehen, lese man sie (wie sie der Unvoreingenommene lesen würde) so: Ich erlaube, statt des Zeichens „Taut.“, dessen

1 (V): Ramsey definiert $x = y$ als $(\phi_e).\phi_e x \equiv \phi_e y$ die Aussage: „jeder Satz ist jedem Satz äquivalent“.
 2 (V): werden
 3 (V): jener
 Aber nach den Erklärungen, die er über seine Funktionszeichen „ ϕ_e “ gibt, ist $(\phi_e).\phi_e x \equiv \phi_e x$ die Aussage: „jeder Satz ist sich selbst äquivalent“

Ramsey's Theory of Identity.

Ramsey's theory of identity makes the same mistake that would be made if it were said that you could also use a painting as a mirror, even if only for a single posture. What's overlooked here is that what is essential to a mirror is precisely that you can infer from it the posture of a body in front of it, whereas in the case of a painting you have to know that the postures are correlated before you can regard the picture as a mirror image.

If Dirichlet's conception of function has a strict sense, it must be expressed in a *definition* that declares the function sign to be equivalent to the table.

In a roundabout way, Ramsey defines " $x = x$ " as the statement "Every proposition is equivalent to itself" and " $x = y$ " as the statement "Every proposition is equivalent to every proposition".¹

So all he has achieved by his definition is what is laid down by the two definitions

$x = x$ Def. Tautology

$x = x$ Def. Contradiction. (Here the word "tautology" can be replaced by any arbitrary tautology, and similarly for "contradiction".)

So far all that has happened is that definitions have been given of the two different forms of signs $x = x$ and $x = y$. Of course these definitions can be replaced by two sets of definitions, for example:

$$\left. \begin{array}{l} a = a \\ b = b \\ c = c \end{array} \right\} = \text{Taut.} \quad \left. \begin{array}{l} a = b \\ b = c \\ c = a \end{array} \right\} = \text{Cont.}$$

And now Ramsey writes:

" $(\exists x, y).x \neq y$ ", i.e. " $(\exists x, y).\sim(x = y)$ " –

but he has no right to do this: for what does " $x = y$ " mean in this expression? It is neither the sign " $x = y$ " used in the definition above, nor of course the " $x = x$ " in the preceding definition. So it is a sign that is still unexplained. By the way, to understand the futility of these² definitions, you should read them (as an unbiased person would) as follows: I permit the sign "Taut.", whose use we know, to be replaced by the sign " $a = a$ " or " $b = b$ ", etc.;

1 (V): Ramsey defines $x = y$ as $(\phi_e).\phi_e x \equiv \phi_e y$. But according to the definitions that he gives for his function sign " ϕ_e ", $(\phi_e).\phi_e x \equiv \phi_e x$ is equivalent to the statement "Every proposition is equivalent to

itself", and $(\phi_e).\phi_e x \equiv \phi_e y$ is equivalent to the statement "Every proposition is equivalent to every proposition".

2 (V): those

Gebrauch wir kennen, das Zeichen „ $a = a$ “ oder „ $b = b$ “, etc. zu setzen; und statt des Zeichens „Cont.“ („ \sim Taut.“) die Zeichen „ $a = b$ “, „ $a = c$ “, etc. Woraus übrigens hervorgeht, daß
 $(a = b) = (c = d) = (a \neq a) = \text{etc.}!$

Es braucht wohl nicht gesagt zu werden, daß ein so definiertes Gleichheitszeichen nichts mit demjenigen zu tun hat, welches wir zum Ausdruck einer Ersetzungsregel brauchen.

Ich kann nun „ $(\exists x, y).x \neq y$ “ natürlich wieder erklären; etwa als $a \neq a \vee a \neq b \vee b \neq c \vee a \neq c$; diese Erklärung aber ist eigentlich Humbug und ich sollte unmittelbar schreiben $(\exists x, y).x \neq y \stackrel{\text{Def.}}{=} \text{Taut.}$ (D.h. das Zeichen auf der linken Seite würde mir als ein neues – unnötiges – Zeichen für „Taut.“ gegeben.) Denn wir dürfen nicht vergessen, daß nach der Erklärung „ $a = a$ “, „ $a = b$ “, etc. unabhängige Zeichen sind und nur insofern zusammenhängen, als eben die Zeichen „Taut.“ und „Cont.“.

Die Frage ist hier die nach der Nützlichkeit der „extensiven“ Funktionen, denn die Ramsey'sche Erklärung des Gleichheitszeichens ist ja so eine Bestimmung durch die Extension. Worin besteht⁴ nun die extensive Bestimmung einer Funktion? Sie ist offenbar eine Gruppe von Definitionen, z.B. die:

$fa = p$ Def

$fb = q$ Def

$fc = r$ Def

Diese Definitionen erteilen uns die Erlaubnis, statt der uns bekannten Sätze „ p “, „ q “, „ r “ die Zeichen „ fa “, „ fb “, „ fc “ zu setzen. Zu sagen, durch diese drei Definitionen werde⁵ die Funktion $f(x)$ bestimmt, sagt gar nichts, oder dasselbe, was die drei Definitionen sagen.

Denn die Zeichen „ fa “, „ fb “, „ fc “ sind Funktion und Argument nur, sofern es auch die Wörter „ $Ko(rb)$ “, „ $Ko(pf)$ “ und „ $Ko(hl)$ “ sind. (Es macht dabei keinen Unterschied, ob die „Argumente“ „ rb “, „ pf “, „ hl “ sonst noch als Wörter gebraucht werden, oder nicht.)

(Welchen Zweck also die Definitionen haben können, außer den, uns irrezuführen, ist schwer einzusehn.)

Das Zeichen „ $(\exists x).fx$ “ heißt zunächst gar nichts; denn die Regeln für Funktionen im alten Sinn des Wortes gelten ja hier nicht. Für diese wäre eine Definition $fa = \dots$ Unsinn. Das Zeichen „ $(\exists x).fx$ “ ist, wenn keine ausdrückliche Erklärung dafür gegeben wird, nur wie ein Rebus zu verstehen, in welchem auch die Zeichen eine Art uneigentliche Bedeutung haben.

Jedes der Zeichen „ $a = a$ “, „ $a = c$ “, etc. in den Definitionen $(a = a) \stackrel{\text{Def.}}{=} \text{Taut.}$, etc. ist ein *Wort*.

Der Endzweck der Einführung der extensiven Funktionen war übrigens die Analyse von Sätzen über unendliche Extensionen und dieser Zweck ist verfehlt, da eine extensive Funktion durch eine Liste von Definitionen eingeführt wird.

Es besteht eine Versuchung, die Form der Gleichung für die Form von Tautologien und Kontradiktionen zu halten, und zwar darum, weil es scheint, als könne man sagen,⁶ $x = x$ ist selbstverständlich wahr (und) $x = y$ selbstverständlich falsch. Eher noch kann man natürlich $x = x$ mit einer Tautologie vergleichen, als $x = y$ mit einer Kontradiktion,⁷ da ja alle richtigen (und „sinnvollen“) Gleichungen⁸ der Mathematik von der Form $x = y$ sind. Man könnte $x = x$ eine degenerierte Gleichung nennen (Ramsey nannte sehr richtig

4 (V): Extension. Welcher Art ist

5 (V): sei

6 (V): sagen+

7 (V): kann man natürlich sagen, daß $x = x$ die Rolle einer Tautologie spielt, als $x = y$ die der Kontradiktion,

8 (O): (und „sinnvollen“ Gleichungen

and the sign "Cont." (" \sim Taut.") to be replaced by the signs " $a = b$ ", " $a = c$ " etc. From which, incidentally, it follows that

$$(a = b) = (c = d) = (a \neq a) = \text{etc.}!$$

It goes without saying that an equals-sign defined like that has nothing to do with the one we use to express a substitution rule.

Now of course I can define " $(\exists x, y).x \neq y$ " in turn; say as $a \neq a \vee a \neq b \vee b \neq c \vee a \neq c$; but actually this definition is humbug, and I should straightaway write $(\exists x, y).x \neq y$ Def. Taut. (That is, I would be given the sign on the left side as a new – unnecessary – sign for "Taut.") For we mustn't forget that, according to the definition, " $a = a$ ", " $a = b$ ", etc. are independent signs, and are connected with each other only in so far as are the signs "Taut." and "Cont."

The question that arises here is one about the usefulness of "extended" functions, for Ramsey's explanation of the equals-sign is just such a specification by extension. Now what exactly does the specification of a function by its extension consist in?³ Obviously, it is a group of definitions, for example:

$$fa = p \text{ Def.}$$

$$fb = q \text{ Def.}$$

$$fc = r \text{ Def.}$$

These definitions allow us to substitute the signs "fa", "fb", "fc" for the known propositions "p", "q", "r". To say that the function $f(\xi)$ is⁴ determined by these three definitions says nothing at all, or the same thing that the three definitions say.

For the signs "fa", "fb", "fc" are function and argument only in so far as the words "Co(rn)", "Co(al)" and "Co(lt)" are as well. (Here it makes no difference whether or not the "arguments" "rn", "al", "lt" are used as words in any other contexts.)

(So it is hard to see what purpose the definitions can have except to mislead us.)

To begin with, the sign " $(\exists x).fx$ " means nothing; for here the rules for functions in the old sense of the word don't hold. According to them a definition like $fa = . . .$ would be nonsense. If no explicit definition is given for it, the sign " $(\exists x).fx$ " can only be understood as like a rebus, in which the signs have a kind of figurative meaning as well.

Each of the signs " $a = a$ ", " $a = c$ ", etc. in the definitions $(a = a)$ Def. Taut., etc. is a *word*.

Incidentally, the ultimate purpose for introducing extended functions was the analysis of propositions about infinite extensions. But this purpose is misguided, since an extended function is introduced by a list of definitions.

There is a temptation to regard the form of an equation as the form of tautologies and contradictions, because it looks as if one could say that $x = x$ is self-evidently true and $x = y$ self-evidently false. Of course one can more readily compare $x = x$ to a tautology than $x = y$ to a contradiction,⁵ because all correct (and "meaningful") equations of mathematics are of the form $x = y$. We could call $x = x$ a degenerate equation (Ramsey quite correctly called tautologies and contradictions "degenerate propositions"), and indeed a correct degenerate equation (the limiting case of an equation). For we use expressions of

3 (V): What is the nature of the specification of a function by its extension?

4 (V): $f(\xi)$ had been

5 (V): Of course one can more readily say that $x = x$ plays the role of a tautology than that

$x = y$ plays the role of a contradiction,

Tautologien und Kontradiktionen degenerierte Sätze) und zwar eine richtige degenerierte Gleichung (den Grenzfall einer Gleichung). Denn wir gebrauchen Ausdrücke der Form $x = x$ wie richtige Gleichungen, wobei wir uns vollkommen bewußt sind, daß es sich um degenerierte Gleichungen handelt. Im gleichen Fall sind Sätze in geometrischen Beweisen, wie etwa: „der Winkel α ist gleich dem Winkel β , der Winkel γ ist sich selbst gleich, . . .“.

Man könnte nun einwenden, daß richtige Gleichungen der Form $x = y$ auch Tautologien, dagegen falsche, Kontradiktionen sein müßten, weil man ja die richtige Gleichung muß beweisen können und das, indem man die beiden Seiten der Gleichung transformiert, bis eine Identität $x = x$ herauskäme. Aber obwohl durch diesen Prozeß die erste Gleichung als richtig erwiesen ist und insofern die Identität $x = x$ das Endziel der Transformationen war, so ist sie nicht das Endziel in dem Sinne, als hätte man durch die Transformationen der Gleichung ihre richtige Form geben wollen, wie man einen krummen Gegenstand zurechtbiegt, und als habe sie nun in der Identität diese vollkommene Form (endlich) erreicht. Man kann also nicht sagen: die richtige Gleichung ist ja *eigentlich* eine Identität. Sie ist eben *keine* Identität.

the form $x = x$ like correct equations, while being fully conscious that we are dealing with degenerate equations. Propositions in geometrical proofs, such as “the angle α is equal to the angle β , the angle γ is equal to itself . . .”, are in the same situation.

At this point the objection could be made that correct equations of the form $x = y$ must also be tautologies, whereas incorrect ones must be contradictions, because one has to be able to prove a correct equation, and to do that by transforming each side of it until an identity of the form $x = x$ is reached. But although the original equation has been shown by this process to be correct, and to that extent the identity $x = x$ was the ultimate goal of the transformations, still it is not the ultimate goal, in the sense that one wanted to give the equation its correct form through the transformations – like bending a crooked object straight; nor is it the ultimate goal in the sense that (at long last) the equation has now achieved this perfect form in the identity. So we can't say: a correct equation is *actually* an identity. The point is precisely that it is *not* an identity.

Der Begriff der Anwendung der Arithmetik (Mathematik).

Wenn man sagt: „es muß der Mathematik wesentlich sein, daß sie angewandt werden kann“, so¹ meint man, daß diese *Anwendbarkeit*² nicht die eines Stückes Holz ist, von dem ich sage „das werde ich zu dem und dem anwenden können“.

Die Geometrie ist nicht die Wissenschaft (Naturwissenschaft) von den geometrischen Ebenen, geometrischen Geraden und geometrischen Punkten, im Gegensatz etwa zu einer anderen Wissenschaft, die von den groben, physischen Geraden, – Strichen, – Flächen etc. handelt und *deren* Eigenschaften angibt. Der Zusammenhang der Geometrie mit Sätzen des praktischen Lebens, die von Strichen, Farbgrenzen, Kanten und Ecken etc. handeln, ist nicht der, daß sie über ähnliche Dinge spricht, wie diese Sätze, wenn auch über *ideale* Kanten, Ecken, etc.; sondern der, zwischen diesen Sätzen und ihrer Grammatik. Die angewandte Geometrie ist die Grammatik der Aussagen über die räumlichen Gegenstände.

567 Die sogenannte geometrische Gerade verhält sich zu einer Farbgrenze nicht wie etwas Feines zu etwas Grobem, sondern wie Möglichkeit zur Wirklichkeit. (Denke an die Auffassung der Möglichkeit als Schatten der Wirklichkeit.)

Man kann eine Kreisfläche beschreiben, die durch Durchmesser in 8 kongruente Teile geteilt ist, aber es ist sinnlos, das von einer elliptischen³ Fläche zu sagen. Und darin liegt, was die Geometrie in dieser Beziehung von der Kreis- und Ellipsenfläche⁴ aussagt.

|Ein Satz, der auf einer falschen Rechnung beruht (wie etwa „er teilte das 3m lange Brett in 4 Teile zu je 1m“) ist unsinnig⁵ und das beleuchtet, was es heißt „Sinn zu haben“ und „etwas mit dem Satz meinen“.⁶]

Wie ist es mit dem Satz „die Winkelsumme im Dreieck ist 180 Grad“? Dem sieht man es jedenfalls nicht an, daß er ein Satz der Syntax ist.

Der Satz „Gegenwinkel sind gleich“ heißt, ich werde, wenn sie sich bei der Messung nicht als gleich erweisen, die Messung für falsch erklären und „die Winkelsumme im Dreieck ist 180 Grad“ heißt, ich werde, wenn sie sich bei einer Messung nicht als 180 Grad erweist, einen Messungsfehler annehmen. Der Satz ist also ein Postulat über die Art und Weise der Beschreibung der Tatsachen. Also ein Satz der Syntax.

1 (V): so ~~hei~~
 2 (V): *Anwendbarkeit*
 3 (O): eliptischen
 4 (O): Ellipsenfläche

5 (V): 1m“) hat keinen Sinn
 6 (V): und das wirft ein Licht auf den Sinn der Ausdrücke „Sinn haben“ und „etwas mit dem Satz meinen“.

The Concept of the Application of Arithmetic (Mathematics).

If we say: “It must be essential to mathematics that it can be applied” we mean that this *ability* to be applied¹ isn’t that of a piece of wood, of which I say “I’ll be able to use it for this or that”.

Geometry isn’t the science (natural science) of geometric planes, lines and points, as opposed, say, to some other science whose subject matter is gross physical lines, strips, surfaces, etc. and that states *their* properties. The connection between geometry and propositions of practical life, which are about strips, colour boundaries, edges and corners, etc. doesn’t consist in geometry’s speaking of things similar to what these propositions speak of, although geometry does speak about *ideal* edges and corners, etc.; rather, it consists in the connection between these propositions and their grammar. Applied geometry is the grammar of statements about spatial objects. The relation between what is called a geometrical line and a boundary between two colours isn’t like the relation between something fine and something coarse, but like the relation between possibility and actuality. (Think of understanding possibility as the shadow of actuality.)

You can describe a circular surface divided by diameters into 8 congruent parts, but it makes no sense to give such a description of an elliptical surface. And therein is contained what geometry says in this respect about circular and elliptical surfaces.

[A proposition based on a false calculation (such as “He cut a board that was 3 metres long into 4 one-metre parts”) is nonsensical,² and that throws light on what is meant by “making sense” and “meaning something by a proposition”.³]

What about the proposition “The sum of the angles of a triangle is 180 degrees”? As hard as you try, you can’t tell by looking at it that it is a proposition of syntax.

The proposition “corresponding angles are equal” means that if they aren’t found to be equal when they are measured I will declare the measurement incorrect; and “the sum of the angles of a triangle is 180 degrees” means that if it doesn’t turn out to be 180 degrees when they are measured I will assume there has been a mistake in the measurement. So the proposition is a postulate about the way of describing facts, and therefore a proposition of syntax.

1 (V): this *applicability*

2 (V): parts”) makes no sense,

3 (V): and that throws light on the sense of the expressions “making sense” and “meaning something by a proposition”.

Über Kardinalzahlen.

On Cardinal Numbers.

Kardinalzahlenarten.

569

Was die Zahlen sind? – Die Bedeutungen der Zahlzeichen; und die Untersuchung dieser Bedeutung ist die Untersuchung der Grammatik der Zahlzeichen.

Wir suchen nicht nach einer Definition des Zahl-Begriffs, sondern versuchen eine Darlegung der Grammatik des Wortes „Zahl“ und der Zahlwörter.¹

Es gibt unendlich viele Kardinalzahlen, weil *wir* dieses unendliche System konstruieren und es das der Kardinalzahlen nennen. Es gibt auch ein Zahlensystem „1, 2, 3, 4, 5, viele“ und auch eines: „1, 2, 3, 4, 5“.² Und³ warum sollte ich das nicht auch ein System von Kardinalzahlen nennen? (und also ein endliches).

570 Daß das axiom of infinity nicht ist, wofür Russell es gehalten hat, daß es weder ein Satz der Logik, noch auch – wie es da steht – ein Satz der Physik ist, ist klar. Ob der Kalkül damit, in eine ganz andre Umgebung gebracht (in ganz anderer „Interpretation“), irgendwo eine praktische Anwendung finden könnte, weiß ich nicht.

Von den logischen Begriffen, z.B. von dem (oder: einem) der Unendlichkeit, könnte man sagen: ihre Essenz beweise ihre Existenz.

(Frege hätte noch gesagt: „es gibt vielleicht Menschen,⁴ die in der Kenntnis der Kardinalzahlenreihe nicht über die 5 hinausgekommen sind (und etwa das Übrige der Reihe nur in unbestimmter Form sehen), aber diese Reihe existiert unabhängig von uns“. Existiert das Schachspiel unabhängig von uns, oder nicht? –)

Eine sehr interessante Erwägung über die Stellung des Zahlbegriffs in der Logik ist die: Wie ist⁵ es mit dem Zahlbegriff, wenn ein Volk keine Zahlwörter besitzt, sondern sich zum Zählen, Rechnen, etc. *ausschließlich* eines Abacus bedient, etwa der Russischen Rechenmaschine?⁶

(Nichts wäre interessanter, als die Arithmetik dieser Menschen zu untersuchen und man verstünde wirklich, daß es hier keinen Unterschied zwischen 20 und 21 gibt.)⁷

Könnte man auch eine Zahlenart den Kardinalzahlen entgegensetzen, deren Reihe der der Kardinalzahlen ohne der 5 entspräche? Oh ja: nur wäre diese Zahlenart zu *nichts* zu brauchen, wozu die Kardinalzahlen es sind. Und die 5 fehlt diesen Zahlen nicht, wie ein Apfel, den man aus einer Kiste voller Äpfel herausgenommen⁸ hat und wieder hineinlegen kann, sondern die 5 fehlt dem Wesen dieser Zahlen; sie *kennen* die 5 nicht (wie die

1 (V): sondern nach einer Klärung der Grammatik des Wortes „Zahl“ und der Zahlwörter.

2 (O): 4, 5,“.

3 (V): Und ~~W~~

4 (V): Völker,

5 (V): steht

6 (V): sondern sich statt dieser *immer* eines Abacus bedient, etwa einer Russischen Rechenmaschine?

7 (V): daß hier kein Unterschied zwischen 20 und 21 existiert // besteht.)

8 (V): genommen

Kinds of Cardinal Numbers.

What are numbers? – The meanings of numerals. And an investigation of this meaning is an investigation of the grammar of numerals.

We aren't looking for a definition of the concept of number; rather, we're attempting an exposition¹ of the grammar of the word "number" and of the numerals.

There are infinitely many cardinal numbers because *we* construct this infinite system and call it the system of cardinal numbers. There is also a number system "1, 2, 3, 4, 5, many" and even a system "1, 2, 3, 4, 5". And why shouldn't I call that too a system of cardinal numbers (and thus a finite one)?

It is clear that the axiom of infinity is not what Russell took it for; that it is neither a proposition of logic, nor – as it stands – a proposition of physics. Whether this means that the calculus to which it belongs, if it were transplanted into quite different surroundings (with an entirely different "interpretation"), could find a practical application somewhere, I do not know.

One could say of logical concepts, for example, of the (or a) concept of infinity: Their essence proves their existence.

(Frege would have insisted: "Perhaps there are people² who have not got beyond the first five in their knowledge of the series of cardinal numbers (and perhaps see the rest of the series only in an indeterminate form), but this series exists independently of us". Does the game of chess exist independently of us, or not? –)

Here is a very interesting consideration about the position of the concept of number in logic: What happens to the concept of number if a people have no numerals, but for counting, calculating, etc. use an abacus, say a Russian abacus, *exclusively*?³

(Nothing would be more interesting than to investigate the arithmetic of these people; and one would really understand that here there is no distinction⁴ between 20 and 21.)

Could one also – in contrast to the cardinal numbers – set up a kind of number whose series corresponded to the series of cardinal numbers without the 5? Certainly; only this kind of number could be used for *none* of the things we use the cardinal numbers for. And these numbers are not missing the five like an apple that was taken out of⁵ a box full of apples and can be put back again; rather they are essentially missing a 5; the numbers do not *know*

1 (V): we're seeking a clarification

2 (V): peoples

3 (V): but instead of these *always* use an abacus, say a Russian abacus?

4 (V): here no distinction exists

5 (V): taken from

571 Kardinalzahlen die Zahl $\frac{1}{2}$ nicht kennen). Angewendet würden also diese Zahlen (wenn man sie so nennen will) in einem Fall, in dem die Kardinalzahlen (mit der 5) nicht mit Sinn angewendet werden könnten.

(Zeigt sich hier nicht die Unsinnigkeit des Geredes von der „Grundintuition“?)

Wenn die Intuitionisten von der „Grundintuition“ sprechen, – ist diese ein psychologischer Prozeß? Und wie kommt er dann in die Mathematik? Oder ist, was sie meinen, nicht doch nur ein Urzeichen (im Sinne Freges); ein Bestandteil eines Kalküls?

So seltsam es klingt, so ist es möglich, die Primzahlen bis – sagen wir – zur 7 zu kennen und daher ein endliches System von Primzahlen zu besitzen. Und was wir die Erkenntnis nennen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, ist in Wahrheit die Erkenntnis eines neuen, und mit dem andern gleichberechtigten, Systems.⁹

Wenn man bei geschlossenen Augen ein Flimmern sieht, unzählige Lichtpünktchen, die kommen und verschwinden, – wie man es etwa beschreiben würde – so hat es keinen Sinn, hier von einer „Anzahl“ der zugleich gesehenen Pünktchen zu reden. Und man kann nicht sagen „es sind immer eine bestimmte Anzahl von Lichtpünktchen da, wir wissen sie bloß nicht“; dies entspräche einer Regel, die dort angewandt wird, wo von einer Kontrolle dieser Anzahl gesprochen werden kann.

572 |Es hat Sinn zu sagen: Ich verteile viele unter viele. Aber der Satz „ich konnte die vielen Nüsse nicht unter die vielen Menschen verteilen“ kann nicht heißen, daß es logisch unmöglich war. Man kann auch nicht sagen: „in manchen Fällen ist es möglich, viele unter viele zu verteilen und in manchen nicht“; denn darauf frage ich: in *welchen* Fällen ist dies möglich und in welchen unmöglich? und darauf könnte nicht mehr im Viele-System geantwortet werden. |

Von einem Teil meines Gesichtsfeldes zu sagen, er habe keine Farbe, ist Unsinn; ebenso – natürlich auch – zu sagen, er habe Farbe (oder, eine Farbe). Andererseits¹⁰ hat es Sinn zu sagen, er habe nur *eine* Farbe (sei einfarbig, oder *gleichfärbig*), er habe mindestens zwei Farben, nur zwei Farben, u.s.w.

Ich kann also in dem Satz „dieses Viereck in meinem Gesichtsfeld hat mindestens zwei Farben“ statt „zwei“ nicht „eine“ substituieren. Oder auch: „das Viereck hat nur eine Farbe“ heißt nicht – analog $(\exists x).\phi x \ \& \ \sim(\exists x, y).\phi x \ \& \ \phi y$ – „das Viereck hat eine Farbe, aber nicht zwei Farben“.

573 Ich rede hier von dem Fall, in welchem¹¹ es sinnlos ist zu sagen,¹² „der Teil des Raumes hat¹³ keine Farbe“. Wenn ich die gleichfärbigen (einfärbigen) Flecke in dem Viereck zähle, so hat es übrigens Sinn zu sagen, es seien keine solchen vorhanden, wenn die Farbe des Vierecks sich kontinuierlich ändert. Es hat dann natürlich auch Sinn zu sagen, in dem Viereck sei „ein gleichfärbiger Fleck oder mehrere“ und auch, das Viereck habe eine Farbe aber nicht zwei Farben. – Von diesem Gebrauch aber des Satzes „das Viereck hat keine Farbe“ sehe ich jetzt ab und spreche von einem System, in welchem, daß eine Figur¹⁴ eine Farbe hat, selbstverständlich genannt wird,¹⁵ also,¹⁶ richtig ausgedrückt, in welchem es diesen Satz nicht

9 (O): System.

10 (V): eine Farbe). Wohl aber

11 (V): dem

12 (V): sagen+

13 (V): habe

14 (V): daß eine Fläche // ein Viereck // ein Flächenstück

15 (V): selbstverständlich ist

16 (O): wird also,

the 5 (in the way that the cardinal numbers do not know the number $\frac{1}{2}$). So these numbers (if you want to call them that) would be applied in cases where the cardinal numbers (with the 5) couldn't be applied sensibly.

(Doesn't this show the absurdity of the talk about "basic intuition"?)

When the intuitionists speak of a "basic intuition" – is this a psychological process? And if so, how does it get into mathematics? Or isn't what they mean only a primitive sign (in Frege's sense); an element of a calculus?

Strange as it sounds, it is possible to know the prime numbers up to – let's say – 7, and thus to have a finite system of prime numbers. And what we call the realization that there are infinitely many primes is in truth the realization of a new system that is as justified as the other.

If you close your eyes and see a twinkling – countless little points of light coming and vanishing, as we might describe it – it doesn't make any sense to speak of a "number" of simultaneously seen little points. And you can't say "There is always a definite number of little points of light here, we just don't know what it is"; that would correspond to a rule that is applied in a case where you can speak of checking this number.

[It makes sense to say: I distribute many among many. But the proposition "I couldn't distribute the many nuts among the many people" can't mean that it was logically impossible. Neither can you say: "In some cases it is possible to distribute many among many and in some it isn't"; for, in response to that, I ask: in *which* cases is this possible and in which impossible? And to that no further answer could be given in the many-system. |

To say of a part of my visual field that it has no colour is nonsense; and of course it is equally nonsensical to say that it has colour (or a colour). On the other hand it⁶ does make sense to say that it has only *one* colour (is monochrome, or *isochromatic*), or that it has at least two colours, only two colours, etc.

So in the proposition "This rectangle in my visual field has at least two colours" I cannot substitute "one" for "two". Or again: "The rectangle has only one colour" does not mean – on the analogy of $(\exists x).\phi x$ & $\sim(\exists x, y).\phi x$ & ϕy – "The rectangle has one colour but not two colours".

I am speaking here of the case in which it is senseless to say⁷ "That part of space has no colour". If I count the isochromatic (monochrome) spots in the rectangle, it does incidentally make sense to say that there aren't any there if the colour of the rectangle is continually changing. In that case, of course, it also makes sense to say that there are "one or more isochromatic spots" in the rectangle, and also that the rectangle has one colour but not two. – But for the moment I am disregarding that use of the proposition "The square has no colour", and am speaking of a system in which we say it is self-evident⁸ that a figure⁹ has a colour, and therefore, correctly expressed, of a system in which this proposition doesn't exist.¹⁰ If you call the proposition self-evident you really mean what is expressed by a grammatical

6 (V): But it

7 (V): to say:

8 (V): in which it is self-evident

9 (V): a surface // a rectangle // a piece of a surface

10 (V): in which this proposition is nonsense.

gibt.¹⁷ Wenn man den Satz selbstverständlich nennt, so meint man eigentlich dasjenige,¹⁸ was eine grammatische Regel ausdrückt, die die Form der Sätze über den Gesichtsraum, z.B., beschreibt. Wenn man nun die Zahlangabe der Farben im Viereck mit dem Satz „in dem Viereck ist eine Farbe“ beginnt, dann darf das natürlich nicht der Satz der Grammatik über die „Färbigkeit“ des Raumes sein.

Was meint man, wenn man sagt „der Raum ist färbig“? (Und, eine sehr interessante Frage: welcher Art ist diese Frage?) Nun, man sieht etwa zur Bestätigung herum und blickt auf die verschiedenen Farben um sich her und möchte etwa sagen: wohin ich schaue, ist eine Farbe. Oder: Es ist doch alles färbig, alles sozusagen angestrichen. Man denkt sich hier die Farben im Gegensatz zu einer Art (von) Farblosigkeit, die aber bei näherem Zusehen wieder zur Farbe wird. Wenn man übrigens zur Bestätigung sich umsieht, so schaut man vor allem auf ruhige und einfarbige Teile des Raumes und lieber nicht auf unruhige,¹⁹ unklar gefärbte (fließendes Wasser, Schatten, etc.). Muß man sich dann gestehen, daß man eben alles Farbe nennt, was man sieht, so will man es nun als eine Eigenschaft des Raumes an und für sich (nicht mehr der Raunteile) aussagen, daß er färbig sei. Das heißt aber, vom Schachspiel zu sagen, daß es das Schachspiel sei und es kann nun nur auf eine Beschreibung des Spiels hinauslaufen. Und nun kommen wir zu einer Beschreibung der räumlichen Sätze; aber ohne (eine) Begründung, und als müßte man sie mit einer andern Wirklichkeit in Übereinstimmung bringen.

Zur Bestätigung des Satzes „der Gesichtsraum ist färbig“ sieht man sich (etwa) um und sagt: das hier ist schwarz, und schwarz ist eine Farbe; das ist weiß, und weiß ist eine Farbe; u.s.w. „Schwarz ist eine Farbe“ aber faßt man so auf, wie „Eisen ist ein Metall“²⁰ (oder vielleicht besser „Gips ist eine Schwefelverbindung“).

Mache ich es sinnlos zu sagen, ein Teil des Gesichtsraumes habe keine Farbe, so wird die (Frage nach der) Analyse der Angabe der Zahl der Farben in einem Teil des Gesichtsraumes ganz ähnlich der, der Angabe der Zahl der Teile eines Vierecks, etwa, das ich durch Striche in begrenzte Flächenteile teile.

Auch hier kann ich es als sinnlos ansehen, zu sagen, das Viereck „bestehe aus 0 Teilen“. Man kann daher nicht sagen, es bestehe „aus einem oder mehreren Teilen“, oder es „habe mindestens *einen* Teil“. Denken wir uns den speziellen Fall eines Vierecks, das durch parallele Striche geteilt ist. Daß dieser Fall sehr speziell ist, macht (uns) nichts, denn wir halten ein Spiel nicht für weniger bemerkenswert, weil es nur eine sehr beschränkte

Anwendung hat.²¹ Ich kann hier die Teile entweder so zählen, wie es gewöhnlich geschieht, und dann heißt es nichts, zu sagen, es seien 0 Teile vorhanden. Ich könnte aber auch eine Zählung denken, die

den ersten Teil sozusagen als selbstverständlich ansieht und ihn nicht zählt oder als 0, und die nur die Teile hinzuzählt, die hinzugeteilt wurden. Andererseits könnte man sich ein Herkommen denken, nach dem etwa Soldaten in Reih und Glied immer mit der Anzahl von Soldaten gezählt werden, welche über *einen* Soldaten angetreten sind (etwa, indem die Anzahl der möglichen Kombinationen des Flügelmanns und eines andern Soldaten der Reihe angegeben werden soll). Aber auch ein Herkommen könnte existieren, wonach die Anzahl der Soldaten immer um 1 größer als die wirkliche angegeben wird. Das wäre etwa ursprünglich geschehen, um einen bestimmten Vorgesetzten über die wirkliche Zahl zu täuschen, dann aber habe es sich als Zählweise für Soldaten eingebürgert. (Akademisches

17 (V): in welchem dieser Satz Unsinn ist.

18 (V): das,

19 (V): bewegte,

20 (V): Metall“.

21 (F): MS 113, S. 10v.

rule that describes the form of propositions about visual space, for instance. If you now begin a statement of the number of colours in the rectangle with the proposition “There is one colour in the rectangle”, then of course that can’t be a grammatical proposition about the “colouredness” of space.

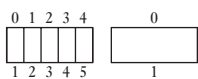
What do we mean when we say “space is coloured”? (And, a very interesting question: what kind of a question is this?) Well, perhaps you look around for confirmation and look at the different colours around you and feel the inclination to say, for instance: Wherever I look there’s a colour. Or: Everything is coloured, everything painted, as it were. Here you are imagining colours in contrast to a kind (of) colourlessness, which on closer inspection, however, itself becomes a colour. Incidentally, when you look around for confirmation you look first and foremost at static and monochromatic parts of space, and you prefer not to look at busy,¹¹ unclearly coloured parts (flowing water, shadows, etc.). If you then have to admit to yourself that you simply call everything that you see colour, that’s when you want to declare being coloured an inherent property of space (and no longer only of the parts of space). But that amounts to the same as saying of chess that it is chess; and then it can only boil down to a description of the game. And now we arrive at a description of spatial propositions; but without (any) reasons for them, and as if we had to bring them into agreement with another reality.

In order to confirm the proposition “visual space is coloured” one might look around and say: This is black, and black is a colour; that is white, and white is a colour, etc. But “black is a colour” is understood like “iron is a metal”¹² (or perhaps better, “gypsum is a sulphur compound”).

If I make it senseless to say that a part of visual space has no colour, then (asking for) the analysis of a statement of the number of colours in a part of visual space becomes very much like asking for the analysis of a statement of the number of parts of a rectangle, for instance, that I mark off into areas with lines.

Here too I can regard it as senseless to say that the rectangle “consists of 0 parts”. Therefore one cannot say that it consists “of one or more parts”, or that it “has at least *one* part”. Let’s imagine the special case of a rectangle divided by parallel lines. It doesn’t matter to us that this case is quite special, for we don’t regard a game as less remarkable just because it has

only a very limited application.¹³ Here I can count the parts in the usual way, and then it is meaningless to say there are 0 parts there. But I could also imagine a way of counting which regards the first part as a matter of course, so to speak, and doesn’t count it or counts it as 0, and which counts only those parts that were added on. On the other hand, one could imagine a custom according to which, say, soldiers in rank and file are always counted by giving the number of soldiers who have fallen in over and above *the first* soldier (perhaps because we’re supposed to give the number of possible combinations of the flank-man with another soldier of the rank). But there could also be a custom of always giving the number of soldiers as 1 greater than the real one. Perhaps this happened originally in order to deceive a particular officer about the real number, but later came into general use as a way of counting soldiers. (The



11 (V): moving,
12 (V): metal”.

13 (F): MS 113, p. 10v.

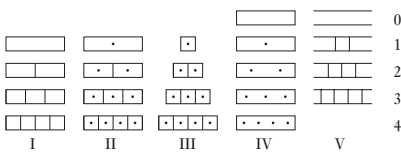
Viertel.) Die Anzahl der verschiedenen Farben in einer Fläche könnte²² auch²³ durch die Anzahl der möglichen Kombinationen zu zwei Gliedern angegeben werden. Und dann kämen für diese Anzahl nur die Zahlen $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ in Betracht und es wäre dann sinnlos, von 2 oder 4 Farben in einer Fläche zu reden, wie jetzt von $\sqrt{2}$ oder i Farben. Ich will sagen, daß nicht die Kardinalzahlen wesentlich primär und die – nennen wir's – Kombinationszahlen $1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 24$ etc. sekundär sind. Man könnte auch eine Arithmetik der Kombinationszahlen konstruieren und diese wäre in sich so geschlossen, wie die Arithmetik der Kardinalzahlen. Aber ebenso natürlich kann es eine Arithmetik der geraden Zahlen oder der Zahlen 1, 3, 4, 5, 6, 7 . . . geben. Es ist natürlich das Dezimalsystem zur Schreibung dieser Zahlenarten ungeeignet.

Denken wir uns eine Rechenmaschine, die, anstatt mit Kugeln, mit Farben in einem Streifen rechnet. Und während wir jetzt auf unserm Abacus²⁵ mit Kugeln, oder den Fingern, die Farben in einem Streifen zählen, so würden wir dann die Kugeln auf einer Stange, oder die Finger an unserer Hand, mit Farben in einem Streifen zählen. Wie aber müßte diese Farbenrechenmaschine konstruiert sein, um funktionieren zu können? Wir brauchten ein Zeichen dafür, daß keine Kugeln an der Stange sitzen. Man muß sich den Abacus als ein Gebrauchsinstrument denken und als Mittel der Sprache. Und, so, wie man etwa 5 durch die fünf Finger einer Hand darstellen kann (man denke an eine Gebärdensprache), so würde man es durch den Streifen mit 5 Farben darstellen. Aber für die 0 brauche ich ein Zeichen, sonst habe ich die nötige Multiplizität nicht. Nun, da kann ich entweder die Bestimmung treffen, daß die Fläche²⁶ schwarz die 0 bezeichnen soll (dies ist natürlich willkürlich und die einfarbige rote Fläche täte es ebensogut); oder aber die einfarbige Fläche soll 0 bezeichnen, die zweifarbige 1, etc. Es ist ganz gleichgültig, welche Bezeichnungsweise ich wähle. Und man sieht hier, wie sich die Mannigfaltigkeit der Kugeln auf die Mannigfaltigkeit der Farben in einer Fläche projiziert.



²⁷Es hat keinen Sinn, von einem schwarzen Zweieck im weißen Kreis zu reden; und dieser Fall ist analog dem: es ist sinnlos zu sagen, das Viereck bestehe aus 0 Teilen (keinem Teil).

Hier haben wir etwas, wie eine untere Grenze des Zählens, noch ehe wir die Eins erreichen.



²⁸Ist Teile Zählen in I das Gleiche, wie Punkte Zählen in IV? Und worin besteht der Unterschied? Man kann das Zählen der Teile in I auffassen als ein Zählen von Vierecken. Dann kann man aber auch sagen „in dieser Zeile ist *kein*

Viereck“; und dann zählt man nicht *Teile*. Es beunruhigt uns die Analogie zwischen dem Zählen der Punkte und der Teile, und das Versagen²⁹ dieser Analogie.

Darin, die ungeteilte Fläche als „Eins“ zu zählen, ist etwas Seltsames; dagegen finden wir keine Schwierigkeit darin, die einmal geteilte als Bild der 2 zu sehen. Man möchte hier viel lieber zählen „0, 2, 3, etc.“. Und dies entspricht der Satzreihe:³⁰ „das Viereck ist ungeteilt“, „das Viereck ist in 2 Teile geteilt“, etc.

22 (O): könne

23 (V): ~~man~~

24 (F): MS 113, S. 11v.

25 (O): Abacuu

26 (V): Farbe

27 (F): MS 113, S. 37r.

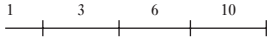
28 (F): MS 113, S. 36v–37r.

29 (V): ~~Auslassen~~

30 (V): ~~Zahlenreihe:~~

576

577

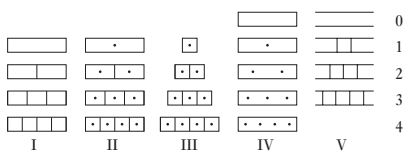
academic quarter-hour). The number of different colours on a surface could also be given by the number of their possible combinations in pairs. And in that case the only numbers that would be considered would be numbers of the form $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$, and then it would be senseless to talk of 2 or 4 colours on a surface, as it now is to talk of $\sqrt{2}$ or i colours. I want to say that it is not the case that the cardinal numbers are essentially primary and that what we might call the combination numbers – 1 3 6 10 etc. – ¹⁴are secondary. We could also construct an arithmetic of  the combination numbers and it would be just as self-contained as the arithmetic of the cardinal numbers. But just as naturally there can be an arithmetic of the even numbers, or of the numbers 1, 3, 4, 5, 6, 7. . . . Of course the decimal system is unsuited for writing these kinds of numbers.

Let’s imagine a calculating machine that calculates with colours on a strip of paper instead of with beads. And whereas we now use the beads on our abacus or our fingers to count the colours on a strip, we would then use the colours on a strip to count the beads on a bar or the fingers on our hand. But how would this colour-calculating machine have to be constructed in order to work? We would need a sign for there being no beads on the bar. We must imagine the abacus as a practical tool and as an instrument of language. And just as we can represent, say, 5 by the five fingers of a hand (think of a gesture-language) so we would then represent it by a strip with five colours. But I need a sign for the 0. Otherwise I do not have the necessary multiplicity. Well, I can either stipulate that a black surface¹⁵ is to denote the 0 (this is of course arbitrary, and a monochromatic red surface would do just as well); or that any one-coloured surface is to denote 0, a two-coloured surface 1, etc. It is completely immaterial which method of denotation I choose. And we see here how the multiplicity of the beads is projected onto the multiplicity of the colours on a surface.



¹⁶It makes no sense to speak of a black figure with two angles in a white circle; and this is analogous to its being senseless to say that the rectangle consists of 0 parts (no part).

Here we have something like a lower limit of counting, even before we reach the number one.



¹⁷Is counting parts in I the same as counting dots in IV? And what does the difference consist in? We can regard counting the parts in I as counting rectangles. But in that case one can also say: “In this row there is *no* rectangle”; and then one

isn’t counting *parts*. We are disturbed both by the analogy between counting the dots and counting the parts, and by the failure of this analogy.

There is something odd in counting the undivided surface as “one”; on the other hand we find no difficulty in seeing a surface that has been divided once as a picture of 2. Here we would much prefer to count “0, 2, 3”, etc. And this corresponds to the series of propositions¹⁸ “The rectangle is undivided”, “The rectangle is divided into 2 parts”, etc.

14 (F): MS 113, p. 11v.
 15 (V): colour
 16 (F): MS 113, p. 37r.

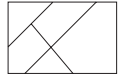
17 (F): MS 113, pp. 36v–37r.
 18 (V): ~~numbers~~

Das Natürlichste ist, die Reihe der Schemata \vee aufzufassen als

A
A B
A B C
A B C D
etc.

Und hier kann man nun das³¹ erste Schema mit „0“ bezeichnen, das zweite mit „1“, das dritte aber etwa mit „3“, wenn man an alle möglichen Unterschiede denkt, und das vierte mit „6“. Oder man nennt das dritte Schema „2“ (wenn man sich bloß um *eine* Anordnung kümmert) und das vierte „3“.

³²Man kann die Teiligkeit des Vierecks beschreiben, indem man sagt: es ist in 5³³ Teile geteilt, oder: es sind 4 Teile davon abgetrennt worden, oder: es hat das Teilungsschema ABCDE, oder: man kommt durch alle Teile, indem man 4 Grenzen passiert, oder: das Viereck ist geteilt (d.h. in 2 Teile), der eine Teil wieder geteilt und beide Teile *dieser* Teilung geteilt, – etc.



Ich will zeigen, daß nicht nur *eine* Methode besteht, die Teiligkeit zu beschreiben.

578 Man wird sich aber vielleicht auch enthalten, den Unterschied überhaupt mit einer Zahl zu bezeichnen, sondern sich ganz an die Schemata A, AB, ABC, etc. halten. Oder es auch so beschreiben: 1, 12, 123, etc., oder, was auf das Gleiche hinauskommt: 0, 01, 012, etc.

Diese kann man sehr wohl auch Zahlzeichen nennen.

Die Schemata: A, AB, ABC, etc.; 1, 12, 123, etc.; |, ||, |||, etc.; □, □□, □□□, □□□□,³⁴ etc.; 0, 1, 2, 3, etc.; 1, 2, 3, etc.; 1, 12, 121323, etc.; etc. – sind alle gleich fundamental.

Man wundert sich nun darüber, daß das Zahlenschema, mit welchem man Soldaten in einer Kaserne zählt, nicht auch für die Teile eines Vierecks gelten soll. Aber das Schema der Soldaten in der Kaserne ist³⁵ □, □□, □□□, das der Teile des Vierecks³⁶ □□, □□□, □□□□. Keines ist im Vergleich zum andern primär.

Ich kann die Reihe der Teilungsschemata sowohl mit der Reihe 1, 2, 3, etc. als auch mit der Reihe 0, 1, 2, 3, etc. vergleichen.

Zähle ich die Teile, so gibt es in meiner Zahlenreihe keine 0, denn die Reihe

A
A B
A B C
etc.

fängt mit *einem* Buchstaben an, während die Reihe □, □□, □□□,³⁷ etc. nicht mit *einem* Punkt anfängt. Ich kann dagegen auch mit dieser Reihe alle Tatsachen der Teilung darstellen, nur „zähle ich dann nicht die Teile“.

579 Unrichtig ausgedrückt, aber so, wie man es zunächst ausdrücken würde, lautet das Problem: „warum kann man sagen ‚es gibt 2 Farben auf dieser Fläche‘ und nicht ‚es gibt *eine* Farbe auf dieser Fläche?“. Oder: wie muß ich die grammatische Regel ausdrücken, daß ich nicht mehr versucht bin Unsinniges zu sagen, und daß sie mir selbstverständlich ist? Wo liegt der

31 (V): ~~die~~
32 (F): MS 113, S. 38v.
33 (V): fünf
34 (F): MS 113, S. 39r.

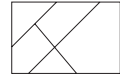
35 (F): MS 113, S. 39v.
36 (F): MS 113, S. 39v.
37 (F): MS 113, S. 40v.

The most natural thing is to conceive of the series of schemata \vee as

- A
- A B
- A B C
- A B C D
- etc.

And here we can call the first schema “0”, the second “1”, but the third say “3”, if we think of all possible differences, and the fourth “6”. Or we call the third schema “2” (if we are concerned simply with *one* arrangement) and the fourth “3”.

¹⁹We can describe the way a rectangle is divided by saying: It is divided into ⁵₂₀ parts, or: Four parts have been cut out of it, or: Its division-schema is ABCDE, or: You can traverse all the parts by crossing 4 boundaries or: The rectangle is divided (i.e. into 2 parts), one part is subdivided, and both parts of *this* division are subdivided – etc.



I want to show that there isn’t only *one* method of describing the way it’s divided.

But perhaps we’ll refrain altogether from using a number to denote the distinction and keep instead just to the schemata A, AB, ABC, etc.; or we’ll describe it like this: 1, 12, 123, etc., or, what amounts to the same, 0, 01, 012, etc.

We can perfectly well call these numerals too.

The schemata A, AB, ABC, etc.; 1, 12, 123, etc.; |, ||, |||, etc.; □, □□, □□□, □□□□, ²¹etc.; 0, 1, 2, 3, etc.; 1, 2, 3, etc.; 1, 12, 121323, etc.; etc. – are all equally fundamental.

Now we are surprised that the number-schema by which we count soldiers in a barracks doesn’t also hold for the parts of a rectangle. But the schema for the soldiers in the barracks is □, □., □., ²²etc., the one for the parts of the rectangle is □□, □□□, □□□□. ²³ Neither is primary in comparison with the other.

I can compare the series of division-schemata with the series 1, 2, 3, etc. as well as with the series 0, 1, 2, 3, etc.

If I count the parts, then there is no 0 in my number series because the series

- A
- A B
- A B C
- etc.

begins with *one* letter whereas the series □, □., □., ²⁴etc. doesn’t begin with *one* dot. On the other hand, I can represent all the facts about the division by this series too, only “Then I’m not counting the parts”.

Expressed incorrectly, but as one would express it at first, the problem is: “Why can one say ‘There are 2 colours on this surface’ but not ‘There is *one* colour on this surface?’” Or: How must I express the grammatical rule so that I’m no longer tempted to talk nonsense and so that the rule is a matter of course for me? Where is the false thought, the false

19 (F): MS 113, p. 38v.

20 (V): five

21 (F): MS 113, p. 39r.

22 (F): MS 113, p. 39v.

23 (F): MS 113, p. 39v.

24 (F): MS 113, p. 40v.

falsche Gedanke, die falsche Analogie, durch die ich verführt werde, die Sprache unrichtig zu gebrauchen? Wie muß ich die Grammatik darstellen, daß diese Versuchung wegfällt? Ich glaube, daß die Darstellung durch die Reihen

A		
A B	und	·
A B C		··
u.s.w.		u.s.w.

³⁸die Unklarheit hebt.

Es kommt alles darauf an, ob ich mit einer Zahlenreihe zähle, die mit 0 anfängt, oder mit einer, die mit 1 anfängt.

So ist es auch, wenn ich die Längen von Stäben, oder die Größen von Hüten zähle.

Wenn ich mit Zählstrichen zähle, so könnte ich sie dann so schreiben: |, √, √, √, ³⁹um zu zeigen, daß es auf den Richtungsunterschied ankommt und der einfache Strich der 0 entspricht (d.h. der Anfang ist).

Es hat hier übrigens mit den Zahlzeichen (1), ((1) + 1), etc. eine gewisse Schwierigkeit: Nämlich die, daß wir sie nach einer gewissen Länge nicht mehr unterscheiden können, ohne die Striche zu zählen, also ohne die Zeichen in *andere* zu übersetzen. „|||||||||“ und „|||||||||“ kann man nicht in dem Sinne unterscheiden – sie sind also nicht in demselben Sinn verschiedene Zeichen – wie „10“ und „11“. Übrigens würde dasselbe natürlich auch im Dezimalsystem geschehen (denken wir an die Zahlen 111111111 und 1111111111), aber das ist nicht ohne Bedeutung. –

580 Denken wir uns den Fall, es gäbe uns Einer eine Rechenaufgabe in der Strichnotation, etwa: ||||||||||| + ||||||||||| und während wir rechneten machte er sich den Spaß, Striche, ohne daß wir es bemerkten, wegzuwischen und dazugeben. Er würde uns dann immer sagen „die Rechnung stimmt ja nicht“ und wir würden sie immer von Neuem durchlaufen, stets zum Narren gehalten. – Ja, streng genommen, ohne den Begriff eines Kriteriums der Richtigkeit der Rechnung. –

Hier könnte man nun Fragen aufwerfen, wie die: Ist es nun nur *sehr wahrscheinlich*, daß $464 + 272 = 736$ ist? Und ist also nicht auch $2 + 3 = 5$ nur sehr wahrscheinlich? Und wo⁴⁰ ist denn die objektive Wahrheit, der sich diese Wahrscheinlichkeit nähert? D.h., wie bekommen wir denn einen Begriff davon, daß $2 + 3$ eine gewisse Zahl wirklich ist, abgesehen von dem, was sie uns zu sein *scheint*? –

Wenn man nämlich fragen würde: was ist das Kriterium in der Strichnotation, daß wir zweimal das gleiche Zahlzeichen vor uns haben? – Die Antwort könnte sein: „wenn es beidemale gleich aussieht“, oder „wenn es beidemale die gleiche Anzahl von Strichen enthält“. Oder soll es heißen: wenn eine eins-zu-eins Zuordnung etc. möglich ist?

Wie kann ich wissen, daß ||||||| und ||||||| *dasselbe* Zeichen sind? Es genügt doch nicht, daß sie *ähnlich* aussehen. Denn es ist nicht die ungefähre Gleichheit der Gestalt, was die Identität der Zeichen ausmachen darf, sondern gerade eben die Zahlgleichheit.

| Das Problem der Unterscheidung von $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ und $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ist viel fundamentaler,⁴¹ als es auf den ersten Blick scheint. Es handelt sich um den Unterschied zwischen physikalischer und visueller Zahl. |

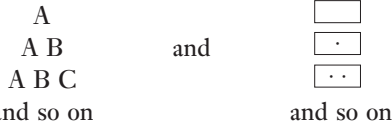
38 (F): MS 113, S. 41v.

39 (F): MS 113, S. 42r.

40 (V): was

41 (V): wichtiger,

analogy by which I am misled into using language incorrectly? How must I represent the grammar so that this temptation falls by the wayside? I believe that representing it with the series



²⁵removes the unclarity.

Everything depends on whether I count using a number series that begins with 0, or one that begins with 1.

That's also the way it is if I'm counting the lengths of sticks or the sizes of hats.

If I counted with tally lines, I could write them like this: |, √, ↘, ↙²⁶ in order to show that what matters is the *difference* in direction and that a simple line corresponds to 0 (i.e. is the beginning).

Here, incidentally, there is a certain difficulty with the numerals (1), ((1) + 1), etc.: beyond a certain length we can no longer distinguish them without counting the lines, i.e. without translating the signs into *different* ones. “|||||||||” and “|||||||||” can't be distinguished in the same sense as “10” and “11”, and so they aren't different signs in the same sense. Incidentally, the same thing could of course also happen in the decimal system (think of the numbers 111111111 and 111111111), and that is not without significance. –

Let's imagine that someone gave us a calculation problem to do in a stroke-notation, say ||||||| + |||||||, and while we were calculating he'd amuse himself by removing and adding strokes without our noticing. He'd keep on telling us: “But your calculation isn't right”, and we'd keep going through it again, fooled every time. – Indeed, strictly speaking, without any concept of a criterion for the correctness of the calculation. –

Here one could raise questions like: Is it only *very probable* that 464 + 272 = 736? And therefore isn't 2 + 3 = 5 also only very probable? And where²⁷ is the objective truth which this probability approaches? That is, how do we get a concept of 2 + 3 really *being* a certain number, apart from what *it seems* to us to be? –

For if it were asked: What is the criterion in the stroke-notation for our having the same numeral in front of us twice? – the answer could be: “If it looks the same both times” or “If it contains the same number of strokes both times”. Or should it be: If a one-to-one correlation, etc. is possible?

How can I know that ||||||| and ||||||| are *the same* sign? After all, it is not enough that they look *similar*. For having roughly the same *gestalt* mustn't be what constitutes the identity of the signs; rather it has to be precisely the sameness of their number.

| The problem of the distinction between 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 and 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 is much more fundamental²⁸ than appears at first sight. It is a matter of the distinction between physical and visual number. |

25 (F): MS 113, p. 41v.

26 (F): MS 113, p. 42r.

27 (V): what

28 (V): important

$$2 + 2 = 4.$$

581

Die Kardinalzahl ist eine interne Eigenschaft einer Liste.

Hat die Anzahl wesentlich etwas mit einem Begriff zu tun? Ich glaube, das kommt darauf hinaus, zu fragen, ob es einen Sinn hat, von einer Anzahl von Gegenständen zu reden, die nicht unter einen Begriff gebracht sind. Hat es z.B. Sinn zu sagen „a, b und c sind drei Gegenstände“? – Es ist allerdings ein Gefühl vorhanden, das uns sagt: Wozu von Begriffen reden, die Zahl hängt ja nur vom *Umfang* des Begriffes ab, und wenn der einmal bestimmt ist, so kann der Begriff sozusagen abtreten. Der Begriff ist¹ nur ein Hilfsmittel,² um einen Umfang zu bestimmen, der Umfang aber ist selbständig und in seinem Wesen unabhängig vom Begriff; denn es kommt ja auch nicht darauf an, durch welchen Begriff wir den Umfang bestimmt haben. Das ist das Argument für die extensive Auffassung. Dagegen kann man

582

zuerst sagen: Wenn der Begriff wirklich nur ein Hilfsmittel ist, um zum Umfang zu gelangen, dann hat der Begriff in der Arithmetik nichts zu suchen; dann muß man eben die Klasse gänzlich von dem zufällig mit ihr verknüpften Begriff scheiden. Im³ entgegengesetzten Fall aber ist der vom Begriff unabhängige Umfang nur eine Chimäre und dann ist es besser, von ihm überhaupt nicht zu reden, sondern nur vom Begriff.

Das Zeichen für den Umfang eines Begriffes ist eine Liste. Man könnte – beiläufig – sagen: die Zahl⁴ ist die externe Eigenschaft eines Begriffes und die interne seines Umfangs (der Liste der Gegenstände, die unter ihn fallen). Die Anzahl ist das Schema eines Begriffsumfangs. D.h.: die Zahlangabe ist, wie Frege sagte, die Aussage über einen Begriff (ein Prädikat). Sie bezieht sich nicht auf einen Begriffsumfang, d.i. auf eine Liste, die etwa der Umfang eines Begriffes sein kann. Aber die Zahlangabe über einen Begriff ist ähnlich dem Satz, welcher aussagt, daß eine bestimmte Liste der Umfang dieses Begriffes sei. Von so einer Liste wird Gebrauch gemacht, wenn ich sage: „a, b, c, d fallen unter den Begriff $F(x)$ “. „a, b, c, d“ ist die Liste. Natürlich sagt der Satz nichts anderes, als $Fa \ \& \ Fb \ \& \ Fc \ \& \ Fd$; aber er zeigt, mit Hilfe der Liste geschrieben, seine Verwandtschaft mit „ $(\exists x, y, z, u).Fx \ \& \ Fy \ \& \ Fz \ \& \ Fu$ “, welches wir kurz „ $(\exists | | | | x).F(x)$ “ schreiben können.

Die Arithmetik hat es mit dem Schema $| | |$ zu tun. – Aber redet denn die Arithmetik von Strichen, die ich mit Bleistift auf Papier mache? – Die Arithmetik redet nicht von den Strichen, sie *operiert* mit ihnen.

Die Zahlangabe enthält nicht immer eine Verallgemeinerung oder Unbestimmtheit: „Die Strecke AB ist in zwei (3, 4, etc.⁵) gleiche Teile geteilt“.

583

Wenn man wissen will, was „ $2 + 2 = 4$ “ heißt, muß man fragen, wie wir es (erhalten), es ausrechnen. Wir betrachten dann den Vorgang der Berechnung als das Wesentliche, und

1 (V): ist ein

2 (V): nur eine Methode,

3 (V): Im g

4 (V): Anzahl

5 (O): et.

116

$$2 + 2 = 4.$$

A cardinal number is an internal property of a list.

Is quantity inherently linked to concepts? I believe this amounts to asking whether it makes sense to speak about a quantity of things that haven't been brought under a concept. Does it, for example, make sense to say "a, b and c are three objects"? – Admittedly we have a feeling that says to us: Why talk about concepts, the number depends only on the *extension* of the concept, and once that has been determined the concept can make its exit, as it were. The concept is only an aid¹ for determining an extension, but the extension is autonomous and is essentially independent of the concept; for it's quite immaterial which concept we have used to determine the extension. That is the argument for the extensional viewpoint. The first objection to it is: if a concept really is only an aid for getting to an extension, then there's no place for concepts in arithmetic; in that case we must simply divorce a class completely from the concept that happens to be linked to it. But if the opposite is true, then an extension independent of the concept is just a chimera, and in that case it's better not to speak of it at all, but only of the concept.

The sign for the extension of a concept is a list. We could say, as an approximation, that number² is an external property of a concept and an internal property of its extension (of the list of objects that fall under it). A number is a schema for the extension of a concept. That is: as Frege said, a statement of number is a statement about a concept (a predicate). It doesn't refer to an extension of a concept, i.e. to a list that may be something like the extension of a concept. But a number-statement about a concept is similar to a proposition saying that a determinate list is the extension of this concept. I use such a list when I say "a, b, c, d fall under the concept $F(x)$ ": "a, b, c, d" is the list. Of course this proposition says nothing more than $Fa \ \& \ Fb \ \& \ Fc \ \& \ Fd$; but when it's written with the help of the list, the proposition shows its relationship to " $(\exists x, y, z, u).Fx \ \& \ Fy \ \& \ Fz \ \& \ Fu$ ", which we can abbreviate as " $(\exists | | | x).F(x)$ ".

Arithmetic is concerned with the schema $| | |$. – But does arithmetic talk about strokes that I draw with a pencil on paper? – Arithmetic doesn't talk about the strokes, it *operates* with them.

A statement of number doesn't always contain a generalization or indeterminacy: "The line AB is divided into two (3, 4, etc.) equal parts".

If you want to know what $2 + 2 = 4$ means, you have to ask how we arrive at it, how we calculate it. In that case we view the process of calculation as what's essential; and this is

1 (V): is only a method

2 (V): quantity

diese Betrachtungsweise ist die des gewöhnlichen Lebens, wenigstens, was die Zahlen anbelangt, für die wir einer⁶ Ausrechnung bedürfen. Wir dürfen uns ja nicht schämen, die Zahlen⁷ und Rechnungen so aufzufassen, wie sie die alltägliche Arithmetik jedes Kaufmanns auffaßt. Wir rechnen dann $2 + 2 = 4$ und überhaupt die Regeln des kleinen Einmaleins gar nicht aus, sondern nehmen sie – sozusagen als Axiome – an und rechnen nur *mit ihrer Hilfe*. Wir könnten aber natürlich auch $2 + 2 = 4$ ausrechnen und die Kinder tun es auch durch Abzählen. Gegeben die Ziffernfolge 1 2 3 4 5 6, ist die Ausrechnung:

1 2 1 2
1 2 3 4 .

Definitionen zur Abkürzung:⁸

$(\exists x). \phi x$.&. $\sim(\exists x, y). \phi x \ \& \ \phi y$ Def. $(\epsilon x). \phi x$

$(\exists x, y). \phi x \ \& \ \phi y$.&. $\sim(\exists x, y, z) \phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z$ Def. $(\epsilon x, y). \phi x \ \& \ \phi y$, u.s.w.

$(\epsilon x). \phi x$ Def. $(\epsilon | x) \phi x$

$(\epsilon x, y). \phi x \ \& \ \phi y$.=. $(\epsilon | x) \phi x$.=. $(\epsilon 2x) \phi x$, u.s.w.

584 Man kann zeigen daß

$(\epsilon | x) \phi x \ \& \ (\epsilon | | x) \psi x \ \& \ \underbrace{\sim(\exists x). \phi x \ \& \ \psi x}_{\text{Ind.}} \ .\supset. \ (\epsilon | | | | x) \phi x \ \vee \ \psi x$ eine Tautologie ist.

Ind.

Hat man damit den arithmetischen Satz $2 + 3 = 5$ demonstriert? Natürlich nicht. Man hat auch nicht gezeigt, daß $(\epsilon | x) \phi x \ \& \ (\epsilon | | x) \psi x \ \& \ \text{Ind.} \ .\supset. \ (\epsilon | | + | | | x) \phi x \ \vee \ \psi x$ ⁹ tautologisch ist, denn von einer Summe „|| + |||“ war in unsern Definitionen ja¹⁰ gar keine Rede. (Ich werde die Tautologie zur Abkürzung in der Form „ $\epsilon | | \ \& \ \epsilon | | | \ \supset \ \epsilon | | | |$ “ schreiben.) Wenn nun die Frage ist, welche Anzahl von Strichen rechts von „ \supset “ bei gegebener linker Seite das Ganze zu einer Tautologie macht,¹¹ so kann man diese Zahl finden, man kann auch finden, daß sie im vorigen Fall $|| + |||$ ist, aber genau so gut, daß sie $| + |||$ oder $| + ||| + |$ ist, denn sie ist dies alles. Man kann aber auch eine Induktion finden, die zeigt, daß – algebraisch ausgedrückt – $E_n \ \& \ E_m \ .\supset. \ E(n + m)$ tautologisch wird. Dann habe ich z.B. ein Recht, $E_{17} \ \& \ E_{28} \ .\supset. \ E(17 + 28)$ als Tautologie anzusehen. Aber ist nun dadurch die Gleichung $17 + 28 = 45$ gegeben? Durchaus nicht!¹² Dies muß ich mir vielmehr nun erst ausrechnen. Es hat nun auch Sinn, nach dieser allgemeinen Regel $E_2 \ \& \ E_3 \ \supset \ E_5$ als Tautologie hinzuschreiben; wenn ich, (sozusagen), noch nicht weiß, was $2 + 3$ ergeben wird; denn $2 + 3$ hat¹³ nur sofern Sinn, als es noch ausgerechnet werden muß.

Daher hat die Gleichung $|| + ||| = ||||$ nur dann einen Witz, wenn das Zeichen „ $||||$ “ so wiedererkannt wird, wie das Zeichen „5“; nämlich unabhängig von der Gleichung.

585 Mein Standpunkt unterscheidet sich dadurch von dem der Leute, die heute über die Grundlagen der Arithmetik schreiben, daß ich es nicht nötig habe, einen bestimmten Kalkül, z.B. den des Dezimalsystems, zu verachten. Einer ist für mich so gut wie der andere. Einen besondern Kalkül gering zu achten ist so, als wollte man Schach spielen ohne wirkliche Figuren, weil das zu wenig abstrakt, zu speziell sei. Soweit es auf die Figuren *nicht* ankommt,

6 (O): eine

7 (V): Ziffern

8 (F): MS 113, S. 5r.

9 (O): $(\epsilon | | + | | | x) \phi x \ \& \ \psi x$. (E): Wir haben die Formel auf Grund von MS 153b, S. 44v korrigiert.

10 (V): noch

11 (O): machen,

12 (V): ~~Keineswegs!~~

13 (V): hat ~~mir~~

how we look at the matter in ordinary life, at least as far as the numbers we need to figure out are concerned. After all, we mustn't be ashamed of regarding numbers³ and calculations in the same way as every merchant does in his everyday arithmetic. For there we don't figure out 2 + 2 = 4, nor the rules of the multiplication tables in general; rather, we accept them – as axioms, as it were – and only calculate *with their help*. But of course we could also work out 2 + 2 = 4, and children in fact do so by counting off. Given the sequence of numbers 1 2 3 4 5 6 the calculation is:

1 2 1 2
1 2 3 4

Abbreviative Definitions:

- (∃x).φx .&. ~ (∃x, y).φx & φy Def. (εx).φx
- (∃x, y).φx & φy .&. ~ (∃x, y, z).φx & φy & φz Def. (εx, y).φx & φy, *etc.*
- (εx).φx Def. (ε | x).φx
- (εx, y).φx & φy) .=. (ε | x).φx .=. (ε2x).φx, *etc.*

It can be shown that

(ε | x).φx & (ε | | x).ψx & ~(∃x).φx & ψx ∴ (ε | | | | x).φx ∨ ψx is a tautology.

Ind.

⁴Does that demonstrate the arithmetical proposition 2 + 3 = 5? Of course not. It also doesn't show that (E | x)φx & (E | | x)ψx & Ind. ∴ (E | + | | x).φx ∨ ψx⁵ is tautologous, because nothing at all was said⁶ in our definitions about a sum “| + | |”. (In order to abbreviate I will write the tautology in the form “E | & E | | ∴ E | | | |”.) Now if the question is – given the left-hand side – what number of strokes to the right of “∴” makes the whole thing a tautology, then we can find this number, and can also discover that in the case above it is | + | | |; but we can equally well discover that it is | + | | |, or | + | | | + |, for it is all of these. We can also find an inductive proof, however, that shows that the algebraic expression En & Em ∴ E(n + m) is tautologous. In that case I have a right to regard a proposition like E17 & E28 ∴ E(17 + 28) as a tautology. But does that give us the equation 17 + 28 = 45? Certainly not!⁷ On the contrary, I still have to work this out. In accordance with this general rule, it now also makes sense to write E2 & E3 ∴ E5 as a tautology if, (as it were), I don't yet know what 2 + 3 comes out as; for 2 + 3 has sense only in so far as it has still to be worked out.

Therefore the equation | + | | = | | | | only has a point if the sign “| | | |” is recognized in the same way as the sign “5”, that is, independently of the equation.

The difference between my point of view and that of contemporary writers on the foundations of arithmetic is that I don't need to scoff at a particular calculus like that of the decimal system. For me one calculus is as good as another. To disparage a particular calculus is like wanting to play chess without real pieces because playing with pieces isn't abstract enough – is too particularized. To the extent that the pieces really *don't* matter, one

3 (V): numerals

4 (F): MS 113, p. 5r.

5 (O): (E | | + | | | x).φx & ψx. (E): We have taken the correct version of this formula from MS 153b, p. 44v.

6 (V): was yet said

7 (V): ~~By no means!~~

sind eben die einen so gut wie die andern. Und soweit die Spiele sich doch voneinander unterscheiden,¹⁴ ist eben ein Spiel so gut, d.h. so interessant, wie das andere. Keines aber ist sublimer als das andre.

Welches ist der Beweis von $E|| \& E||| \supset E||||$, der der Ausdruck unseres Wissens ist, daß dies ein richtiger logischer Satz ist?

Er macht offenbar davon Gebrauch, daß man $(\exists x)$. . . als logische Summe behandeln kann. Wir übersetzen etwa von dem Symbolismus $\boxed{\times \times}$ ¹⁵ („wenn in jedem Quadrat ein Stern ist, so sind zwei im ganzen Rechteck“) in den Russell'schen. Und es ist nicht, als gäben wir mit der Tautologie in dieser Schreibweise einer Meinung Ausdruck, die uns plausibel erscheint und (die) der Beweis dann bestätigt; sondern, was uns plausibel erscheint ist, daß dieser Ausdruck eine Tautologie (ein Gesetz der Logik) ist.

Die Reihe von Sätzen

$(\exists x): aRx \& xRb$

$(\exists x, y): aRx \& xRy \& yRb$

$(\exists x, y, z): aRx \& xRy \& yRz \& zRb$ u.s.f.

kann man sehr wohl so ausdrücken:

„es gibt ein Glied zwischen a und b“

„es gibt zwei Glieder zwischen a und b“ u.s.w.

586 und kann das etwa schreiben¹⁶

$(\exists 1x).aRxRb,$

$(\exists 2x).aRxRb,$ etc.

Es ist aber klar, daß zum Verständnis dieser Ausdrücke die obere Erklärung nötig ist, weil man sonst nach Analogie von $(\exists 2x).fx = (\exists x, y).\phi x \& \phi y$ glauben könnte, $(\exists 2x).aRxRb$ sei gleichbedeutend einem Ausdruck $(\exists x, y).aRxRb \& aRyRb$.

Ich könnte natürlich auch statt „ $(\exists x, y).F(x, y)$ “ schreiben „ $(\exists 2x, y).F(x, y)$ “. Aber die Frage wäre nun: was habe ich dann unter „ $(\exists 3x, y).F(x, y)$ “ zu verstehen? Aber hier läßt sich eine Regel geben; und zwar brauchen wir eine, die uns in der Zahlenreihe beliebig weiterführt. Z.B. die:

$(\exists 3x, y).F(x, y) = (\exists x, y, z): F(x, y) \& F(x, z) \& F(y, z)$

$(\exists 4x, y).F(x, y) = (\exists x, y, z, u): F(x, y) \& F(x, z) \& . . .$

es folgen die Kombinationen zu zwei Elementen. U.s.f. Es könnte aber auch definiert werden:

$(\exists 3x, y).F(x, y) = (\exists x, y, z): (F(x, y) \& F(y, x) \& F(x, z) \& F(z, x) \& F(y, z) \& F(z, y)$
u.s.f.

„ $(\exists 3x).F(x, y)$ “ entspräche etwa dem Satz der Wortsprache „F(x, y) wird von 3 Dingen befriedigt“ und auch dieser Satz bedürfte einer Erklärung um eindeutig zu werden.

Soll ich nun sagen, daß in diesen¹⁷ verschiedenen Fällen das Zeichen „3“ eine verschiedene¹⁸ Bedeutung hat? Drückt nicht vielmehr das Zeichen „3“ das aus, was den verschiedenen

14 (V): Und soweit ein Spiel sich von dem andern doch unterscheidet,

15 (F): MS 113, S. 6v.

16 (O): Schreiben

17 (V): den

18 (V): andere

set is as good as another. And to the extent that the games really are distinct from each other,⁸ one game is as good, i.e. as interesting, as the other. But none of them is more sublime than any other.

Which proof of $E || \& E || | \supset E || | |$ expresses our knowledge that this is a correct logical proposition?

Obviously, one that makes use of the fact that one can treat $(\exists x) \dots$ as a logical sum. For example, we translate from this symbolism $\boxed{\times \times}$ ⁹ (“If there is a star in each square, then there are two in the whole rectangle”) into the Russellian one. And it isn’t as if we were using the tautology in this notation to express an idea that appears plausible, and (that) is then confirmed by the proof; rather, what appears plausible to us is that this expression is a tautology (a law of logic).

The series of propositions

$(\exists x): aRx \& xRb$

$(\exists x, y): aRx \& xRy \& yRb$

$(\exists x, y, z): aRx \& xRy \& yRz \& zRb$, etc.

can perfectly well be expressed as follows:

“There is one term between a and b.”

“There are two terms between a and b.”, etc.,

and can, for example, be written as

$(\exists 1x).aRxRb$,

$(\exists 2x).aRxRb$, etc.

But it is clear that in order to understand these expressions we need the explanation above, because otherwise by analogy with $(\exists 2x).\phi x = (\exists x, y).\phi x \& \phi y$, one might believe that $(\exists 2x).aRxRb$ was equivalent to an expression like $(\exists x, y).aRxRb \& aRyRb$.

Of course I could also write “ $(\exists 2x, y).F(x, y)$ ” instead of “ $(\exists x, y).F(x, y)$ ”. But then the question would be: What am I to take “ $(\exists 3x, y).F(x, y)$ ” as meaning? But here a rule can be given; specifically, we need one that takes us further in the number series – to wherever we want to go. For example, this one:

$(\exists 3x, y).F(x, y) = (\exists x, y, z):F(x, y) \& F(x, z) \& F(y, z)$

$(\exists 4x, y).F(x, y) = (\exists x, y, z, u):F(x, y) \& F(x, z) \& \dots$

followed by the combinations of two elements. And so on. But we could also give the following definition:

$(\exists 3x, y).F(x, y) = (\exists x, y, z):(F(x, y) \& F(y, x) \& F(x, z) \& F(z, x) \& F(y, z) \& F(z, y))$
and so on.

For example, “ $(\exists 3x, y).F(x, y)$ ” would correspond to the proposition in word-language “ $F(x, y)$ is satisfied by 3 things”; and this proposition too would need an explanation to become unambiguous.

Am I now to say that in these¹⁰ different cases the sign “3” has a different¹¹ meaning? Isn’t it rather that the sign “3” expresses what is common to the different interpretations?

8 (V): And to the extent that one game really differs from another,

10 (V): the

11 (V): another

9 (F): MS 113, p. 6v.

Interpretationen gemeinsam ist? Warum hätte ich es sonst gewählt. Es gelten ja auch die gleichen Regeln von dem Zeichen „3“ in¹⁹ jedem dieser Zusammenhänge.²⁰ Es ist nach wie vor durch 2 + 1 zu ersetzen; etc. Allerdings aber ist ein Satz nach dem Vorbild von $E || \& E || || \supset E || || ||$ nun keine Tautologie. Zwei Menschen, die miteinander in Frieden leben und drei weitere Menschen, die miteinander in Frieden leben geben nicht fünf Menschen, die miteinander in Frieden leben. Aber das heißt nicht, daß nun 2 + 3 nicht 5 ist. Vielmehr läßt sich die Addition nur nicht so anwenden. Denn man könnte sagen: 2 Menschen, die . . . und 3 Menschen, die . . . und von denen jeder mit jedem der ersten Gruppe in Frieden lebt = 5 Menschen die. . .

Mit andern Worten die Zeichen von der Form $(\exists 1x, y).F(x, y)$, $(\exists 2x, y).F(x, y)$, etc. haben die Multiplizität der Kardinalzahlen, wie die Zeichen $(\exists 1x).\phi x$, $(\exists 2x).\phi x$, etc. und wie auch die Zeichen $(E 1x).\phi x$, $(E 2x).\phi x$, etc.

„Es gibt nur 4 rote Dinge, aber die bestehen nicht aus 2 und 2, weil es keine Funktion gibt, die sie zu je zweien unter einen Hut bringt“. Das hieße, den Satz $2 + 2 = 4$ so auffassen: Wenn auf einer Fläche 4 Kreise zu sehen sind, so haben je 2 von ihnen immer eine bestimmte Eigentümlichkeit miteinander gemein; sagen wir etwa ein Zeichen innerhalb des Kreises.²¹ (Dann sollen natürlich auch je 3²² der Kreise ein Zeichen gemeinsam haben,²³ etc.) Denn, wenn ich überhaupt etwas über die Wirklichkeit annehme, warum nicht *das*? Das „axiom of reducibility“ ist wesentlich von keiner andern Art. In diesem Sinne könnte man sagen, daß zwar 2 und 2 immer 4 ergeben, aber 4 nicht immer aus 2 und 2 besteht. (Nur durch die gänzliche Vagueheit und Allgemeinheit des Reduktionsaxioms werden wir zu dem Glauben verleitet, es handle sich hier²⁴ – wenn überhaupt um einen sinnvollen Satz – um mehr, als eine willkürliche Annahme, zu der kein Grund vorhanden ist. Drum ist es hier und in allen ähnlichen Fällen äußerst klärend, diese Allgemeinheit, die die Sache ja doch nicht mathematischer macht, ganz fallen zu lassen und statt ihrer ganz spezialisierte Annahmen zu machen).

Man möchte sagen: 4 muß nicht immer aus 2 und 2 bestehen, aber es kann, wenn es wirklich aus Gruppen besteht, aus 2 und 2 wie aus 3 und 1, etc., bestehen; aber nicht aus 2 und 1, oder 3 und 2, etc.; und so bereiten wir eben alles für den Fall vor, daß 4 in Gruppen zerlegbar ist. Aber dann hat es eben die Arithmetik gar nicht mit der wirklichen Zerlegung zu tun, sondern nur mit jener Möglichkeit der Zerlegung. Die Behauptung könnte ja auch die sein, daß, wenn immer ich eine Gruppe von 4 Punkten auf einem Papier sehe, je 2 von ihnen durch eine Klammer verbunden sind.²⁵

Oder:²⁶ um je 2 solche Gruppen von 2 Punkten sei in der Welt immer ein Kreis gezogen.

Dazu kommt nun, daß, z.B., die Aussage, daß in einem weißen Viereck 2 schwarze Kreise zu sehen sind, nicht die Form „ $(\exists x, y)$.etc.“ hat. Denn, gebe ich den Kreisen Namen, dann beziehen sich diese Namen gerade auf die Orte der Kreise und ich kann nicht von ihnen sagen, sie seien entweder in dem einen oder dem andern Viereck. Ich kann wohl sagen: „in beiden Vierecken zusammen sind 4 Kreise“, aber das heißt nicht, daß ich von jedem einzeln

19 (V): in ~~ei~~

20 (V): „3“ in dieser wie // und // in jener Verwendung.

21 (F): MS 113, S. 62r.

22 (V): 3 ~~Krei~~

23 (V): Zeichen gemein haben,

24 (V): verleitet, als handle es sich hier

25 (V): Die Behauptung könnte ja auch die sein, daß von einer Gruppe von 4 Punkten auf dem Papier immer je 2 durch einen Strich verbunden sind.

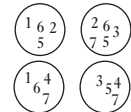
26 (V): sind.

~~Denken wir gar an die Annahme,~~

Why else would I have chosen it? Certainly, in each of these contexts,¹² the same rules hold for the sign “3”. It continues to be replaceable by 2 + 1, and so on. However, a proposition on the pattern of $E || \& E || | \supset E || | |$ isn't a tautology. Two people who live at peace with each other and three other people who live at peace with each other do not make five people who live at peace with each other. But that does not mean that 2 + 3 aren't 5; it is just that addition cannot be applied in that way. For one could say: 2 people who . . . and 3 people who . . . , each of whom lives at peace with each of the first group, = 5 people who

In other words, the signs of the form $(\exists 1x, y).F(x, y)$, $(\exists 2x, y).F(x, y)$, etc. have the multiplicity of the cardinal numbers, as do the signs $(\exists 1x).\phi x$, $(\exists 2x).\phi x$, etc., and also the signs $(E 1x).\phi x$, $(E 2x).\phi x$, etc.

“There are only 4 red things, but they don't consist of 2 and 2, for there is no function that brings them under one heading in pairs.” That would mean taking the proposition $2 + 2 = 4$ this way: if you can see 4 circles on a surface, any two of them always have a particular characteristic in common; say a sign inside the circle.¹³(Then of course any three of the circles will also have a sign in common, and so on.) For if I assume anything at all about reality, why not *that*? The “axiom of reducibility” is essentially no different. In this sense one could say, that, to be sure, 2 and 2 always make 4, but 4 doesn't always consist of 2 and 2. (It is only the complete vagueness and generality of the axiom of reducibility that seduces us into believing that – if it's a matter of a meaningful proposition at all – here it's a matter of more than an arbitrary assumption for which there is no reason. Therefore, in this and all similar cases it clarifies things immensely to drop this generality altogether – which after all doesn't make the matter any more mathematical – and in its place to make very specific assumptions.)



We feel like saying: 4 doesn't always have to consist of 2 and 2, but if it really does consist of groups, it can consist of 2 and 2, as well as of 3 and 1 etc.; but not of 2 and 1 or 3 and 2, etc.; and this is how we get everything prepared for the case that 4 is divisible into groups. But then arithmetic doesn't have anything at all to do with actual division, but only with the possibility of division. After all, the assertion could also be that whenever I see a group of 4 dots on a piece of paper every two of them are connected with a parenthesis.¹⁴

Or:¹⁵ that in the real world there is always a circle drawn around every 2 such groups of 2 dots.

Now add to this that a statement like “you can see two black circles in a white rectangle” doesn't have the form “ $(\exists x, y).$ etc.”. For if I give the circles names, the names refer to the precise locations of the circles, and I can't say of them that they are either in the one or in the other rectangle. To be sure, I can say “There are 4 circles in both rectangles taken together”, but that doesn't mean that I can say of each individual circle that it is in one

12 (V): in this use as well as // and // in that one,

13 (F): MS 113, p. 62r.

14 (V): After all, the assertion could also be that, of a group of 4 dots on a piece of paper, every 2 are connected by a line.

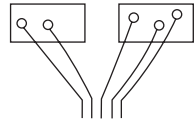
15 (V): parenthesis.

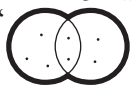
~~Let's even consider the assumption,~~

sagen kann, daß er im einen oder andern Viereck sei. Denn der Satz „dieser Kreis ist in diesem Viereck“ ist im angenommenen Fall sinnlos.

Was bedeutet nun der Satz „in den 2 Vierecken *zusammen* sind 4 Kreise“? Wie konstatiere ich das? Indem ich die Zahlen in beiden addiere? Die Zahl der Kreise in beiden Vierecken *bedeutet* also dann das Resultat der Addition der beiden Zahlen. – Oder ist es etwa das Resultat einer *eigenen*²⁷ Zählung, die durch beide Vierecke geht; oder die Zahl von Strichen, die ich erhalte, wenn ich einen Strich einem Kreis zuordne, ob er nun in einem *oder* im andern Viereck ist. Man kann nämlich sagen: „jeder Strich²⁸ ist entweder einem Kreis zugeordnet, der in dem einen, oder einem Kreis, der in dem andern Viereck steht“; aber nicht: „dieser Kreis steht entweder in diesem oder im andern Viereck“, wenn „dieser Kreis“ eben durch seine Lage charakterisiert ist. *Dies* kann nur dann *hier* sein, wenn „dies“ und „hier“ nicht dasselbe bedeuten. Dagegen kann *dieser* Strich einem Kreis in diesem Viereck zugeordnet sein, denn er bleibt *dieser* Strich, auch wenn er einem Kreis im andern Viereck zugeordnet ist.

589



²⁹Sind in diesen beiden Kreisen zusammen 9 Punkte oder 7? Wie man es gewöhnlich versteht, 7. Aber muß ich es so verstehen? Warum soll ich nicht die Punkte, die beiden Kreisen gemeinsam angehören, doppelt zählen:³⁰ Anders ist es, wenn man fragt: „wieviel Punkte sind innerhalb der stark ausgezogenen Grenze?“³¹Denn hier kann ich sagen: es sind 7, in dem Sinne, in welchem  in den Kreisen 5 und 4 sind.

590

Man könnte nun sagen: die Summe von 4 und 5 nenne ich die Zahl, welche die unter den Begriff $\phi x \vee \psi x$ fallenden Gegenstände haben, wenn $(\exists 4x).\phi x$ & $(\exists 5x).\psi x$ & Ind. der Fall ist. Und zwar heißt das (nun) nicht, daß die Summe von 4 und 5 nur in der Verbindung mit Sätzen von der Art $(\exists 4x).\phi x$ etc. verwendet werden darf, sondern es heißt: Wenn Du die Summe von n und m bilden willst, setze die Zahlen links von „ \supset .“ in die Form $(\exists nx).\phi x$ & $(\exists mx).\psi x$ etc. ein, und die Zahl, die rechts stehen muß, um aus dem ganzen Satz³² eine Tautologie zu machen, ist die Summe von m und n. Dies ist also eine Additionsmethode, und zwar eine äußerst umständliche.

Vergleiche: „Wasserstoff und Sauerstoff geben zusammen Wasser“ – „2 Punkte und 3 Punkte geben zusammen 5 Punkte“.

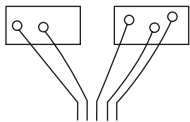
Bestehen denn z.B. 4 Punkte in meinem Gesichtsfeld, die ich „als 4“, nicht „als 2 und 2“ sehe, aus 2 und 2? Ja, was heißt das? Soll es heißen, ob sie in irgendeinem Sinne in Gruppen von je 2 Punkten geteilt waren? Gewiß nicht. (Denn dann müßten sie ja wohl auch in allen andern denkbaren Weisen geteilt sein.) Heißt es, daß sie sich in Gruppen von 2 und 2 teilen *lassen*? also, daß es *Sinn hat*, von solchen Gruppen in den vieren zu reden? – Jedenfalls entspricht doch das dem Satz „2 + 2 = 4“, daß ich nicht sagen kann, die Gruppe der 4 Punkte, die ich gesehen habe, habe aus getrennten Gruppen von 2 und 3 Punkten bestanden. Jeder wird sagen: das ist unmöglich, *denn* 3 + 2 = 5. (Und „unmöglich“ heißt hier „unsinnig“.)

27 (V): besonders
 28 (F): MS 113, S. 63v.
 29 (F): MS 113, S. 63v.

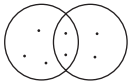
30 (F): MS 113, S. 63v.
 31 (F): MS 113, S. 63v.
 32 (V): Ausdruck

rectangle or the other. For in the case supposed, the proposition “This circle is in this rectangle” makes no sense.

But now what does the proposition “There are 4 circles in the 2 rectangles *taken together*” mean? How do I ascertain that? By adding the numbers in each? In that case the number of the circles in the two rectangles together *means* the result of the addition of the two numbers. – Or is it perhaps the result of a *separate*¹⁶ count through both rectangles? Or is it the number of lines I get if I correlate a line with a circle, no matter whether it is in one rectangle *or* in the other? For if “this circle” is characterized precisely by its position

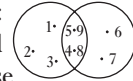
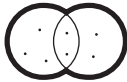


we can say: “Every line¹⁷ is correlated either with a circle in the one rectangle or with a circle in the other”, but not: “This circle is either in this rectangle or in the other”. *This* can only be *here* if “this” and “here” don’t mean the same thing. By contrast *this* line can be correlated with a circle in this rectangle because it remains this line, even if it is correlated with a circle in the other rectangle.



¹⁸Are there 9 dots or 7 in these two circles? The way this is normally understood, there are 7. But do I have to understand it this way? Why shouldn’t I count the dots that jointly belong to both circles twice:

¹⁹It’s different if we ask: “How many dots are there in the borders outlined in bold?” ²⁰For here I can say: There are 7, in the same sense in which



there are 5 and 4 in the circles.

Now we could say: “I call that number ‘The sum of 4 and 5’ that objects falling under the concept $\phi x \vee \psi x$ have, if $(\exists 4x).\phi x$ & $(\exists 5x).\psi x$ & Ind. is the case”. (Now) that doesn’t mean that the sum of 4 and 5 can only be used in connection with propositions of the type $(\exists 4x).\phi x$ etc.; it means, rather: “If you want to construct the sum of n and m , insert the numbers on the left-hand side of ‘ \vdash .’ into the form $(\exists nx).\phi x$ & $(\exists mx).\psi x$, etc., and the sum of m and n will be the number which has to go on the right-hand side in order to turn the whole proposition²¹ into a tautology”. So that is a method of addition, and a very long-winded one at that.

Compare: “Hydrogen and oxygen together yield water” – “2 dots and 3 dots together yield 5 dots”.

So do, for example, 4 dots in my visual field, that I “see as 4” and not “as 2 and 2”, consist of 2 and 2? Well, what does that mean? Is it asking whether in some sense they had been divided into groups of 2 dots each? Certainly not (for in that case they would presumably have to have been divided in all other conceivable ways as well). Does it mean that they *can* be divided into groups of 2 and 2, i.e. that it *makes sense* to speak of such groups in the four? – At any rate it does correspond to the proposition $2 + 2 = 4$ that I can’t say that the group of 4 dots I saw consisted of separate groups of 2 and 3. Everyone will say: That’s impossible, *because* $3 + 2 = 5$. (And “impossible” here means “nonsensical”.)

16 (V): special

17 (F): MS 113, p. 63v.

18 (F): MS 113, p. 63v.

19 (F): MS 113, p. 63v.

20 (F): MS 113, p. 63v.

21 (V): expression

„Bestehen 4 Punkte aus 2 und 2“ kann eine Frage nach einer physikalischen oder visuellen³³ Tatsache sein; dann ist es nicht die Frage der Arithmetik. Die arithmetische Frage könnte aber allerdings in der Form gestellt werden: „Kann eine Gruppe von 4 Punkten aus getrennten Gruppen von je 2 Punkten bestehen“.

„Angenommen, ich glaube, es gäbe überhaupt nur eine Funktion und die 4 Gegenstände, die sie befriedigen. Später komme ich darauf, daß sie noch von einem fünften Ding befriedigt wird; ist jetzt das Zeichen „4“ sinnlos geworden?“ – Ja, wenn es *im Kalkül* die 4 nicht gibt, dann ist „4“³⁴ sinnlos.³⁵

Wenn man sagt, es wäre möglich, mit Hilfe der Tautologie

$$(\exists_n 2x). \phi x \ \& \ (\exists_n 3x). \psi x \ \& \ \text{Ind.} \ \supset. \ (\exists_n 5x). \phi x \ \vee \ \psi x \quad \dots \ A$$

zu addieren, so wäre das folgendermaßen zu verstehen: Zuerst ist es möglich, nach gewissen Regeln herauszufinden, daß

$$(\exists_n x). \phi x \ \& \ (\exists_n x). \psi x \ \& \ \text{Ind.} \ \supset. \ (\exists_n x, y) : \phi x \ \vee \ \psi x \ \& \ \phi y \ \vee \ \psi y$$

tautologisch ist. $(\exists_n x). \phi x$ ist eine Abkürzung für

$(\exists x). \phi x \ \& \ \sim(\exists x, y). \phi x \ \& \ \phi y$. Ich werde ferner Tautologien der Art A zur Abkürzung so schreiben:

$$(E) \ \& \ (E) \ \supset \ (E).$$

So geht also aus den Regeln hervor, daß $(\exists x) \ \& \ (\exists x) \ \supset \ (\exists x, y)$, $(\exists x, y) \ \& \ (\exists x) \ \supset \ (\exists x, y, z)$ und andere Tautologien. Ich schreibe „und andere“ und nicht „u.s.w. ad inf.“,³⁶ weil man mit diesem Begriff noch nicht operieren muß.³⁷

³⁸Als die Zahlen im Dezimalsystem hingeschrieben waren, gab es Regeln, nämlich die der Addition für je zwei Zahlen von 0 bis 9, und die reichten mir, entsprechend angewandt, für Additionen aller Zahlen aus. Welche Regel entspricht nun diesen Elementarregeln? Es ist offenbar, daß wir uns in einer Rechnung wie σ weniger Regeln merken brauchen als in $17 + 28$. Ja, wohl nur *eine* allgemeine und gar keine der Art $3 + 2 = 5$. Im Gegenteil, wieviel $3 + 2$ ist, scheinen wir jetzt *ableiten*, ausrechnen zu können.

Die Aufgabe ist $2 + 3 = ?$ und man schreibt

1,2,3,4,5,6,7

1,2;1,2,3

33 (V): optischen

34 (V): ist sie

35 (V): Ja, wenn *im Kalkül* die 4 nicht existiert, dann ist „4“ sinnlos.

36 (O): „u.s.w. ad inf.“,

37 (E): Hier fehlen die letzten drei Worte im TS. Wir haben sie nach MS 113, S. 67r eingesetzt.

38 (E): In MS 111 (S. 156) und TS 211 (S. 98) steht eine weitere Bemerkung vor der vorliegenden. Sie wurde anscheinend irrtümlich ausgelassen, ist aber zur Erklärung von σ nötig. Sie lautet:

$17 + 28$ kann ich mir nach Regeln ausrechnen, ich brauche $17 + 28 = 45$ (α) nicht als Regel zu geben. Kommt also in einem Beweis der Übergang von $f(17 + 28)$ auf $f(45)$ vor, so brauche ich nicht sagen, er geschähe nach der Regel α sondern nach andern Regeln des $1 + 1$.

Wie ist es hiermit aber in der $((1 + 1) + 1)$ Notation? Kann ich sagen ich könne mir in ihr z.B. $2 + 3$ ausrechnen? Und nach welcher Regel? Es geschähe so: $\sigma \dots [(1 + 1) + 1] + [(1 + 1) + 1] + 1 = (((1 + 1) + 1) + 1) + 1 + 1 = [(((1 + 1) + 1) + 1) + 1] + 1$.

“Do 4 dots consist of 2 and 2?” can be a question about a physical or a visual²² fact; then it isn’t an arithmetical question. The arithmetical question *could* be put in this form, though: “*Can* a group of 4 dots consist of separate groups of 2 each?”

“Suppose that I used to believe that there wasn’t anything at all except one function and the 4 objects that satisfy it. Later I discover that it is satisfied by a fifth thing too: has the sign ‘4’ now become senseless?” – Indeed, if 4 doesn’t exist *in the calculus* then “4”²³ makes no sense.

If you say it would be possible to do addition using the tautology

$$(\exists_n 2x). \phi x \ \& \ (\exists_n 3x). \psi x \ \& \ \text{Ind.} \ \supset. \ (\exists_n 5x). \phi x \ \vee \ \psi x \quad \dots \ A$$

that would have to be understood this way: first it is possible to establish according to certain rules that

$$(\exists_n x). \phi x \ \& \ (\exists_n x). \psi x \ \& \ \text{Ind.} \ \supset. \ (\exists_n x, y). \phi x \ \vee \ \psi x \ \&. \ \phi y \ \vee \ \psi y$$

is tautological. $(\exists_n x). \phi x$ is an abbreviation for

$(\exists x). \phi x \ \& \ \sim(\exists x, y). \phi x \ \& \ \phi y$. Furthermore, for the sake of abbreviation, I will write tautologies of type A thus:

$$(E) \ \& \ (E) \ \supset \ (E)$$

Therefore $(Ex) \ \& \ (Ex) \ \supset \ (Ex, y)$, $(Ex, y) \ \& \ (Ex) \ \supset \ (Ex, y, z)$ and other tautologies follow from the rules. I write “and other tautologies” and not “and so on *ad inf.*” since I don’t yet need to work with that concept.²⁴

²⁵When the numbers were written down in the decimal system there were rules, namely the addition rules for every pair of numbers from 0 to 9, and, used appropriately, these sufficed for the addition of all numbers. Now which rule corresponds to these elementary rules? It’s obvious that in a calculation like σ we don’t have to remember as many rules as in $17 + 28$. Indeed we need to remember only *one* general rule, and none of the kind $3 + 2 = 5$; on the contrary, we now seem to be able to *deduce*, work out, how much $3 + 2$ is.

The problem is $2 + 3 = ?$ and we write

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

1, 2; 1, 2, 3

22 (V): or an optical

23 (V): it

24 (E): This sentence is incomplete in the TS. We have supplied the missing words from the corresponding sentence in MS 113, p. 67r.

25 (E): In MS 111 (p. 156) and TS 211 (p. 98) this remark is preceded by another remark that appears to have been left out of TS 213 by mistake. It is required to give sense to the reference to σ in this remark. It reads:

I can calculate $17 + 28$ according to rules; I don’t need to give $17 + 28 = 45$ (α) as a rule.

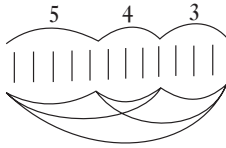
So if the step from $f(17 + 28)$ to $f(45)$ occurs in a proof, I don’t need to say it took place according to rule (α), but according to other rules for $1 + 1$.

But what is this like in the $((1 + 1) + 1)$ notation? Can I say that in it I could calculate, for example, $2 + 3$? And according to which rule? It would go like this: $\sigma \dots [(1 + 1) + ((1 + 1) + 1)] = (((1 + 1) + 1) + 1) + 1 = (((((1 + 1) + 1) + 1) + 1) + 1)$.



So rechnen Kinder tatsächlich, wenn sie „abzählen“. (Und dieser Kalkül muß so gut sein wie ein anderer.)

592 Es ist übrigens klar, daß das Problem, ob $5 + (4 + 3) = (5 + 4) + 3$ ist, sich *so* lösen läßt:
³⁹denn diese Konstruktion hat genau die Multiplizität jedes andern Beweises dieses Satzes.



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
A	B	C	D	E	A	B	C	D						
A									I	A	B	C		
A												L		
			A	B	C	D	A	B	C					
			A									G		
A			E	A								G		
A												L		

Wenn ich die Zahl nach ihrem letzten Buchstaben nenne, so beweist das, daß $(E + D) + C = E + (D + C) = L$. Diese Form des Beweises ist gut, weil sie deutlich zeigt, daß das Ergebnis wirklich errechnet ist und weil man aus ihr doch auch wieder den allgemeinen Beweis herauslesen kann.

Es ist hier eine gute Mahnung – so seltsam sie klingt –: treibe hier nicht Philosophie, sondern Mathematik.

593 Unser Kalkül braucht überhaupt noch nichts von der Bildung einer Reihe „(Ex)“, „(Ex, y)“, „(Ex, y, z)“, *etc.* zu wissen, sondern kann einfach einige, etwa 3, dieser Zeichen einführen, ohne das „u.s.w.“. Wir können nun einen Kalkül mit einer endlichen Reihe von Zeichen einführen, indem wir eine Reihenfolge gewisser Zeichen festsetzen, etwa die der Buchstaben des Alphabets, und schreiben:

- (Ea) & (Ea) \supset (Ea, b)
- (Ea, b) & (Ea) \supset (Ea, b, c)
- (Ea, b) & (Ea, b) \supset (Ea, b, c, d)
- u.s.w. bis zum z.

Die rechte Seite (rechts vom „ \supset “) kann man dann aus der linken durch einen Kalkül der Art finden:

$$\begin{array}{r}
 a\ b\ c\ d\ e\ f\ \dots\ z \\
 a\ b\ -\ -\ - \\
 \hline
 -\ -\ a\ b\ c \\
 a\ b\ c\ d\ e
 \end{array}
 \quad B$$

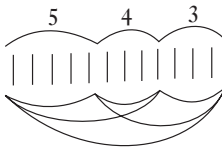
Dieser Kalkül ergäbe sich aus den Regeln zur Bildung der Tautologien als eine Vereinfachung. – Dieses Gesetz der Bildung eines Reihenstückes aus zwei andern vorausgesetzt, kann ich für das erste nun die Bezeichnung „Summe der beiden andern“ einführen und also definieren:

- $a + a \stackrel{\text{Def}}{=} ab$
- $a + ab \stackrel{\text{Def}}{=} abc$
- u.s.w. bis z.

Hätte man an einigen Beispielen die Regel des Kalküls B erklärt, so könnte man auch diese Definitionen als Spezialfälle einer allgemeinen Regel betrachten und nun Aufgaben stellen von der Art: „ $abc + ab = ?$ “. Es liegt nun nahe, die Tautologie

This is in fact how children calculate when they “count off”. (And that calculus must be as good as any other.)

It’s clear, incidentally, that the problem whether $5 + (4 + 3) = (5 + 4) + 3$ can be solved *this way*: ²⁶for this construction has precisely the same multiplicity as every other proof of this proposition.



A B C D E F G H I J K L M N O
 A B C D E, A B C D
 A I, A B C
 A L
 A B C D, A B C
 A G
 A E, A G
 A L

If I assign a number to each letter’s position in the alphabet, that is a proof that $(E + D) + C = E + (D + C) = L$. This form of proof is good, because it shows clearly that the result has really been worked out and because from it you can read off the general proof as well.

It may sound odd, but it is a good admonition at this point: Don’t do philosophy here, do mathematics.

Our calculus needn’t yet know anything at all about the construction of a series “(Ex)”, “(Ex, y)”, “(Ex, y, z)”, etc.; it can simply introduce a few, say three, of these signs without the “etc.”. We can then introduce a calculus with a finite series of signs by setting down a sequence of certain signs, say that of the letters of the alphabet, and write:

- (Ea) & (Ea) \supset (Ea, b)
- (Ea, b) & (Ea) \supset (Ea, b, c)
- (Ea, b) & (Ea, b) \supset (Ea, b, c, d)
- etc., up to z.

The right-hand side (the side to the right of “ \supset ”) can then be found from the left-hand side by a calculus of the type:

$$\begin{array}{r} a \ b \ c \ d \ e \ f \ \dots \ z \\ a \ b \ - \ - \ - \\ - \ - \ a \ b \ c \ \underline{\hspace{1cm}} \quad B \\ a \ b \ c \ d \ e \end{array}$$

This calculus would result from the rules for the construction of tautologies as a simplification. – If I presuppose this law for constructing a fragment of the series out of two others, I can then introduce the designation “sum of the two others” for the first composite fragment, and thus give the definition:

- $a + a \stackrel{\text{Def.}}{=} ab$
- $a + ab \stackrel{\text{Def.}}{=} abc$
- and so on up to z.

If the rule for the calculus B had been explained by a few examples, we could regard those definitions too as particular cases of a general rule, and then pose problems of the type: “ $abc + ab = ?$ ”. Now what is tempting is to confuse the tautology

26 (F): MS 111, p. 159.

α) $(Ea, b) \& (Ea, b) \supset (Ea, b, c, d)$ mit der Gleichung

β) $(ab + ab) = abcd$ zu verwechseln.

– Aber diese ist eine Ersetzungsregel, jene ist keine Regel, sondern eben eine Tautologie. Das Zeichen „ \supset “ in α entspricht in keiner Weise dem „ $=$ “ in β .

594 Man vergißt, daß das Zeichen „ \supset “ in α ja nicht sagt, daß die beiden Zeichen rechts und links von ihm eine Tautologie ergeben.

Dagegen könnte man einen Kalkül konstruieren, in welchem die Gleichung $\xi + \eta = \zeta$ als eine Transformation erhalten wird (aus) der Gleichung:

γ) $(E\xi) \& (E\eta) \supset (E\zeta) = \text{Taut.}$

So, daß ich also sozusagen $\zeta = \xi + \eta$ erhalte, wenn ich ζ aus der Gleichung γ herausrechne.

Wie tritt der Begriff der Summe in diese Überlegungen ein? – Im ursprünglichen Kalkül, der (etwa) feststellt, daß die Form

δ) $E\xi \& (E\eta) \supset (E\zeta)$

(z.B.) tautologisch wird für $\xi = xy$, $\eta = x$ und $\zeta = xyz$, ist von Summierung nicht die Rede.

– Dann bringen wir ein Zahlensystem in den Kalkül (etwa das System $a b c d \dots z$). Und endlich definieren wir die Summe zweier Zahlen als diejenige Zahl ζ , welche die Gleichung γ löst.

(Wenn wir statt „ $(E\xi) \& (E\eta) \supset (E\xi, y)$ “ schrieben: „ $(E\xi) \& (E\eta) \supset (E\xi + x)$ “, so hätte das keinen Sinn; es sei denn, daß die Notation von vornherein nicht

1) „ $(E\xi)$ etc.“, „ $(E\xi, y)$ etc.“, „ $(E\xi, y, z)$ etc.“ lautet, sondern:

κ) „ $(E\xi)$ etc.“, „ $(E\xi + x)$ etc.“, „ $(E\xi + x + x)$ etc.“.

Denn warum sollten wir plötzlich statt

„ $(E\xi, y) \& (E\eta) \supset (E\xi, y, z)$ “ schreiben:

„ $(E\xi, y) \& (E\eta) \supset (E\xi y + x)$ “?

das wäre nur eine Verwirrung der Notation. – Nun sagt man: Es vereinfacht doch das Hinschreiben der Tautologie sehr, wenn man in der rechten Klammer gleich die Ausdrücke der beiden linken hinschreiben kann. Aber diese Schreibweise ist ja noch gar nicht erklärt; ich weiß ja nicht, was $(E\xi y + x)$ bedeutet, daß nämlich $(E\xi y + x) = (E\xi, y, z)$ ist.

595 Wenn man aber von vornherein die Notation „ $(E\xi)$ “, „ $(E\xi + x)$ “, „ $(E\xi + x + x)$ “ gebrauchte, so⁴⁰ hätte vorerst nur der Ausdruck „ $(E\xi + x + x + x)$ “ Sinn, aber nicht „ $(E(x + x) + (x + x))$ “.

Die Notation κ ist auf einer Stufe mit⁴¹ 1. Ob⁴² sich in der Form δ eine Tautologie ergibt, kann man etwa kurz durch das Ziehen von Verbindungslinien kalkulieren, also

$(E\xi, y) \& (E\xi, y) \supset (E\xi, y, z, u)$ und analog

$(E\xi + x) \& (E\xi + x) \supset (E\xi + x + x + x).$

40 (O): „ $(E\xi + x + x)$ “, so

41 (V): ist im gleichen Fall wie

42 (V): Daß

- α) $(\exists a, b) \ \& \ (\exists a, b) \supset (\exists a, b, c, d)$ with the equation
- β) $(ab + ab) = abcd.$

– But the latter is a replacement rule, and the former isn't a rule but – as indicated – a tautology. The sign “ \supset ” in α in no way corresponds to the “ $=$ ” in β.

We forget that the sign “ \supset ” in α does *not* say that the two signs to the right and left of it yield a tautology.

On the other hand we could construct a calculus in which the equation $\xi + \eta = \zeta$ is obtained as a transformation from the equation

- γ) $(\exists \xi) \ \& \ (\exists \eta) \supset (\exists \zeta) = \text{Taut.}$

So that as it were I get $\zeta = \xi + \eta$ if I figure out ζ from the equation γ.

How does the concept of sum enter into these considerations? – There is no mention of summation in the original calculus that, say, stipulates that the form

- δ) $(\exists \xi) \ \& \ (\exists \eta) \supset (\exists \zeta)$

becomes tautologous, (for instance), where $\xi = xy$, $\eta = x$, and $\zeta = xyz$. – Later we introduce a number system (say the system a, b, c, d, . . . z) into the calculus, and finally we define the sum of two numbers as the number ζ that solves the equation γ.

(If instead of “ $(\exists x) \ \& \ (\exists x) \supset (\exists x + x)$ ” we wrote: “ $(\exists x) \ \& \ (\exists x) \supset (\exists x, y)$ ” it would make no sense; unless, from the very start, the notation read, not

- ι) “ $(\exists x)$ etc.”, “ $(\exists x, y)$ etc.”, “ $(\exists x, y, z)$ etc.”

but κ) “ $(\exists x)$ etc.”, “ $(\exists x + x)$ etc.”, “ $(\exists x + x + x)$ etc.”

For why should we suddenly write

“ $(\exists x, y) \ \& \ (\exists x) \supset (\exists xy + x)$ ” instead of

“ $(\exists x, y) \ \& \ (\exists x) \supset (\exists x, y, z)$ ”?

That would just be a confusion in the notation. – Now we say: But it will greatly simplify writing the tautology down if we can immediately write the expressions in the two left parentheses in the right parenthesis. But that notation hasn't yet been explained: I don't know what $(\exists xy + x)$ means, i.e. that $(\exists xy + x) = (\exists x, y, z)$.

But if we used the notation “ $(\exists x)$ ”, “ $(\exists x + x)$ ”, “ $(\exists x + x + x)$ ” right from the start, then at that point only the expression “ $(\exists x + x + x + x)$ ” would make sense, but not “ $(\exists(x + x) + (x + x))$ ”.

The notation κ is on the same level as²⁷ ι. A quick way of calculating whether²⁸ you get a tautology of the form δ is, say, to draw connecting lines, i.e.

$(\exists x, y) \ \& \ (\exists x, y) \supset (\exists x, y, z, u)$ and analogously

$(\exists x + x) \ \& \ (\exists x + x) \supset (\exists x + x + x + x).$

27 (V): is in the same situation as

28 (V): that

⁴³Die Verbindungslinien⁴⁴ entsprechen nur der Regel, die in jedem Fall für die Kontrolle der Tautologie gegeben sein muß. Von einer Addition ist hier noch keine Rede. Die tritt erst ein, wenn ich mich entschließe – z.B. – statt „xyzu“ „xy + xy“ zu schreiben, und zwar in Verbindung mit einem Kalkül, der nach Regeln die Ableitung einer Ersetzungsregel „xy + xy = xzy“ erlaubt. Addition liegt auch dann nicht vor, wenn ich in der Notation κ schreibe „ $(\exists x) \& (\exists x) \supset (Ex + x)$ “, sondern erst, wenn ich zwischen „x + x“ und „(x) + (x)“ unterscheide und schreibe: $(x) + (x) = (x + x)$.)

Ich kann „die Summe von ξ und η “ („ $\xi + \eta$ “) als die Zahl ζ definieren (oder: „den Ausdruck“ – wenn wir uns scheuen, das Wort Zahl zu gebrauchen) – ich kann „ $\xi + \eta$ “ als die Zahl ζ definieren, die den Ausdruck δ tautologisch macht; – man kann aber auch „ $\xi + \eta$ “, z.B., durch den Kalkül B definieren (unabhängig von dem der Tautologien) und nun die Gleichung $(E\xi) \& (E\eta) \supset (E\xi + \eta) = \text{Taut. ableiten.}$ ⁴⁵

596 Eine Frage, die sich leicht einstellt, ist die: müssen wir die Kardinalzahlen in Verbindung mit der Notation $(\exists x, y, \dots).\phi x \& \phi y \dots$ einführen? Ist der Kalkül der Kardinalzahlen irgendwie an den mit den Zeichen „ $(\exists x, y \dots).\phi x \& \phi y \dots$ “ gebunden? Ist etwa der letztere die einzige, und vielleicht wesentlich einzige, Anwendung des ersteren?⁴⁶ Was die „Anwendung der Kardinalarithmetik auf die“⁴⁷ Grammatik“ betrifft, so kann man auf das verweisen, was wir über den Begriff der Anwendung eines Kalküls gesagt haben. – Man könnte nun unsere Frage auch so stellen: Kommen die Kardinalzahlen in den Sätzen unserer Sprache immer hinter dem Zeichen „ \exists “ vor: wenn wir uns nämlich die Sprache in die Russell'sche Notation übersetzt denken? Diese Frage hängt unmittelbar mit der zusammen: Wird das Zahlzeichen in der Sprache immer als Charakterisierung eines Begriffes – einer Funktion – gebraucht? Die Antwort darauf ist, daß unsere Sprache die Zahlzeichen immer als Attribute von⁴⁸ Begriffswörtern gebraucht – daß aber diese Begriffswörter unter sich gänzlich verschiedenen grammatischen Systemen angehören (was man daraus sieht, daß das eine in Verbindungen Bedeutung hat, in denen das andre sinnlos ist), so daß die Norm, die sie zu Begriffswörtern macht, für uns uninteressant wird. Eine ebensolche Norm aber ist die Schreibweise „ $(\exists x, y, \dots)$ etc.“; sie ist die direkte Übersetzung einer Norm unserer Wortsprachen, nämlich des Ausdruckes „es gibt ...“, eines Sprachschemas,⁴⁹ in das unzählige grammatische⁵⁰ Formen gepreßt sind.

Übrigens ist das Zahlzeichen, jetzt in einem andern Sinne, nicht mit „ \exists “ verbunden: da⁵¹ nämlich „ $(\exists 3)_x \dots$ “ nicht in „ $(\exists 2 + 3)_x \dots$ “ enthalten ist.⁵²

597 Wenn wir von den mittels „ $=$ “ konstruierten Funktionen ($x = a \vee x = b$ etc.) absehen, so wird nach Russells Theorie $5 = 1$, wenn es keine Funktion gibt, die nur von *einem* Argument, oder nur von 5 Argumenten befriedigt wird. Dieser Satz scheint natürlich auf den ersten Blick unsinnig; denn, wie kann man dann sinnvoll sagen, daß es keine solchen Funktionen gibt. Russell müßte sagen, daß man die beiden Aussagen, daß es Fünfer- und Einsfunktionen gibt, nur dann *getrennt* machen kann, wenn wir in unserem Symbolismus eine Fünfer- und eine Einsklasse haben. Er könnte etwa sagen, daß seine Auffassung richtig sei, weil ich, ohne das Paradigma der Klasse 5 im Symbolismus, gar nicht sagen könne, eine

43 (F): MS 113, S. 68v.

44 (V): Bögen

45 (V): *beweisen*.

46 (V): Anwendung der Kardinalzahlen // des ersten?

47 (V): Kardinalarithmetik in der

48 (V): immer in Verbindung mit

49 (V): Ausdrucksschemas,

50 (V): logische

51 (V): insofern

52 (V): verbunden: insofern nämlich „ $(\exists 3x) \dots$ “ nicht in „ $(\exists 2 + 3x) \dots$ “ enthalten ist.

²⁹The connecting lines³⁰ correspond only to the rule which we have to give in any case for checking the tautology. Here addition doesn't come up yet. It doesn't enter the picture until I decide – for example – to write “xy + xy” instead of “xyzu”, and to do this in connection with a calculus whose rules allow the derivation of the replacement rule “xy + xy = xyzu”. Neither is it a case of addition when I write in the notation κ: “(Ex) & (Ex) ⊃ (Ex + x)”; it only becomes one when I distinguish between “x + x” and “(x) + (x)”, and write: (x) + (x) = (x + x).

I can define “the sum of ξ and η” (“ξ + η”) as the number ζ (or “the expression” if we are reluctant to use the word “number”) – I can define “ξ + η” as the number ζ that makes the expression δ tautologous; but we can also define “ξ + η” (independently of the calculus of tautologies) by the calculus B, for instance, and then *derive*³¹ the equation (Eξ) & (Eη) ⊃ (Eξ + η) = Taut.

A question that quickly arises is this: Must we introduce the cardinal numbers in connection with the notation (∃x, y, . . .).φx & φy . . . ? Is the calculus of the cardinal numbers somehow tied to the calculus of the signs “(∃x, y, . . .).φx & φy . . .”? Might the latter calculus be the only, indeed maybe essentially the only, application of the former?³² As far as the “application of cardinal arithmetic to³³ grammar” is concerned, we can refer to what we said about the concept of the application of a calculus. Now we could also put our question this way: Do the cardinal numbers always occur after the “∃” sign in the propositions of our language, if we imagine this language translated into Russellian notation? This question is directly connected with another: Is a numeral, within language, always used to characterize a concept – a function? The answer to this is that our language does always use the numerals as attributes of³⁴concept-words – but that, within their group, these concept-words belong to such totally different grammatical systems (which you can see from the fact that some of them have meaning in contexts in which others make no sense) that a norm that makes them concept-words holds no interest for us. But the notation “(∃x, y, . . .) etc.” is just such a norm. It is a direct translation of a norm of our word-languages, i.e. of the expression “there is . . .”, of a schema of language³⁵ into which countless grammatical³⁶ forms have been squeezed.

Incidentally – and now in a different sense – numerals are not connected with “∃”: that is, because³⁷ “(∃3)_x . . .” is not contained in “(∃2 + 3)_x . . .”.³⁸

If we disregard the functions (x = a ∨ x = b, etc.) that contain “=”, then, according to Russell's theory, 5 = 1 if there is no function that is satisfied by only *one* argument, or by only 5 arguments. Of course at first glance this proposition seems nonsensical; for in that case how can one sensibly say that there are no such functions? Russell would have to say that the two statements that there are five-functions and that there are one-functions can only be made separately if we have a five-class and a one-class in our symbolism. He could say, for example, that his view was correct because without the paradigm of the class 5 in the symbolism, there would be no way for me to say that a function was satisfied by five

29 (F): MS 113, p. 68v.

30 (V): The arcs

31 (V): *prove*

32 (V): application of the cardinal numbers? // application of the first?

33 (V): in

34 (V): numerals in connection with

35 (V): expression

36 (V): logical

37 (V): with “∃”: in so far as

38 (V): with “∃”: in so far as “(∃3x) . . .” is not contained in “(∃2 + 3x) . . .”.

Funktion werde von 5 Argumenten befriedigt. – D.h., daß aus der Existenz des Satzes „ $(\exists\phi): (\exists!x).\phi x$ “ seine Wahrheit schon hervorgeht. – Man scheint also sagen zu können: schau’ auf diesen Satz, dann wirst Du sehen, daß er wahr ist. Und in einem, für uns irrelevanten, Sinn ist das auch möglich: Denken wir uns etwa auf die Wand eines Zimmers mit roter Farbe geschrieben: „in diesem Zimmer befindet sich etwas Rotes“. –

Dieses Problem hängt damit zusammen, daß ich in der hinweisenden Definition von dem Paradigma (Muster) nichts aussage, sondern nur mit seiner Hilfe Aussagen mache; daß es zum Symbolismus gehört und nicht einer der Gegenstände ist, auf den ich den Symbolismus⁵³ anwende.

Ist z.B. „1 Fuß“ definiert als die Länge eines bestimmten Stabes in meinem Zimmer, und ich würde etwa statt „diese Tür ist 6 Fuß hoch“ sagen: „diese Tür hat sechsmal ‚diese‘⁵⁴Länge (wobei ich auf den Einheitsstab zeige)“, – dann könnte man nicht (etwa) sagen: „der Satz ‚es gibt einen Gegenstand von 1 Fuß Länge‘ beweist sich selbst, denn ich könnte diesen Satz gar nicht aussprechen, wenn es keinen Gegenstand von dieser Länge gäbe“; denn vom Einheitsstab kann ich nicht aussagen, daß er 1 Fuß lang sei. (Wenn ich nämlich statt „1 Fuß“ das Zeichen „diese“⁵⁵Länge“ einführe, so hieße die Aussage, daß der Einheitsstab die Länge 1 Fuß hat: „dieser Stab hat diese Länge“ (wobei ich beide Male auf den gleichen Stab zeige).) So kann man von der Gruppe der Striche, welche etwa als Paradigma der

598 3 steht nicht sagen, sie⁵⁶ bestehe aus 3 Strichen.

„Wenn jener Satz nicht wahr ist, so gibt es diesen Satz gar nicht“ – das heißt: „wenn es diesen Satz nicht gibt, so gibt es ihn nicht“. Und ein Satz kann das Paradigma im andern nie⁵⁷ beschreiben, sonst ist es eben nicht Paradigma. Wenn die Länge des Einheitsstabes durch die Längenangabe „1Fuß“ beschrieben werden kann, dann ist er nicht das Paradigma der Längeneinheit, denn sonst müßte jede Längenangabe mit seiner Hilfe gemacht werden.

Ein Satz, „ $\sim(\exists\phi): (\exists x).\phi x$ “ muß, wenn wir ihm überhaupt einen Sinn geben, von der Art des Satzes⁵⁸ sein: „es gibt keinen Kreis auf dieser Fläche, der nur *einen* schwarzen Fleck enthält“. (Ich meine: er muß einen ähnlich *bestimmten* Sinn haben; und nicht vague bleiben, wie er in der Russell’schen Logik und in meiner der Abhandlung wäre.)

Wenn nun aus den Sätzen „ $\sim(\exists\phi): (\exists x).\phi x$ “⁵⁹ . . . ρ
und „ $\sim(\exists\phi): (\exists x, y).\phi x \ \& \ \phi y$ “⁶⁰ . . . σ

folgt, daß 1 = 2 ist, so ist hier mit „1“ und „2“ nicht das gemeint, was wir sonst damit meinen, denn die Sätze ρ und σ würden in der Wortsprache lauten: „es gibt keine Funktion, die nur von einem Ding befriedigt wird“ und „es gibt keine Funktion, die nur von 2 Dingen befriedigt wird“. Und dies sind nach den Regeln unserer Sprache Sätze mit verschiedenem Sinn.

Man ist versucht zu sagen: „Um $(\exists x, y).\phi x \ \& \ \phi y$ ‘ auszudrücken,⁶¹ brauchen wir 2 Zeichen x ‘ und y ‘.“ Aber das heißt nichts. Was wir dazu *brauchen*, sind, etwa, die Schreibutensilien, nicht die Bestandteile des Satzes. Ebenso wenig hieße es, zu sagen: „Um $(\exists x, y).\phi x \ \& \ \phi y$ ‘ auszudrücken, brauchen wir das Zeichen $(\exists x, y).\phi x \ \& \ \phi y$ ‘.“⁶²

599 Wenn man⁶³ fragt: „was heißt denn dann ‚5 + 7 = 12‘ – was für ein Sinn oder Zweck bleibt denn noch für diesen Ausdruck, nachdem man die Tautologien etc. aus dem

53 (V): ich ihn

54 (F): MS 113, S. 71r.

55 (F): MS 113, S. 71r.

56 (O): es

57 (V): ~~nichts~~

58 (V): dessen

59 (V): „ $\sim(\exists\phi): (\exists x).\phi x$ “ ~~und~~

60 (O): und $\sim(\exists\phi): (\exists x, y).\phi x \ \& \ \phi y$

61 (V): ausdrücken zu können,

62 (V): Was wir dazu *brauchen*, ist vielleicht Papier und Feder; und der Satz heißt so wenig, wie: „um ‚p‘ auszudrücken, brauchen wir ‚p‘“.

63 (V): man \mathfrak{s}

arguments – i.e. that from the existence of the proposition “ $(\exists\phi): (E1x).\phi x$ ” its truth already follows. – So you seem to be able to say: Look at this proposition, and you will see that it is true. And in a sense that’s irrelevant to us, that is indeed possible: Let’s imagine, for example, “In this room there is something red” written in red on the wall of a room. –

This problem is connected with the fact that in an ostensive definition I do not state anything about the paradigm (sample), but only use it to make statements; that it belongs to the symbolism and is not one of the objects to which I apply the symbolism.³⁹

For example, if “1 foot” is defined as the length of a particular rod in my room, and, instead of saying, e.g., “This door is 6 ft. high” I were to say “This door measures six times *this*⁴⁰ length” (pointing to the unit rod) – then we couldn’t say (for instance): “The proposition ‘There is an object that is 1 ft. long’ proves itself, because I couldn’t even utter this proposition if there were no object of that length”; for I cannot say of the unit rod that it is one foot long. (For if I introduced the sign “*this*⁴¹ length” instead of “1 foot”, then the statement that the unit rod is 1 foot long would mean “This rod has this length” (with me pointing both times to the same rod).) Similarly one cannot say of a group of strokes serving as a paradigm of 3, that it consists of 3 strokes.

“If that proposition isn’t true, then this proposition doesn’t even exist” means: “If this proposition doesn’t exist, then it doesn’t exist”. And one proposition can never describe the paradigm in another; otherwise it simply isn’t a paradigm. If the length of the unit rod can be described by the statement of length “1 foot”, then this unit rod isn’t the paradigm of the unit of length; otherwise every statement of length would have to be made by means of it.

If we give any sense at all to a proposition of the form “ $\sim(\exists\phi): (E x).\phi x$ ” it must be a proposition like⁴²: “There is no circle on this surface containing only *one* black speck” (I mean: the proposition must have a similarly *determined* sense, and not remain vague as it would be in Russellian logic and in my logic in the *Tractatus*.)

Now if it follows from the propositions

“ $\sim(\exists\phi): (E x).\phi x$ ” ρ

and “ $\sim(\exists\phi): (E x, y).\phi x \ \& \ \phi y$ ” σ

that $1 = 2$, then here “1” and “2” don’t mean what we usually mean by them, because in word-language the proposition ρ would be “There is no function that is satisfied by only one thing” and σ would be “There is no function that is satisfied by only 2 things”. And according to the rules of our language these are propositions with different senses.

One is tempted to say: “In order to express⁴³ ‘ $(\exists x, y).\phi x \ \& \ \phi y$ ’ we need 2 signs, ‘x’ and ‘y.’” But that means nothing. What we *need* for this are, for instance, writing utensils, not the components of the proposition. It would be equally meaningless to say: “In order to express ‘ $(\exists x, y).\phi x \ \& \ \phi y$ ’ we need the sign ‘ $(\exists x, y).\phi x \ \& \ \phi y$.’”⁴⁴

If we ask: But what then does “ $5 + 7 = 12$ ” mean – what kind of sense or purpose is left for this expression after the tautologies, etc. have been eliminated⁴⁵ from the arithmetical

39 (V): apply it.

40 (F): MS 113, p. 71r.

41 (F): MS 113, p. 71r.

42 (V): must be like

43 (V): say: “To be able to express

44 (V): nothing. What we *need* for this, are, perhaps, paper and pen; and the proposition means no more than: “In order to express ‘p’ we need ‘p’.”

45 (V): excluded

arithmetischen Kalkül ausgeschaltet⁶⁴ hat, – so ist die Antwort: Diese Gleichung ist eine Ersetzungsregel, die sich auf bestimmte allgemeine Ersetzungsregeln, die Regeln der Addition, stützt. Der Inhalt von $5 + 7 = 12$ ist (wenn einer es nicht wüßte) genau das, was den Kindern Schwierigkeiten macht, wenn sie diesen Satz im Rechenunterricht lernen.

Keine Untersuchung der Begriffe, nur die Einsicht in den Zahlenkalkül kann vermitteln, daß $3 + 2 = 5$ ist. Das ist es, was sich in uns auflehnt gegen den Gedanken, daß

„ $(\exists 3x).\phi x \ \& \ (\exists 2x).\psi x \ \& \ \text{Ind.} \ \supset \ (\exists 5x).\phi x \ \vee \ \psi x$ “⁶⁵

der Satz $3 + 2 = 5$ sein könnte. Denn dasjenige,⁶⁶ wodurch wir jenen⁶⁷ Ausdruck als Tautologie erkennen, kann sich selbst nicht aus einer Betrachtung von Begriffen ergeben, sondern muß aus dem Kalkül zu ersehen sein. Denn die Grammatik ist ein Kalkül. D.h., was im Tautologien-Kalkül noch außer dem Zahlenkalkül da ist, rechtfertigt diesen nicht und ist, wenn wir uns für ihn interessieren, nur Beiwerk.

Die Kinder lernen in der Schule wohl $2 \times 2 = 4$, aber nicht $2 = 2$.

64 (V): ausgeschlossen

65 (E): Im Manuskript steht: „ $(\exists 3x)\phi x \cdot (\exists 2x)\psi x \cdot$
Ind. $\supset (\exists 5x)\phi x \vee \psi x$ “.

66 (V): das,

67 (V): diesen

calculus? – the answer is: This equation is a replacement rule which rests on certain general replacement rules, the rules of addition. The content of $5 + 7 = 12$ (if someone didn't know it) is precisely what children find difficult when they are learning this proposition in maths class.

No investigation of concepts, only insight into the number calculus, can get across that $3 + 2 = 5$. That is what makes us rebel against the idea that

“($\exists 3x$). ϕx & ($\exists 2x$). ψx & Ind. \supset . ($\exists 5x$). $\phi x \vee \psi x$ ”⁴⁶

could be the proposition $3 + 2 = 5$. For what enables us to tell that that⁴⁷ expression is a tautology cannot itself be the result of an examination of concepts, but must be ascertainable from the calculus. For grammar is a calculus. That is, whatever else the tautology calculus contains apart from the number calculus does not justify the latter; and if the number calculus is what we are interested in, it is mere decoration.

Children do learn $2 \times 2 = 4$ in school, but not $2 = 2$.

46 (E): The manuscript source has: “($\exists 3x$) ϕx · 47 (V): this
 ($\exists 2x$) ψx · Ind. \supset ($\exists 5x$) $\phi x \vee \psi x$ ”.

Zahlangaben innerhalb der Mathematik.

600

Worin liegt der Unterschied zwischen der Zahlangabe, die sich auf einen Begriff¹ und der Zahlangabe, die sich auf eine Variable bezieht? Die Erste ist ein Satz, der von dem Begriff handelt, die zweite eine grammatische Regel die Variable betreffend.

Kann ich aber nicht eine Variable dadurch bestimmen, daß ich sage, ihre Werte sollen alle Gegenstände sein, die eine bestimmte Funktion befriedigen? – Dadurch *bestimme* ich ja die Variable nicht, außer wenn ich *weiß*, welche Gegenstände die Funktion befriedigen, d.h., wenn mir diese Gegenstände auch auf andre Weise (etwa durch eine Liste) gegeben sind; und dann wird die Angabe der Funktion überflüssig. Wissen wir nicht, ob ein Gegenstand die Funktion befriedigt, so wissen wir nicht, ob er ein Wert der Variablen sein soll und die Grammatik der Variablen ist dann in dieser Beziehung einfach nicht bestimmt.²

601

Zahlangaben *in* der Mathematik (z.B. „die Gleichung $x^2 = 1$ hat 2 Wurzeln“) sind daher von ganz anderer Art, als Zahlangaben außerhalb der Mathematik („auf dem Tisch liegen 2 Äpfel“.)

Wenn man sagt, A B lasse 2 Permutationen zu, so klingt das, als mache man eine *allgemeine* Aussage, analog der „in dem Zimmer sind 2 Menschen“, wobei über die Menschen noch nichts weiter gesagt ist und bekannt sein braucht. Das ist aber im Falle A B nicht so. Ich kann A B, B A nicht allgemeiner beschreiben und daher kann der Satz, es seien 2 Permutationen möglich, nicht weniger sagen, als es sind die Permutationen A B und B A möglich. Zu sagen, es sind 6 Permutationen von 3 Elementen möglich kann nicht weniger, d.h. etwas allgemeineres sagen, als das Schema zeigt:

A B C
A C B
B A C
B C A
C A B
C B A

Denn es ist *unmöglich*, die Zahl der möglichen Permutationen zu kennen, ohne diese selbst zu kennen. Und wäre das nicht so, so könnte die Kombinatorik nicht zu ihren allgemeinen Formeln kommen. Das Gesetz, welches wir in der Bildung der Permutationen erkennen, ist durch die Gleichung $p = n!$ dargestellt. Ich glaube, in demselben Sinn, wie der Kreis durch die Kreisgleichung. – Ich kann freilich die Zahl 2 den Permutationen A B, B A zuordnen, sowie die 6 den ausgeführten Permutationen von A, B, C, aber das gibt mir nicht den Satz

1 (V): Zahlangabe über einen Begriff

2 (V): ausgesprochen.

Statements of Number within Mathematics.

What distinguishes a statement of number that refers to a concept¹ from one that refers to a variable? The first is a proposition about the concept, the second a grammatical rule concerning the variable.

But can't I specify a variable by saying that its values are to be all objects satisfying a certain function? – If I do that, I'm really not *specifying* the variable unless I *know* which objects satisfy the function, that is, if these objects are also given to me in another way (say by a list); and then giving the function becomes superfluous. If we do not know whether an object satisfies the function, then we do not know whether it is to be a value of the variable, and then the grammar of the variable is in this respect simply not determined.²

Statements of number *in* mathematics (e.g. “The equation $x^2 = 1$ has 2 roots”) are therefore quite different in kind from statements of number outside mathematics (“There are 2 apples lying on the table”).

If we say that A B admits of 2 permutations, it sounds as if we are making a *general* assertion, analogous to “There are 2 people in the room”, in which nothing further has yet been said or need be known about the people. But this isn't so in the case of A B. I cannot give a more general description of A B, B A, and so the proposition that 2 permutations are possible cannot say less than that the permutations A B and B A are possible. To say that 6 permutations of 3 elements are possible cannot say less, i.e. anything more general, than is shown by the schema:

A B C
A C B
B A C
B C A
C A B
C B A

For it's *impossible* to know the number of possible permutations without knowing which they are. And if this weren't so, the theory of combinations couldn't arrive at its general formulae. The law that we discern in the formation of the permutations is represented by the equation $p = n!$. In the same sense, I believe, as a circle is represented by the equation for a circle. – To be sure, I can correlate the number 2 with the permutations A B, B A, just as I can the number 6 with the development of the permutations of A, B, C, but that doesn't give me the theorem of combination theory. What I see in A B, B A is an internal

1 (V): number about a concept

2 (V): expressed.

der Kombinationslehre. – Das was ich in A B, B A sehe, ist eine interne Relation, die sich daher nicht beschreiben läßt. D.h. *das* läßt sich nicht beschreiben, was diese Klasse von Permutationen komplett macht. – Zählen kann ich nur, was tatsächlich da ist, nicht die Möglichkeiten. Ich kann aber z.B. berechnen, wieviele Zeilen ein Mensch schreiben muß, wenn er in jede Zeile eine Permutation von 3 Elementen setzt und solange permutiert, bis er ohne Wiederholung nicht weiter kann. Und das heißt, er braucht 6 Zeilen, um auf diese Weise die Permutationen A B C, A C B, etc. hinzuschreiben, denn dies sind eben „die Permutationen von A, B, C“. Es hat aber keinen Sinn zu sagen, dies seien alle Permutationen von A B C.

Eine Kombinationsrechenmaschine ist denkbar ganz analog der Russischen.

Es ist klar, daß es eine mathematische Frage gibt:³ „wieviele Permutationen von – z.B. – 4 Elementen gibt es“, eine Frage von genau derselben Art, wie die „wieviel ist 25×18 “. Denn es gibt eine allgemeine Methode zur Lösung beider.

Aber die Frage gibt es auch nur mit Bezug auf diese Methode.

Der Satz, es gibt 6 Permutationen von 3 Elementen, ist identisch mit dem Permutationsschema und darum gibt es hier keinen Satz „es gibt 7 Permutationen von 3 Elementen“, denn dem entspricht kein solches Schema.

Man könnte die Zahl 6 in diesem Falle auch als eine andere Art von Anzahl, die Permutationszahl von A, B, C auffassen. Das Permutieren als eine andere Art des Zählens.

Wenn man wissen will, was ein Satz bedeutet, so kann man immer fragen „wie weiß ich das“. Weiß ich, daß es 6 Permutationen von 3 Elementen gibt, auf die gleiche Weise wie, daß 6 Personen im Zimmer sind? Nein. Darum ist jener Satz von anderer *Art* als dieser.

Man kann auch sagen, der Satz „es gibt 6 Permutationen von 3 Elementen“ verhält sich genau so zum Satz „es sind 6 Leute im Zimmer“, wie der Satz $3 + 3 = 6$, den man auch in der Form „es gibt 6 Einheiten in $3 + 3$ “ aussprechen könnte. Und wie ich in dem einen Fall die Reihen im Permutationsschema zähle, so kann ich im andern die Striche in

|||
||| zählen.

603 Wie ich $4 \times 3 = 12$ durch das Schema beweisen kann: $\begin{matrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix}$,⁴ so kann ich $3! = 6$ durch das Permutationsschema beweisen.

Der Satz „die Relation R verbindet zwei Gegenstände miteinander“, wenn das soviel heißen soll, wie „R ist eine zweistellige Relation“ ist ein Satz der Grammatik.

3 (O): gibt;

4 (F): MS 108, S. 75.

relation, which therefore cannot be described. That is to say, *what* makes this class of permutations complete cannot be described. – I can only count what is actually there, not possibilities. But I can figure out, for example, how many lines someone must write if he puts a permutation of 3 elements in each line and continues his permutations until he can't go any further without repetition. And this means he needs 6 lines to write down the permutations A B C, A C B, etc. in this way, for these just are “*the* permutations of A, B, C”. But it makes no sense to say that these are all permutations of A B C.

We could imagine a calculating-machine for combinations that is completely analogous to the Russian one.

It's clear that there is a mathematical question: “How many permutations of – say – 4 elements are there?”. This is a question of precisely the same kind as “How much is 25×18 ?”. For there is a general method for solving both problems.

But it is only with respect to this method that this question exists.

The proposition that there are 6 permutations of 3 elements is identical with the permutation schema, and therefore there is no proposition here that says “There are 7 permutations of 3 elements”, for no such schema corresponds to that.

You could also conceive of the number 6 in this case as another kind of number, the permutation-number of A, B, C. Permuting as another kind of counting.

If you want to know what a proposition means, you can always ask “How do I know that?”. Do I know that there are 6 permutations of 3 elements in the same way in which I know that there are 6 people in a room? No. Therefore the former proposition is of a different *kind* from the latter.

You can also say that the proposition “There are 6 permutations of 3 elements” is related to the proposition “There are 6 people in the room” in precisely the same way as is the proposition “ $3 + 3 = 6$ ”, which you could also express in the form “There are 6 units in $3 + 3$ ”. And just as in the one case I count the rows in the permutation schema, so in the other I can count the strokes in

| | |
| | | .

Just as I can prove that $4 \times 3 = 12$ by means of the schema $\begin{matrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix}$, ³I can also prove that $3! = 6$ by means of the permutation schema.

The proposition “The relation R links two objects”, if it is to amount to the same thing as “R is a two-place relation”, is a proposition of grammar.

3 (F): MS 108, p. 75.

Zahlengleichheit. Längengleichheit.

604

Wie soll man nun den Satz auffassen „diese Hüte haben die gleiche Größe“, oder „diese Stäbe haben die gleiche Länge“, oder „diese Flecke¹ haben die gleiche Farbe“? Soll man sie in der Form schreiben: „ $(\exists L).La \& Lb$ “? Aber wenn das in der gewöhnlichen Weise gemeint wird, also mit den gewöhnlichen Regeln gebraucht wird, so müßte es ja dann Sinn haben zu schreiben „ $(\exists L).La$ “ also „der Fleck a hat eine Farbe“, „der Stab hat eine Länge“. Ich kann freilich „ $(\exists L).La \& Lb$ “ für „a und b sind gleichlang“ schreiben, wenn ich nur weiß und berücksichtige, daß „ $(\exists L).La$ “ sinnlos ist; aber dann wird die Notation irreführend und verwirrend. („eine Länge haben“, „einen Vater haben“). – Wir haben hier den Fall, den wir in der gewöhnlichen Sprache² oft so ausdrücken: „Wenn a die Länge L hat, so hat b auch L“; aber hier hätte der Satz „a hat die Länge L“ gar keinen Sinn, oder doch nicht als Aussage über a; und der Satz lautet richtiger „nennen wir die Länge von a ‚L‘, so ist die Länge von b auch ‚L‘“³ und „L“ ist eben hier wesentlich eine Variable. Der Satz hat übrigens die Form eines Beispiels, eines Satzes, der als Beispiel zum allgemeinen Satz dienen kann und man würde etwa auch fortfahren:⁴ „wenn z.B. a die Länge 5m hat,⁵ so hat b auch 5m, u.s.w.“. – Zu sagen „die Stäbe a und b haben die gleiche Länge“ sagt nämlich gar nichts über die Länge jedes Stabes; denn es sagt auch nicht, „daß jeder der beiden eine Länge hat“. Der Fall hat also gar keine Ähnlichkeit mit dem: „A und B haben den gleichen Vater“ und „der Name des Vaters von A und B ist ‚N‘“, wo ich einfach für die allgemeine Bezeichnung den Eigennamen einsetze. „5m“ ist aber⁶ nicht der Name der betreffenden Länge, von der zuerst nur gesagt wurde, daß a und b sie beide besäßen. Wenn es sich um Längen im Gesichtsfeld handelt, können wir zwar sagen, die beiden Längen seien gleich, aber wir können sie im allgemeinen nicht mit einer Zahl „benennen“. – Der Satz „ist L die Länge von a, so hat auch b die Länge L“ schreibt seine Form nur als eine von der eines Beispiels⁷ derivierte (Form) hin. Und man könnte den allgemeinen Satz auch wirklich durch eine Aufzählung⁸ von Beispielen mit einem „u.s.w.“ ausdrücken. Und es ist eine Wiederholung desselben Satzes, wenn ich sage: „a und b sind gleichlang; ist die Länge von a L, so ist die Länge von b auch L; ist a 5m lang, so ist auch b 5m lang, ist a 7m, so ist b 7m, u.s.w.“. Die dritte Fassung zeigt schon, daß in dem Satz nicht das „und“ zwischen zwei Formen steht, wie in „ $(\exists x).\phi x \& \psi x$ “, so daß man auch „ $(\exists x).\phi x$ “ und „ $(\exists x).\psi x$ “ schreiben dürfte.

605

Nehmen wir als Beispiel auch den Satz „in den beiden Kisten sind gleichviel Äpfel“. Wenn man diesen Satz in der Form schreibt „es gibt eine Zahl, die die⁹ Zahl der Äpfel in

1 (V): Flecken

2 (V): Sprache

3 (O): auch L“

4 (V): fortsetzen:

5 (V): a 5m lang ist,

6 (V): aber

7 (V): als eine von der Form eines // des // Beispiels

8 (V): Anführung

9 (V): Zahl, die die

Sameness of Number. Sameness of Length.

How should we understand the proposition “These hats are of the same size”, or “These rods have the same length”, or “These patches have the same colour”? Should we write them in the form “ $(\exists L).La \ \& \ Lb$ ”? But if that is meant in the usual way, i.e. is used with the usual rules, then it ought to make sense to write “ $(\exists L).La$ ”, i.e. “The patch a has a colour”, “The rod has a length”. To be sure, I can write “ $(\exists L).La \ \& \ Lb$ ” for “a and b have the same length”, provided that I know and take into account that “ $(\exists L).La$ ” is senseless; but then the notation becomes misleading and confusing (“to have a length”, “to have a father”). – Here we have the case that we often express in ordinary language as follows: “If a has the length L, so does b”; but here the proposition “a has the length L” has no sense at all, or at least not as a statement about a; and more correctly phrased, the proposition reads “If we call the length of a ‘L’, then the length of b is also L”, and here “L” is essentially a variable. That proposition, incidentally, has the form of an example, of a proposition that can serve as an example of a general proposition; and we might continue: “For example, if a has the length of 5 metres,¹ then b also has the length of 5 metres, etc.” – For saying “The rods a and b have the same length” says nothing at all about the length of each rod; neither does it say “that each of the two has a length”. So this case is quite unlike “A and B have the same father” and “The name of A’s and B’s father is ‘N’”, where I simply substitute the proper name for the general description. But “5 m” is not the name of the length in question, of which it was first said merely that a and b both had it. If it is a matter of lengths in the visual field we can say, to be sure, that the two lengths are equal, but in general we cannot “name” them with a number. – The written form of the proposition “If L is the length of a, then b has that length as well” is derived solely from the (form) of an example.² And indeed, we could express the universal proposition by enumerating³ examples, followed by “etc.”. And if I say, “a and b are of equal length; if the length of a is L, then the length of b is also L; if a is 5 m long, then b is also 5 m long, if a is 7 m long, then b is 7 m long, etc.”, I am repeating the same proposition. The third formulation shows that in the proposition the “and” doesn’t stand between two forms, as it does in “ $(\exists x).\phi x \ \& \ \psi x$ ”, so that one can also write “ $(\exists x).\phi x$ ” and “ $(\exists x).\psi x$ ”.

Let us take as a further example the proposition “There are the same number of apples in each of the two boxes”. If we write this in the form “There is a number that is the

1 (V): a is 5 metres long,

3 (V): listing

2 (V): from one of the forms of an // the // example.

beiden Kisten ist“, so kann man auch hier nicht die Form bilden: „es gibt eine Zahl, die die Zahl der Äpfel in dieser Kiste ist“, oder „die Äpfel in dieser Kiste haben eine Zahl“. Schreibe ich:

$$(\exists x).\phi x \text{ \& } \sim(\exists x, y).\phi x \text{ \& } \psi x \text{ \& } =. (\exists_n 1x).\phi x \text{ \& } =. \phi 1 \text{ etc.,}$$

so könnte man den Satz „die Anzahl der Äpfel in den beiden Kisten ist die gleiche“ schreiben: „ $(\exists_n).\phi n \text{ \& } \psi n$ “. „ $(\exists n).\phi n$ “ aber wäre kein Satz.

607 Will man den Satz „unter ϕ und ψ fallen gleichviele Gegenstände“ in übersichtlicher Notation schreiben, so ist man vor allem versucht, ihn in der Form „ $\phi n \text{ \& } \psi n$ “ zu schreiben. Und ferner empfindet man das nicht als logisches Produkt von ϕn und ψn , so daß es also auch Sinn hätte zu schreiben $\phi n \text{ \& } \psi 5$ – sondern es ist wesentlich, daß nach „ ϕ “ und „ ψ “ der gleiche Buchstabe folgt und $\phi n \text{ \& } \psi n$ ist eine Abstraktion aus logischen Produkten $\phi 4 \text{ \& } \psi 4$, $\phi 5 \text{ \& } \psi 5$ etc., nicht selbst ein logisches Produkt.

(Es würde also auch nicht aus $\phi n \text{ \& } \psi n$ folgen. „ $\phi n \text{ \& } \psi n$ “ verhält sich vielmehr zu einem logischen Produkt ähnlich wie der Differenzialquotient zu einem Quotienten.) Es ist so wenig ein logisches Produkt, wie die Photographie einer Familiengruppe eine Gruppe von Photographien ist. Darum kann uns also die Form „ $\phi n \text{ \& } \psi n$ “ irreführen und es wäre vielleicht eine Schreibweise der Art „ $\overline{\phi n \text{ \& } \psi n}$ “¹⁰ vorzuziehen; aber auch „ $(\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$ “, wenn die Grammatik dieses Zeichens festgelegt ist. Man kann dann festlegen:

$$(\exists n).\phi n = \text{Taut.}, \text{ was soviel heißt wie } (\exists n).\phi n \text{ \& } p = p.$$

Also $(\exists n).\phi n \vee \psi n = \text{Taut.}, (\exists n)\phi n \supset \psi n = \text{Taut.}, (\exists n).\phi n | \psi n = \text{Cont.}, \text{ etc.}$

$$\phi 1 \text{ \& } \psi 1 \text{ \& } (\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n = \phi 1 \text{ \& } (\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$$

$$\phi 2 \text{ \& } \psi 2 \text{ \& } (\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n = \phi 2 \text{ \& } (\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$$

etc. ad inf.

Und überhaupt sind die Rechnungsregeln für $(\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$ daraus abzuleiten, daß man schreiben kann:

$$(\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n = \phi 0 \text{ \& } \psi 0 \text{ \& } \vee \phi 1 \text{ \& } \psi 1 \text{ \& } \vee \phi 2 \text{ \& } \psi 2 \text{ u.s.w. ad inf.}$$

Es ist klar, daß dies keine logische Summe ist, da „u.s.w. ad inf.“ kein Satz ist. Die Notation $(\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$ ist aber auch nicht unmißverständlich; denn man könnte sich wundern, warum man hier statt $\phi n \text{ \& } \psi n$ nicht Φn sollte setzen können und dann sollte ja „ $(\exists n).\Phi n$ “ nichtssagend werden. Das klärt sich natürlich auf, wenn man auf die Notation $\sim(\exists x).\phi x$ für $\phi 0$, $(\exists x).\phi x \text{ \& } \sim(\exists x, y).\phi x \text{ \& } \phi y$ für $\phi 1$, etc. zurückgeht, beziehungsweise auf $(\exists_n 0x).\phi x$ für $\phi 0$, $(\exists_n 1x).\phi x$ für $\phi 1$, etc. Denn dann ist zu unterscheiden zwischen

$$(\exists_n 1x).\phi x \text{ \& } (\exists_n 1x).\psi x \quad \text{und}$$

$$(\exists_n 1x).\phi x \text{ \& } \psi x.$$

Und geht man auf¹¹ $(\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$ über, so bedeutet das $(\exists n):(\exists_n nx).\phi x \text{ \& } (\exists_n nx).\psi x$ (welches nicht nichtssagend ist) und nicht $(\exists n):(\exists_n nx).\phi x \text{ \& } \psi x$, welches nichtssagend ist.

608 Die Worte „gleichzahlig“, „längengleich“, „gleichfärbig“, etc. haben ähnliche aber nicht die gleiche Grammatik.¹² – In allen Fällen liegt die Auffassung des Satzes als eine endlose logische Summe nahe, deren Glieder die Form $\phi n \text{ \& } \psi n$ haben. Außerdem hat jedes dieser

10 (F): MS 113, S. 16r.

11 (V): auf Φ_n .

12 (V): aber verschiedene Grammatik.

number of the apples in each of the two boxes”, then here too we cannot construct the form “There is a number that is the number of apples in this box” or “The apples in this box have a number”. If I write:

$(\exists x).\phi x \text{ \& } \sim(\exists x, y).\phi x \text{ \& } \psi x \text{ \& } \dots (\exists_n 1x).\phi x \text{ \& } \phi 1, \text{ etc.,}$

then we could write the proposition “The number of apples in both boxes is the same” as: “ $(\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$ ”. But “ $(\exists n).\phi n$ ” wouldn’t be a proposition.

If you want to write the proposition “The same number of objects falls under ϕ and ψ ” in a surveyable notation, the strongest temptation is to write it in the form “ $\phi n \text{ \& } \psi n$ ”. And that doesn’t feel as if it were a logical product of ϕn and ψn , so that it would also make sense to write $\phi n \text{ \& } \psi 5$; rather, it is essential that the same letter should follow ϕ and ψ ; and $\phi n \text{ \& } \psi n$ is an abstraction from the logical products $\phi 4 \text{ \& } \psi 4, \phi 5 \text{ \& } \psi 5, \text{ etc.,}$ and not a logical product itself.

(So neither would ϕn follow from $\phi n \text{ \& } \psi n$. Rather, the relation of “ $\phi n \text{ \& } \psi n$ ” to a logical product is similar to that of a differential quotient to a quotient.) $\phi n \text{ \& } \psi n$ is no more a logical product than the photograph of a family group is a group of photographs. Therefore the form “ $\phi n \text{ \& } \psi n$ ” can mislead us, and perhaps a notation of the form “ $\overline{\phi n \text{ \& } \psi n}$ ”⁴ would be preferable; or even “ $(\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$ ”, provided that the grammar of this sign has been fixed. We can then stipulate:

$(\exists n).\phi n = \text{Taut.}$, which amounts to the same thing as $(\exists n).\phi n \text{ \& } p = p$.

Therefore $(\exists n).\phi n \vee \psi n = \text{Taut.}$, $(\exists n).\phi n \supset \psi n = \text{Taut.}$, $(\exists n).\phi n \mid \psi n = \text{Cont.}$, etc.

$\phi 1 \text{ \& } \psi 1 \text{ \& } (\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n = \phi 1 \text{ \& } (\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$

$\phi 2 \text{ \& } \psi 2 \text{ \& } (\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n = \phi 2 \text{ \& } (\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$

etc. *ad inf.*

And in general the calculation rules for $(\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$ can be derived from the fact that we can write:

$(\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n = \phi 0 \text{ \& } \psi 0 \vee \phi 1 \text{ \& } \psi 1 \vee \phi 2 \text{ \& } \psi 2 \text{ and so on } ad \textit{ inf.}$

It’s clear that this is not a logical sum, because “and so on *ad inf.*” is not a proposition. But the notation $(\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$ isn’t exempt from misunderstanding either, because you could wonder why you can’t put Φn instead of $\phi n \text{ \& } \psi n$ here, though if you did $(\exists n)\Phi n$ would of course be meaningless. Of course this gets cleared up if we go back to the notation $\sim(\exists x).\phi x$ for $\phi 0$, $(\exists x).\phi x \text{ \& } \sim(\exists x, y).\phi x \text{ \& } \phi y$ for $\phi 1$, etc., and to $(\exists_n 0x).\phi x$ for $\phi 0$, $(\exists_n 1x).\phi x$ for $\phi 1$ respectively, and so on. For then we can distinguish between

$(\exists_n 1x).\phi x \text{ \& } (\exists_n 1x).\psi x$ and

$(\exists_n 1x).\phi x \text{ \& } \psi x$

And if we make the transition to $(\exists n).\phi n \text{ \& } \psi n$, that means $(\exists n):(\exists_n nx).\phi x \text{ \& } (\exists_n nx).\psi x$ (which is not meaningless), and not $(\exists n):(\exists_n nx).\phi x \text{ \& } \psi x$, which is meaningless.

The expressions “of the same number”, “of the same length”, “of the same colour”, etc. have grammars that are similar but not the same.⁵ – In each case it seems natural to regard the proposition as an endless logical sum whose terms have the form $\phi n \text{ \& } \psi n$. Moreover,



4 (F): MS 113, p. 16r.

5 (V): similar, but different.

Worte mehrere verschiedene Bedeutungen, d.h., könnte selbst wieder durch mehrere Wörter mit verschiedener Grammatik ersetzt werden. Denn „gleichzählig“ heißt etwas anderes, wenn es auf Striche angewandt wird, die gleichzeitig im Gesichtsraum sind, als wenn es sich auf die Äpfel in zwei Kisten bezieht; und „gleichlang“ im¹³ Gesichtsraum angewandt ist verschieden von „gleichlang“ im euklidischen Raum; und die Bedeutung von „gleichfärbig“ hängt von dem Kriterium ab, das wir für die Gleichfärbigkeit annehmen.

Wenn es sich um Flecke im Gesichtsraum handelt, die wir zu gleicher Zeit sehen, so hat das Wort „gleichlang“ verschiedene Bedeutung, je nachdem die Strecken unmittelbar angrenzend oder von einander entfernt sind. In der Wortsprache hilft man sich da häufig¹⁴ mit dem Wort „es scheint“.

Die Gleichzähligkeit, wenn es sich um eine Anzahl von Strichen handelt, „die man übersehen kann“, ist eine andere als die, welche nur durch Zählen der Striche festgestellt werden kann.

	A	B
I	◦	◦
II	◦ ◦	◦ ◦ ◦
III	◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦	◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦
IV	◦ ◦	◦ ◦
V		

¹⁵Verschiedene Kriterien der Gleichzähligkeit: I und II die Zahl, die man unmittelbar erkennt; III das Kriterium der Zuordnung; IV hier muß man beide Klassen zählen; V man erkennt das gleiche Muster. (Das sind natürlich nicht die einzigen Fälle.)

Im Fall der Längengleichheit im euklidischen Raum mag man sagen, sie bestehe darin, daß beide Strecken die gleiche Zahl von cm messen, beide 5cm, beide 10cm, etc. Wenn es sich aber um die Längengleichheit zweier Strecken im Gesichtsraum handelt, so gibt es hier nicht eine Länge L die beide haben.

Man möchte sagen: zwei Stäbe müssen immer entweder gleichlang oder verschieden lang sein. Aber was heißt das? Es ist natürlich eine Regel der Ausdrucksweise. „In den zwei Kisten müssen entweder gleichviel Äpfel oder verschiedene Anzahlen sein.“ Das Anlegen zweier Maßstäbe an je eine Strecke soll die Methode sein, wie ich herausfinde, ob die beiden Strecken gleichlang sind: sind sie aber gleichlang, wenn die beiden Maßstäbe gerade nicht angelegt¹⁶ sind? Wir würden in diesem Fall sagen, wir wissen nicht, ob die beiden während dieser Zeit gleich oder verschieden lang sind. Aber man könnte auch sagen, sie haben während dieser Zeit keine Längen, oder etwa keine numerischen Längen.

Ähnliches, wenn auch nicht das Gleiche, gilt von der Zahlengleichheit.

Es gibt hier die Erfahrung, daß wir eine Anzahl Punkte sehen, deren Anzahl wir nicht unmittelbar sehen können, die wir aber während des Zählens überblicken können, so daß es Sinn hat zu sagen, sie haben sich während des Zählens nicht verändert. Andererseits aber gibt es auch den Fall einer Gruppe von Gegenständen¹⁷ oder Flecken, die wir nicht übersehen können, während wir sie zählen, so daß es hier das frühere Kriterium dafür, daß¹⁸ die Gruppe sich während des Zählens nicht verändert, nicht gibt.

610 Russells Erklärung der Gleichzähligkeit ist aus verschiedenen Gründen ungenügend. Aber die Wahrheit ist, daß man in der Mathematik keine solche Erklärung der Gleichzähligkeit braucht. Hier ist überhaupt alles falsch aufgezaunt.

13 (V): „gleichlang“ auf den

14 (V): oft

15 (F): MS 113, S. 17v.

16 (O): gerade angelegt



17 (V): Körpern

18 (O): Kriterium, daß

each of these words has several different meanings, i.e. each can itself be replaced by several words with different grammars. For “of the same number” means something different when applied to lines simultaneously present in visual space from when it refers to the apples in two crates; and “of the same length” applied in⁶ visual space is different from “of the same length” in Euclidean space; and the meaning of “of the same colour” depends on the criterion we adopt for sameness of colour.

If it’s a matter of patches in visual space seen simultaneously, the expression “of the same length” varies in meaning depending on whether the line segments are immediately adjacent to or at a distance from each other. In word-language we often⁷ get out of this difficulty by using the expression “it seems”.

Sameness of number, when it is a matter of a quantity of lines “that one can take in at a glance”, is a different sameness from that which can only be ascertained by counting the lines.

	A	B
I	•	•
II	• •	• • •
III	•••• •••• ••••	•••••• •••••• ••••••
IV	•••••••• •••••••• •••••••• ••••••••	•••••••••• •••••••••• ••••••~•••• ••••••~••••
V		

⁸Different criteria for sameness of number: in I and II the number that one immediately recognizes; in III the criterion of correlation; in IV we have to count both groups; in V we recognize the same pattern. (Of course these are not the only cases.)

We might say that equality of length in Euclidean space consists in both line segments measuring the same number of cm – both 5 cm, both 10 cm, etc. – but that where it is a case of two line segments in visual space being of equal length, there is no one length L that both line segments have.

One would like to say: Two rods must always be either the same length or different lengths. But what does that mean? Of course, that’s a rule for the way we speak. “The number of apples in the two crates must be either the same or different.” The method whereby I discover whether two line segments are of the same length is supposed to be the laying of a ruler against each segment: but do they have the same length when the two rulers happen *not* to be laid next to them? In that case we would say that we don’t know whether during that time the two line segments are of the same or different lengths. But we could also say that during that time they have no lengths, or, say, no numerical lengths.

Something similar, although not the same thing, holds for sameness of number.

Related to this is the experience where we see a multitude of dots whose number we can’t take in immediately, but which we can keep in view while we count, so that it makes sense to say that they haven’t changed during the counting. On the other hand, there’s also the case of a group of objects⁹ or patches that we can’t keep in view while we’re counting them, so that here we don’t have the same criterion as before for the group’s not changing while it is being counted.

Russell’s definition of sameness of number is inadequate for various reasons. The truth is, however, that in mathematics we don’t need any such definition of sameness of number. Here in general everything is set up wrong.

6 (V): to
7 (V): frequently

8 (F): MS 113, p. 17v.
9 (V): bodies

Was uns verführt die Russell'sche oder Frege'sche, Erklärung anzunehmen, ist der Gedanke, zwei Klassen von Gegenständen (Äpfeln in zwei Kisten) seien gleichzählig, wenn man sie einander 1 zu 1 zuordnen *könne*. Man denkt sich die Zuordnung als eine Kontrolle der Gleichzähligkeit. Und hier macht man in Gedanken wohl noch eine Unterscheidung zwischen Zuordnung und Verbindung durch eine Relation; und zwar wird die Zuordnung zur Verbindung, was die „geometrische Gerade“ zu einer wirklichen ist, eine Art idealer Verbindung; einer Verbindung, die quasi von der Logik vorgezeichnet ist und durch die Wirklichkeit nun nachgezogen werden kann. Es ist die Möglichkeit, aufgefaßt als eine schattenhafte Wirklichkeit. Dies hängt dann wieder mit der Auffassung von „ $(\exists x)\phi x$ “ als Ausdruck der Möglichkeit von ϕx zusammen.

„ ϕ und ψ sind gleichzählig“ (ich werde dies schreiben „ $S(\phi, \psi)$ “, oder auch einfach „ S “) soll ja aus „ $\phi 5 \ \& \ \psi 5$ “ folgen; aber aus $\phi 5 \ \& \ \psi 5$ folgt nicht, daß ϕ und ψ durch eine 1–1 Relation R verbunden sind (dies werde ich „ $\pi(\phi, \psi)$ “ oder „ π “ schreiben). Man hilft sich, indem man sagt, es bestehe dann eine Relation der Art

611 „ $x = a \ \& \ y = b \ .\vee. \ x = c \ \& \ y = d \ .\vee. \ \text{u.s.w.}$ “.

Aber, erstens, warum definiert man dann nicht gleich S als das Bestehen einer *solchen* Relation. Und wenn man darauf antwortet, diese Definition¹⁹ würde die Gleichzähligkeit bei unendlichen Anzahlen nicht einschließen, so ist zu sagen, daß dies nur auf eine Frage der „Eleganz“ hinausläuft, da ich letzten Endes für endliche Zahlen meine Zuflucht doch zu den „extensiven“ Beziehungen nehmen müßte. Aber diese führen uns auch zu nichts: denn, zu sagen, zwischen ϕ und ψ bestehe eine Beziehung – z.B. – der Form $x = a \ \& \ y = b \ .\vee. \ x = c \ \& \ y = d$ sagt nichts andres, als

$(\exists x, y).\phi x \ \& \ \phi y \ .\&. \ \sim(\exists x, y, z).\phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z \ : \&. \ (\exists x, y).\psi x \ \& \ \psi y \ .\&. \ \sim(\exists x, y, z).\psi x \ \& \ \psi y \ \& \ \psi z.$ (Was ich in der Form schreibe $(\exists_n 2x).\phi x \ \& \ (\exists_n 2x).\psi x.$) Und, zu sagen, zwischen ϕ und ψ bestehe *eine* der Beziehungen $x = a \ \& \ y = b$; $x = a \ \& \ y = b \ .\vee. \ x = c \ \& \ y = d$; etc. etc., heißt nichts andres als, es bestehe eine der Tatsachen $\phi 1 \ \& \ \psi 1$; $\phi 2 \ \& \ \psi 2$; etc. etc. Nun hilft man sich mit der größeren Allgemeinheit, indem man sagt, zwischen ϕ und ψ bestehe irgend eine 1–1 Relation und vergißt, daß man dann doch für die Bezeichnung²⁰ dieser Allgemeinheit die Regel festlegen muß, nach welcher „irgend eine Relation“ auch die Relationen der Form $x = a \ \& \ y = b$ etc. einschließt. Dadurch, daß man mehr sagt, kommt man nicht drum herum, das Engere zu sagen, das in dem Mehr vorhanden sein soll. (Die Logik läßt sich nicht betrügen.)

In dem Sinne von S also, in welchem S aus $\phi 5 \ \& \ \psi 5$ folgt, wird es durch die Russell'sche Erklärung nicht erklärt. Vielmehr braucht man da eine Reihe von Erklärungen

$$\left. \begin{array}{l} \phi 0 \ \& \ S = \phi 0 \ \& \ \psi 0 = \psi 0 \ \& \ S \\ \phi 1 \ \& \ S = \phi 1 \ \& \ \psi 1 = \psi 1 \ \& \ S \\ \text{etc. ad inf.} \end{array} \right\} \dots \alpha$$

612 Dagegen wird π als Kriterium der Gleichzähligkeit gebraucht und kann natürlich *in einem andern Sinne von S* auch S gleichgesetzt werden. (Und man kann dann nur sagen: Wenn in einer²¹ Notation $S = \pi$ ist, dann bedeutet S nichts andres als π .)

Es folgt zwar nicht π aus $\phi 5 \ \& \ \psi 5$, wohl aber $\phi 5 \ \& \ \psi 5$ aus $\pi \ \& \ \phi 5$.

$$\pi \ \& \ \phi 5 = \pi \ \& \ \phi 5 \ \& \ \psi 5 = \pi \ \& \ \psi 5$$

u.s.w.

19 (V): Erklärung

20 (V): ~~Beziehung~~

21 (V): Deiner

What seduces us into accepting the Russellian or Fregean definition is the thought that two classes of objects (apples in two crates) have the same number if they *can* be correlated 1 to 1. We think of correlation as a way of checking sameness of number. And here we distinguish in thought between being correlated and being connected by a relation; and to be precise, in relation to connection, correlation becomes what the “geometrical straight line” is in relation to a real line, namely a kind of ideal connection; a connection that has been sketched out by logic, as it were, and can now be drawn in bold by reality. It is possibility conceived of as a shadowy actuality. This in turn is connected with the idea of “ $(\exists x).\phi x$ ” as an expression of the possibility of ϕx .

“ ϕ and ψ have the same number” (I will write this as “ $S(\phi, \psi)$ ”, or simply “ S ”) is supposed to follow from “ $\phi 5 \ \& \ \psi 5$ ”; but it doesn’t follow from $\phi 5 \ \& \ \psi 5$ that ϕ and ψ are connected by a 1–1 relation R (this I will write as “ $\pi(\phi, \psi)$ ”, or “ π ”). We get out of the difficulty by saying that in that case there is a relation of the type

“ $x = a \ \& \ y = b \ .\vee. \ x = c \ \& \ y = d \ .\vee. \text{etc.}$ ”.

But then why don’t we define S as the existence of *such* a relation in the first place? And if you reply that this definition¹⁰ wouldn’t include sameness of number in the case of infinite numbers, we shall have to say that this boils down only to a question of “elegance”, because for finite numbers, I would still in the end have to take refuge in “extensional” relations. But these too get us nowhere, because saying that between ϕ and ψ there is a relation, e.g. of the form $x = a \ .\&. \ y = b \ .\vee. \ x = c \ .\&. \ y = d$ says only that

$(\exists x, y).\phi x \ \& \ \psi y \ .\&. \ \sim(\exists x, y, z).\phi x \ \& \ \phi y \ \& \ \phi z \ :.\&. \ (\exists x, y).\psi x \ \& \ \psi y \ .\&. \ \sim(\exists x, y, z).\psi x \ \& \ \psi y \ \& \ \psi z$. (Which I write in the form $(\exists_n 2x).\phi x \ \& \ (\exists_n 2x).\psi x$.) And saying that between ϕ and ψ there is *one* of the relations $x = a \ \& \ y = b$ or $x = a \ \& \ y = b \ .\vee. \ x = c \ \& \ y = d$, etc., etc., means only that one of the facts $\phi 1 \ \& \ \psi 1$ or $\phi 2 \ \& \ \psi 2$, etc., etc., obtains. Then we try to help ourselves out by becoming even more general, saying that between ϕ and ψ there is some 1–1 relation, forgetting that in order to specify this generality we still have to construct the rule according to which “some relation” also includes relations of the form $x = a \ \& \ y = b$, etc. One can’t, by saying more, avoid saying the *less* that is supposed to occur in the more. (Logic cannot be duped.)

So in the sense of S in which S follows from $\phi 5 \ \& \ \psi 5$, it is not defined by Russell’s definition. Rather, what we need here is a series of definitions

$$\left. \begin{array}{l} \phi 0 \ \& \ S = \phi 0 \ \& \ \psi 0 = \psi 0 \ \& \ S \\ \phi 1 \ \& \ S = \phi 1 \ \& \ \psi 1 = \psi 1 \ \& \ S \\ \text{etc. ad inf.} \end{array} \right\} \dots \alpha$$

On the other hand, π is used as a criterion for sameness of number and can, of course, *in another sense of S*, also be equated with S . (And then we can only say: if in a given notation¹¹ $S = \pi$, then S means nothing other than π .)

Though π doesn’t follow from $\phi 5 \ \& \ \psi 5$, $\phi 5 \ \& \ \psi 5$ does follow from $\pi \ \& \ \phi 5$.

$\pi \ \& \ \phi 5 = \pi \ \& \ \phi 5 \ \& \ \psi 5 = \pi \ \& \ \psi 5$
etc.

10 (V): explanation

11 (V): in your notation

Also kann man schreiben:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \& \phi_0 = \pi \& \phi_0 \& \psi_0 = \pi \& \phi_0 \& S \\ \pi \& \phi_1 = \pi \& \phi_1 \& \psi_1 = \pi \& \phi_1 \& S \\ \pi \& \phi_2 = \pi \& \phi_2 \& \psi_2 = \pi \& \phi_2 \& S \\ \text{u.s.w. ad inf.} \end{array} \right\} \dots \beta$$

Und dies kann man dadurch ausdrücken, daß man sagt, die Gleichzahligkeit folge aus π . Und man kann auch die Regel geben $\pi \& S = \pi$, die mit den Regeln, oder *der* Regel, β und der Regel α übereinstimmt.

Die Regel „aus π folgt S “ also $\pi \& S = \pi$ könnte man auch ganz gut weglassen; die Regel β tut denselben Dienst.

Schreibt man S in der Form

$$\phi_0 \& \psi_0 \vee \phi_1 \& \psi_1 \vee \phi_2 \& \psi_2 \vee \dots \text{ ad inf.,}$$

so kann man mit grammatischen Regeln, die der gewohnten Sprache entsprechen, leicht $\pi \& S = \pi$ ableiten. Denn

$$(\phi_0 \& \psi_0 \vee \phi_1 \& \psi_1 \text{ etc. ad inf.}) \& \pi = \phi_0 \& \psi_0 \& \pi \vee \phi_1 \& \psi_1 \& \pi \vee \text{ etc. ad inf.} = \phi_0 \& \pi \vee \phi_1 \& \pi \vee \phi_2 \& \pi \vee \text{ etc. ad inf.} = \pi \& (\phi_0 \vee \phi_1 \vee \phi_2 \vee \text{ etc. ad inf.}) = \pi.$$

Der Satz „ $\phi_0 \vee \phi_1 \vee \phi_2 \vee \text{ etc. ad inf.}$ “ muß als Tautologie behandelt werden.

- 613
- ²²Man kann den Begriff der Gleichzahligkeit so auffassen, daß es keinen Sinn hat,
 - von zwei Gruppen von Punkten Gleichzahligkeit oder das Gegenteil auszusagen,
 - wenn es sich nicht um zwei Reihen handelt, deren eine zum mindesten einem Teil der
 - andern 1–1 zugeordnet ist. Zwischen solchen Reihen kann ²³dann nur von einseitiger
 - oder gegenseitiger Inklusion²⁴ die Rede sein. Und diese hat eigentlich mit besonderen
 - Zahlen so wenig zu tun, wie die Längengleichheit oder Ungleichheit im Gesichtsraum
 - mit Maßzahlen. Die Verbindung mit den Zahlen *kann* gemacht werden, muß aber
 - nicht gemacht werden. Wird die Verbindung mit der Zahlenreihe gemacht, so wird die
 - Beziehung der gegenseitigen Inklusion oder Längengleichheit der Reihen zur Beziehung der
 - Zahlengleichheit. Aber nun folgt nicht nur ψ_5 aus $\pi \& \phi_5$ sondern auch π aus $\phi_5 \& \psi_5$.
 - Das heißt, hier ist $S = \pi$.

22 (F): MS 113, S. 21v.

23 (V): kann ✎

24 (V): Einschließung

We can therefore write:

$$\left. \begin{aligned} \pi \ \& \ \phi_0 = \pi \ \& \ \phi_0 \ \& \ \psi_0 = \pi \ \& \ \phi_0 \ \& \ S \\ \pi \ \& \ \phi_1 = \pi \ \& \ \phi_1 \ \& \ \psi_1 = \pi \ \& \ \phi_1 \ \& \ S \\ \pi \ \& \ \phi_2 = \pi \ \& \ \phi_2 \ \& \ \psi_2 = \pi \ \& \ \phi_2 \ \& \ S \end{aligned} \right\} \dots \beta$$

and so on *ad inf.*

And we can express this by saying that the sameness of number follows from π . And we can also give the rule $(\pi \ \& \ S) = \pi$, which agrees with the rules, or *the* rule, β and the rule α .

We could perfectly well drop the rule “S follows from π ”, that is, $\pi \ \& \ S = \pi$; the rule β does the same job.

If we write S in the form

$$(\phi_0 \ \& \ \psi_0) \vee (\phi_1 \ \& \ \psi_1) \vee (\phi_2 \ \& \ \psi_2) \vee \dots \textit{ad inf.},$$

we can easily derive $(\pi \ \& \ S) = \pi$ by using grammatical rules that correspond to ordinary language. For

$$\begin{aligned} (\phi_0 \ \& \ \psi_0 \ \vee \ \phi_1 \ \& \ \psi_1 \ \textit{etc. ad inf.}) \ \& \ \pi &= \phi_0 \ \& \ \psi_0 \ \& \ \pi \ \vee \ \phi_1 \ \& \ \psi_1 \ \& \ \pi \ \vee \ \textit{etc.} \\ \textit{ad inf.} &= \phi_0 \ \& \ \pi \ \vee \ \phi_1 \ \& \ \pi \ \vee \ \phi_2 \ \& \ \pi \ \vee \ \textit{etc. ad inf.} = \pi \ \& \ (\phi_0 \ \vee \ \phi_1 \ \vee \ \phi_2 \ \vee \ \textit{etc.} \\ &\textit{ad inf.}) = \pi. \end{aligned}$$

The proposition “ $\phi_0 \ \vee \ \phi_1 \ \vee \ \phi_2 \ \vee \ \textit{etc. ad inf.}$ ” must be treated as a tautology.

∴ ¹²We can understand the concept of sameness of number in such a way that it
 ∴ makes no sense to attribute sameness of number or its opposite to two groups of dots
 ∴ except in the case of two series of which one is correlated 1–1 to at least a part of the
 ∴ other. Then all we can talk about is unilateral or mutual inclusion between such series.
 ∴ And this inclusion really doesn’t have any more to do with particular numbers than
 ∴ equality or inequality of length in the visual field has to do with figures that we
 ∴ measure. We *can*, but don’t have to, make a connection with numbers. If we connect
 it with the number series, then the relation of mutual inclusion or of equality of length between
 the series becomes the relation of sameness of number. But then not only does ψ_5 follow
 from $\pi \ \& \ \phi_5$, but π also follows from $\phi_5 \ \& \ \psi_5$. That means that here $S = \pi$.

12 (F): MS 113, p. 21v.

Mathematischer Beweis.

Mathematical Proof.

615 Wenn ich sonst etwas suche, so kann ich das Finden beschreiben, auch wenn es nicht eingetreten ist; anders, wenn ich die Lösung eines mathematischen Problems suche.

Mathematische Expedition und Polarexpedition.

Wie kann es in der Mathematik Vermutungen geben? Oder vielmehr: Welcher Natur ist das, was in der Mathematik wie eine Vermutung aussieht? Wenn ich also etwa Vermutungen über die Verteilung der Primzahlen anstelle.

Ich könnte mir z.B. denken, daß jemand in meiner Gegenwart Primzahlen der Reihe nach hinschriebe, ich wüßte nicht, daß es die Primzahlen sind – ich könnte etwa glauben, es seien Zahlen, wie sie ihm eben einfelen – und nun versuchte ich irgendein Gesetz in ihnen zu finden. Ich könnte nun geradezu eine Hypothese über diese Zahlenfolge aufstellen, wie über jede andere, die ein physikalisches Experiment ergibt.

In welchem Sinne habe ich nun hiedurch eine Hypothese über die Verteilung der Primzahlen aufgestellt?

616 Man könnte sagen, eine Hypothese in der Mathematik hat den Wert, daß sie die Gedanken an einen bestimmten Gegenstand – ich meine ein bestimmtes Gebiet – heftet und man könnte sagen „wir werden gewiß etwas Interessantes über diese Dinge herausfinden“.

Das Unglück ist, daß unsere Sprache so grundverschiedene Dinge mit jedem der Worte „Frage“, „Problem“, „Untersuchung“, „Entdeckung“ bezeichnet. Ebenso mit den Worten „Schluß“, „Satz“, „Beweis“.

Es fragt sich wieder, welche Art der Verifikation lasse ich für meine Hypothese gelten? Oder kann ich vorläufig – *faute de mieux* – die empirische gelten lassen, solange ich noch keinen „strengen Beweis“ habe? Nein. Solange ein solcher Beweis nicht besteht, besteht gar keine Verbindung zwischen meiner Hypothese und dem „Begriff“ der Primzahl.

Erst der sogenannte Beweis verbindet die Hypothese überhaupt mit den Primzahlen *als solchen*. Und das zeigt sich daran, daß – wie gesagt – bis dahin die Hypothese als eine rein physikalische aufgefaßt werden kann. – Ist andererseits der Beweis geliefert, so beweist er gar nicht, was vermutet worden war, denn in die Unendlichkeit hinein kann ich nicht vermuten. Ich kann nur vermuten, was bestätigt werden kann, aber durch die Erfahrung

If I am Looking for Something in Other Cases I Can Describe Finding it, Even if it Hasn't Happened; it is Different if I am Looking for the Solution to a Mathematical Problem. Mathematical Expeditions and Polar Expeditions.

How can there be conjectures in mathematics? Or rather, what sort of thing is it that looks like a conjecture in mathematics? If, for instance, I make conjectures about the distribution of the primes.

I could imagine, for example, that someone were writing primes one after the other in my presence, but that I didn't know they were the primes – I might think that they were the numbers that just happened to occur to him – and now I might try to detect some sort of law in them. I might form a hypothesis about this number sequence straightaway, as I might about any other sequence of numbers generated by an experiment in physics.

Now in what sense have I, by so doing, made a hypothesis about the distribution of the primes?

We could say that a hypothesis in mathematics is of value in so far as it fastens our thoughts onto a particular object – I mean a particular area – and we could say “We shall surely find out something interesting about these things”.

Unfortunately, our language uses each of the words “question”, “problem”, “investigation”, “discovery” to refer to such fundamentally different things. As it does with the words “conclusion”, “proposition”, “proof”.

Again, the question arises: what kind of verification do I count as valid for my hypothesis? Or can I – for lack of something better – allow an empirical one to count for the time being, until I have “strict proof”? No. So long as there is no such proof, there is no connection at all between my hypothesis and the “concept” of a prime number.

Only the so-called proof establishes any connection between the hypothesis and the primes *as such*. And that is shown by the fact that – as I've said – until then the hypothesis can be understood as one belonging purely to physics. – On the other hand, once a proof has been supplied, it in no way proves what had been conjectured, for I can't conjecture on into infinity. I can only conjecture what can be confirmed, but experience can only confirm

kann nur eine endliche Zahl von Vermutungen bestätigt werden, und den Beweis kann man nicht vermuten, solange man ihn nicht hat, und dann auch nicht.¹

617 Angenommen, es hätte Einer den pythagoräischen Lehrsatz zwar nicht bewiesen, wäre aber durch Messungen der Katheten und Hypotenusen² zur „Vermutung“ dieses Satzes geführt worden. Und nun fände er den Beweis und sagt, er habe nun bewiesen, was er früher vermutet hatte: so ist doch wenigstens das eine merkwürdige Frage: An welchem Punkt des Beweises kommt denn nun das heraus, was er früher durch die einzelnen Versuche bestätigt fand? denn der Beweis ist doch wesensverschieden von der früheren Methode. – Wo berühren sich diese Methoden, da sie angeblich in irgendeinem Sinne das Gleiche ergeben? D.h.: Wenn der Beweis und die Versuche nur verschiedene Ansichten Desselben (derselben Allgemeinheit) sind.

(Ich sagte „aus der gleichen Quelle fließt nur Eines“ und man könnte sagen, es wäre doch zu sonderbar, wenn aus *so* verschiedenen Quellen dasselbe fließen sollte. Der Gedanke, daß aus verschiedenen Quellen dasselbe fließen kann ist uns von der Physik, d.h. von den Hypothesen so vertraut.³ Dort schließen wir immer von Symptomen⁴ auf die Krankheiten und wissen, daß die verschiedensten Symptome, Symptome Desselben sein können.)

Wie konnte man nach der Statistik *das* vermuten, was dann der Beweis zeigte?

Wo soll aus dem Beweis dieselbe Allgemeinheit hervorspringen, die die früheren Versuche wahrscheinlich machten?

Ich hatte die Allgemeinheit vermutet, ohne den Beweis zu vermuten (nehme ich an) und nun beweist der Beweis gerade die Allgemeinheit, die ich vermutete!?

618 Angenommen, jemand untersuchte gerade Zahlen auf das Stimmen des Goldbach'schen Satzes hin. Er würde nun die Vermutung aussprechen – und die läßt sich aussprechen – daß, wenn er mit dieser Untersuchung fortfährt, er, solange er lebt, keinen widersprechenden Fall antreffen werde. Angenommen, es werde nun ein Beweis des Satzes gefunden, – beweist der dann auch die Vermutung des Mannes? Wie ist das möglich?

Nichts ist verhängnisvoller für das philosophische Verständnis, als die Auffassung von Beweis und Erfahrung als zweier verschiedener, also doch vergleichbarer Verifikationsmethoden.

Welcher Art war Sheffers⁵ Entdeckung, daß $p \vee q$ und $\sim p$ sich durch $p|q$ ausdrücken lassen? – Man hatte keine Methode, nach $p|q$ zu suchen und wenn man heute eine fände, so könnte das keinen Unterschied machen.

Was war es, was wir vor der Entdeckung nicht wußten? (Es war nichts, was wir nicht wußten, sondern etwas, was wir nicht kannten.)

Das sieht man sehr deutlich, wenn man sich den Einspruch erhoben denkt, $p|p$ sei gar nicht das, was $\sim p$ sagt. Die Antwort ist natürlich, daß es sich nur darum handelt, daß das System $p|q$ etc. die nötige Multiplizität hat. Sheffer⁶ hat also ein symbolisches System gefunden, das die nötige Multiplizität hat.

Ist es ein Suchen, wenn ich das System Sheffers⁷ nicht kenne und sage, ich möchte ein System mit nur *einer* logischen Konstanten konstruieren. Nein!

1 (V): und auch nicht.

2 (O): Hypothenusen

3 (V): geläufig.

4 (O): Syntomen

5 (O): Scheffers

6 (O): Scheffers

7 (O): Scheffers

a finite number of conjectures, and you can't conjecture the proof until you've got it, and not then, either.

Suppose that someone hadn't proved Pythagoras' theorem, but had been led to "conjecture" it by measuring the sides and hypotenuses of right-angled triangles. And suppose he now discovered the proof, and said that now he had proved what he had earlier conjectured. In these circumstances this is at the least a remarkable question: At what point of the proof does what he had earlier found confirmed by individual trials emerge? For the proof, after all, is essentially different from the earlier method. – Where do these methods make contact, since supposedly in some sense they yield the same thing? That is, where do they make contact if the proof and the trials are only different aspects of the same thing (the same generality)?

(I have said: "Only one thing flows from the same spring", and one could say that it would certainly be odd beyond belief if the same thing were to flow from *such* different springs. The idea that the same thing can come from different sources is quite familiar to us from the physical sciences, i.e. from hypotheses. There we are always inferring illnesses from symptoms and we know that the most varied symptoms can be symptoms of the same thing.)

How were we able to surmise from statistics *the very thing* the proof later showed?

From where in a proof is the same generality to spring forth that the earlier trials made probable?

(I'm assuming that) I had conjectured the generality without conjecturing the proof, and now the proof proves *exactly* the generality that I conjectured!?

Suppose someone were investigating even numbers to see if they confirmed Goldbach's conjecture. He might express the surmisal – and it can be expressed – that if he continued with this investigation, he would never meet a counterexample as long as he lived. Now let's assume that a proof of the conjecture is discovered – will it also prove his surmisal? How is that possible?

Nothing is more disastrous to philosophical understanding than the notion of proof and experience as two different – yet still comparable – methods of verification.

What kind of discovery did Sheffer make when he found that $p \vee q$ and $\sim p$ can be expressed by $p|q$? No one had a method for looking for $p|q$, and if someone were to find one today, that wouldn't make any difference.

What was it that we didn't know before the discovery? (It wasn't anything that we didn't know; it was something with which we weren't acquainted.)

You can see this very clearly if you imagine someone objecting that $p|p$ isn't at all what is said by $\sim p$. The reply of course is that it's only a question of the system $p|q$, etc., having the requisite multiplicity. So Sheffer found a symbolic system with the requisite multiplicity.

Is it a search if I'm unaware of Sheffer's system and say that I'd like to construct a system with only *one* logical constant. No!

Die Systeme sind ja nicht in *einem* Raum, so daß ich sagen könnte: Es gibt Systeme mit 3 und 2 logischen Konstanten und nun suche ich die Zahl der Konstanten *in der selben Weise* zu vermindern. Es gibt hier keine *selbe Weise*.

619 | Wenn auf die Lösung – etwa – des Fermat'schen Problems Preise ausgesetzt sind, so könnte man mir vorhalten: Wie kannst Du sagen,⁸ daß es dieses Problem nicht gebe; wenn Preise auf die Lösung ausgesetzt sind, so muß es das Problem wohl geben. Ich müßte sagen: Gewiß, nur mißverstehen die, die darüber reden, die Grammatik des Wortes „mathematisches Problem“ und des Wortes „Lösung“. Der Preis ist eigentlich auf die Lösung einer naturwissenschaftlichen Aufgabe gesetzt; (gleichsam) auf das *Äußere* der Lösung (darum spricht man z.B. auch von einer Riemann'schen *Hypothese*). Die Bedingungen der Aufgabe sind äußerliche; und wenn die Aufgabe gelöst ist, so entspricht, was geschehen ist, der gestellten Aufgabe,⁹ wie die Lösung einer physikalischen Aufgabe dieser Aufgabe.

Wäre die Aufgabe, eine Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks zu finden, so ist die Konstruktion in dieser Aufgabenstellung durch das physikalische Merkmal charakterisiert, daß sie tatsächlich *ein durch Messung definiertes* regelmäßiges Fünfeck liefern soll. Denn den Begriff der *konstruktiven Fünfteilung* (oder des *konstruktiven Fünfecks*) erhalten wir ja erst durch die Konstruktion.¹⁰

Ebenso im Fermat'schen Satz haben wir ein empirisches Gebilde, das wir als *Hypothese* deuten, also – natürlich – nicht als Ende einer Konstruktion. Die Aufgabe fragt also, in gewissem Sinne, nach etwas Anderem, als was die Lösung gibt. |

| Natürlich steht auch der Beweis des Gegenteils des Fermat'schen Satzes, z.B., – im gleichen Verhältnis zur Aufgabe, wie der Beweis des Satzes. (Beweis der Unmöglichkeit einer Konstruktion.) |

620 | Sofern man die Unmöglichkeit der 3-Teilung als eine physische Unmöglichkeit darstellen kann, indem man z.B. sagt: „versuch‘ nicht, den Winkel in 3 gleiche Teile zu teilen, es ist hoffnungslos!“, insofern beweist der „Beweis der Unmöglichkeit“ diese *nicht*. Daß es *hoffnungslos* ist, die Teilung zu versuchen, das hängt mit physikalischen Tatsachen zusammen.

Denken wir uns, jemand stellte sich dieses¹¹ Problem: Es ist ein Spiel zu erfinden: das Spiel soll auf einem Schachbrett gespielt werden; jeder Spieler soll 8 Steine haben; von den weißen Steinen sollen 2 (die „Konsulen“), die an den Enden der Anfangsposition stehen, durch die Regeln irgendwie ausgezeichnet sein; sie sollen eine größere Bewegungsfreiheit haben als die andern; von den schwarzen Steinen soll einer (der „Feldherr“) ein¹² ausgezeichneter sein; ein weißer Stein nimmt einen schwarzen (und umgekehrt), indem er sich an dessen Stelle setzt; das ganze Spiel soll eine gewisse Analogie mit den Punischen Kriegen haben. Das sind die Bedingungen, denen das Spiel zu genügen hat. – Das ist gewiß eine Aufgabe, und eine Aufgabe ganz anderer Art, als die, herauszufinden, wie Weiß im Schachspiel unter gewissen Bedingungen gewinnen könne. – Denken wir uns nun aber das Problem:¹³ „Wie kann Weiß in dem¹⁴ Kriegsspiel, dessen Regeln wir noch nicht genau kennen, in 20 Zügen gewinnen?“ – Dieses Problem wäre ganz analog den Problemen der Mathematik (nicht ihren Rechenaufgaben).

8 (V): behaupten,

9 (V): der Stellung der Aufgabe,

10 (V): *Fünfecks*) haben wir ja noch gar nicht.

11 (V): folgendes

12 (O): „Feldherr“ ein

13 (V): aber die Frage:

14 (V): unserm

For the systems aren't in *one* space, so that I could say: There are systems with 3 and 2 logical constants and now I'll try to reduce the number of constants *in the same way*. There is no *same way* here.

| If prizes have been offered for the solution – say – of Fermat's theorem, someone might reproach me: How can you say¹ that this problem doesn't exist? If prizes have been offered for its solution, then surely the problem must exist. I would have to say: Certainly, it's just that the people who talk about it misunderstand the grammar of the expression "mathematical problem" and of the word "solution". The prize has actually been offered for the solution of a scientific problem; for the *exterior* of the solution (as it were) (that's why we also talk about a Riemannian *hypothesis*, for instance). The conditions of the problem are external conditions; and when the problem has been solved, what has happened corresponds to the problem that was set up² in the same way in which the solution to a problem in physics corresponds to that problem. |

If our assignment were to find a construction for a regular pentagon, then in the setting-up of the problem this construction is characterized by the physical criterion that it really is supposed to yield a regular pentagon, *as defined by measurement*. For we don't get the concept of *constructive division into five* (or of a *constructive pentagon*) until we get it from the construction.³

Likewise in Fermat's theorem we have an empirical structure that we interpret as a *hypothesis*, and so not – of course – as the end of a construction. So in a certain sense the problem asks for something other than what the solution gives.

| Of course a proof of the contradictory of Fermat's theorem (for instance) stands in the same relation to the problem as a proof of the theorem itself. (Proof of the impossibility of a construction.) |

In so far as we can represent the impossibility of the trisection of an angle as a physical impossibility (by saying things like "Don't try to divide an angle into 3 equal parts, it's hopeless!") the "proof of impossibility" does *not* prove this impossibility. That it is *hopeless* to attempt the trisection is connected with physical facts.

Imagine someone gave himself this⁴ problem. He is to invent a game; the game is to be played on a chessboard; each player is to have eight pieces; two of the white ones (the "consuls") that are at the ends of the beginning position of the game are to be given some special status by the rules; they are to have a greater freedom of movement than the other pieces; one of the black pieces (the "general") is to have a special status; a white piece takes a black one (and vice versa) by being put in its place; the whole game is to have a certain analogy with the Punic wars. Those are the conditions that the game has to satisfy. – There is no doubt that that is a problem, a problem of a completely different kind from that of finding out how under certain conditions white can win in chess. – But now let's imagine the problem:⁵ "How can white win in 20 moves in the⁶ war game whose rules we don't yet know precisely?" – That problem would be quite analogous to the problems of mathematics (not to its problems of calculation).

1 (V): claim

2 (V): to the setting-up of the problem

3 (V): For we don't even have the concept of *constructive division into five* (or of a *constructive pentagon*) yet.

4 (V): himself the following

5 (V): question:

6 (V): our

Was versteckt ist, muß gefunden werden können. (Versteckter Widerspruch.)

621 Was versteckt ist, muß sich auch, ehe es gefunden wurde, ganz beschreiben lassen, als wäre es (schon) gefunden.

Wenn man sagt, der Gegenstand ist so versteckt, daß es unmöglich ist, ihn zu finden, so hat das guten Sinn und die Unmöglichkeit ist hier natürlich keine logische; d.h., es hat *Sinn*, von dem Finden des Gegenstandes zu reden und auch, es zu beschreiben; und wir leugnen nur, daß es¹⁵ geschehen wird.

¹⁶Man könnte so sagen: Wenn ich etwas suche – ich meine, den Nordpol, oder ein Haus in London – so kann ich das, was ich suche, *vollständig* beschreiben, ehe ich es gefunden habe (oder gefunden habe, daß es nicht da ist) und diese Beschreibung wird in jedem Fall logisch einwandfrei sein. Während ich im Falle des „Suchens“ in der Mathematik, wo es nicht *in* einem System geschieht, das was ich suche, nicht beschreiben kann, oder nur scheinbar; denn, könnte ich es in allen Einzelheiten beschreiben, so *hätte* ich es eben schon, und ehe es *vollständig* beschrieben ist, kann ich nicht sicher sein, ob *das* was ich suche, logisch einwandfrei ist, sich also überhaupt beschreiben läßt; d.h. diese unvollkommene Beschreibung läßt gerade das aus, was notwendig wäre, damit etwas gesucht werden könnte. Sie ist also nur eine Scheinbeschreibung des „Gesuchten“.

Irreführt wird man hier leicht durch die Rechtmäßigkeit einer unvollkommenen Beschreibung im Falle des Suchens eines wirklichen Gegenstandes, und hier spielt wieder eine Unklarheit über die Begriffe „Beschreibung“ und „Gegenstand“ hinein. Wenn man sagt, ich gehe auf den Nordpol und erwarte mir dort eine Flagge zu finden, so hieße das in der Russell'schen Auffassung: ich erwarte mir Etwas (ein X) zu finden, das eine Flagge – etwa von dieser und dieser Farbe und Größe – ist. Und es scheint dann, als bezöge sich die Erwartung (das Suchen) auch hier nur auf eine indirekte Kenntnis¹⁷ und nicht auf den Gegenstand selbst, den ich erst dann direkt¹⁸ kenne (knowledge by acquaintance), wenn ich ihn vor mir habe (während ich vorher¹⁹ nur indirekt mit ihm bekannt bin). Aber das ist Unsinn. Was immer ich dort wahrnehmen kann – soweit es eine Bestätigung meiner Erwartung ist – kann ich auch schon vorher beschreiben. Und „beschreiben“ heißt hier nicht, etwas darüber aussagen, sondern es aussprechen, d.h.: Was ich suche, muß ich *vollständig* beschreiben *können*.

Die Frage ist: Kann man sagen, daß die Mathematik heute gleichsam ausgezackt – oder ausgefranst – ist und daß man sie deshalb wird abrunden können. Ich glaube, man kann das erstere nicht sagen, ebensowenig wie man sagen kann, die Realität sei struppig, weil es 4 primäre Farben, sieben Töne in einer Oktave,²⁰ drei Dimensionen im Sehraum etc. gäbe.

Die Mathematik „abrunden“²¹ kann man so wenig, wie man sagen kann „runden wir die vier primären Farben auf fünf oder zehn ab“, oder „runden wir die acht Töne einer Oktave²² auf zehn ab“.

Vergleich zwischen einer mathematischen Expedition und einer Polarexpedition. Diesen Vergleich anzustellen hat Sinn und ist sehr nützlich.

15 (V): das

16 (M): ///

17 (V): eine Beschreibung

18 (V): eigentlich

19 (V): früher

20 (O): Oktav,

21 (V): Mathematik abrunden

22 (O): Oktav

It must be possible to find what has been hidden. (Hidden contradiction.)

What has been hidden must also be completely describable before it is found, as if it had (already) been found.

It makes good sense to say that an object is hidden in such a way that it is impossible to find it; and of course the impossibility here is not a logical one; that is, it makes *sense* to talk of finding the object and also to describe the finding; we are merely denying that it⁷ will happen.

⁸We could put it like this: If I'm searching for something – I mean, the North Pole, or a house in London – I can *completely* describe what I am looking for before I've found it (or have found that it isn't there) and either way this description will be logically unobjectionable. Whereas if I'm "searching" for something in mathematics, unless I'm doing so *within* a system, I cannot describe what I am looking for, or can do so only apparently; for if I could describe it in every particular, then I would already *have* it; and before it has been *completely* described I can't be sure whether *what* I'm searching for is logically unobjectionable, and therefore describable at all. That is to say, this incomplete description leaves out just what would enable me to search for something. So it is only an apparent description of what is being "searched for".

Here we are easily misled by the legitimacy of an incomplete description when we are searching for a real object, and here again a lack of clarity about the concepts "description" and "object" comes into play. If someone says, I am going to the North Pole and I expect to find a flag there, that would mean, along Russellian lines: I expect to find something (an x) that is a flag – say of such and such a colour and size. And then it seems as if in this case as well, the expectation (the searching) referred only to indirect knowledge,⁹ and not to the object itself – which object I don't know directly¹⁰ (knowledge by acquaintance) until I have it in front of me (whereas previously I was only indirectly acquainted with it). But that is nonsense. Whatever I can perceive there – to the extent that it is a fulfilment of my expectation – I can also describe in advance. And here "describe" doesn't mean saying something about it, but rather expressing it. That is, I must *be able* to describe *completely* what I am looking for.

The question is: Can one say that at present mathematics is as it were jagged – or frayed – and that for that reason we shall be able to round it off? I think you can't say the former, any more than you can say that reality is *unkempt* because there are 4 primary colours, 7 notes in an octave, 3 dimensions in visual space, etc.

You can't "round off"¹¹ mathematics any more than you can say "Let's round off the 4 primary colours to 5 or 10" or "Let's round off the 8 tones in an octave to 10".

The comparison between a mathematical expedition and a polar expedition. It makes sense and is very useful to draw this comparison.

7 (V): that that

8 (M): ///

9 (V): to a description,

10 (V): don't really know

11 (V): round off

Wie seltsam wäre es, wenn eine geographische Expedition nicht sicher wüßte, ob sie ein Ziel, also auch ob sie überhaupt einen Weg hat. Das können wir uns nicht denken, es gibt Unsinn. Aber in der mathematischen Expedition verhält es sich gerade so. Also wird es vielleicht am besten sein, den Vergleich ganz fallen zu lassen.

Es wäre wie eine Expedition, die *des Raumes* nicht sicher wäre!

Könnte man sagen, daß die arithmetischen oder geometrischen Probleme immer so ausschauen, oder fälschlich so aufgefaßt werden können, als bezögen sie sich auf Gegenstände im Raum, während sie sich auf den Raum selbst beziehen?

Raum nenne ich das, dessen man beim Suchen *gewiß* sein kann.

How strange it would be if a geographical expedition didn't know for sure whether it had a goal, and so also whether it even had a route. We can't imagine such a thing; it's nonsense. But this is precisely the way things are in a mathematical expedition. And so perhaps it will be best to drop the comparison altogether.

It would be like an expedition that wasn't sure of *space*!

Can one say that arithmetical or geometrical problems always seem, or can be falsely conceived, to refer to objects in space, whereas they refer to space itself?

I call "space" what one can be *certain* of while searching.

624 Beweis, und Wahrheit und Falschheit eines mathematischen Satzes.

Der bewiesene mathematische Satz hat in seiner Grammatik zur Wahrheit hin ein Übergewicht. Ich kann, um den Satz von $25 \times 25 = 625$ zu verstehen, fragen: wie wird dieser Satz bewiesen. Aber ich kann nicht fragen: wie wird – oder würde – sein Gegenteil bewiesen; denn es hat keinen Sinn, vom Beweis des Gegenteils von $25 \times 25 = 625$ zu reden. Will ich also eine Frage stellen, die von der Wahrheit des Satzes unabhängig ist, so muß ich von der *Kontrolle* seiner Wahrheit, nicht von ihrem Beweis, oder Gegenbeweis, reden. Die Methode der Kontrolle entspricht dem, was man den Sinn des mathematischen Satzes nennen kann. Die Beschreibung dieser Methode ist allgemein und bezieht sich auf ein System von Sätzen, etwa den Sätzen der Form $a \times b = c$.

Man kann nicht sagen: „ich werde ausrechnen, *daß* es so ist“, sondern „*ob* es so ist“. Also, *ob so*, oder anders.

625 Die Methode der Kontrolle der Wahrheit entspricht dem Sinn des mathematischen Satzes. Kann von so einer Kontrolle nicht die Rede sein, dann bricht die Analogie der „mathematischen Sätze“ mit dem, was wir sonst Satz nennen, zusammen. So gibt es eine Kontrolle für die Sätze der Form „ $(\exists k)_m^n \dots$ “ und „ $\sim(\exists k)_m^n \dots$ “, die sich auf Intervalle beziehen.

Denken wir¹ nun an die Frage: „hat die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ eine reelle Lösung“. Hier gibt es wieder eine Kontrolle und die Kontrolle scheidet zwischen den Fällen $(\exists \dots)$ etc. und $\sim(\exists \dots)$ etc. Kann ich aber in demselben Sinne auch fragen und kontrollieren, „ob die Gleichung eine Lösung hat“? es sei denn, daß ich diesen Fall wieder mit andern in ein System bringe.

(In Wirklichkeit konstruiert der „Beweis des Hauptsatzes der Algebra“ eine neue Art von Zahlen.)

Gleichungen sind eine Art von Zahlen. (D.h. sie können den Zahlen ähnlich behandelt werden.)

Der „Satz der Mathematik“, welcher durch eine Induktion bewiesen ist, – so² aber, daß man nach dieser Induktion nicht in einem System von Kontrollen fragen³ kann, – ist nicht „Satz“ in dem Sinne, in welchem es⁴ die Antwort auf eine mathematische Frage ist.

„Jede Gleichung G hat eine Wurzel.“ Und wie, wenn sie keine hat? können wir diesen Fall beschreiben, wie den, daß sie keine rationale Lösung hat? Was ist das Kriterium dafür, daß eine Gleichung keine Lösung hat? Denn dieses Kriterium muß gegeben werden,⁵ wenn

1 (V): Wir ~~am~~
2 (O): ist –, so
3 (V): suchen

4 (V): ~~er~~
5 (V): sein,

Proof, and the Truth and Falsity of Mathematical Propositions.

A mathematical proposition that has been proved tips the scale towards truth in its grammar. In order to understand the proposition $25 \times 25 = 625$ I can ask: How is this proposition proved? But I can't ask how its contradictory is or would be proved, because it makes no sense to speak of a proof of the contradictory of $25 \times 25 = 625$. So if I want to ask a question that's independent of the truth of the proposition, I have to speak of *checking* its truth, not of proving or disproving it. The method of checking corresponds to what one can call the sense of a mathematical proposition. The description of this method is general, and refers to a system of propositions, for instance of propositions of the form $a \times b = c$.

We can't say "I am going to figure out *that* it is so"; rather, we have to say "*whether* it is so", i.e. whether it is *so* or otherwise.

The method of checking the truth corresponds to the sense of a mathematical proposition. If it's impossible to speak of such a check, then the analogy between "mathematical propositions" and what we otherwise call propositions collapses. Thus there is a check for propositions of the form " $(\exists k)_m^n \dots$ " and " $\sim(\exists k)_m^n \dots$ ", which refer to intervals.

Now let's consider the question "Does the equation $x^2 + ax + b = 0$ have a solution in real numbers?" Here again there is a check, and the check makes a distinction between $(\exists \dots)$, etc. and $\sim(\exists \dots)$, etc. But can I in the same sense also ask and check "whether the equation has a solution"? Not unless I include this case too in a system with others.

(In reality the "proof of the fundamental theorem of algebra" constructs a new kind of number.)

Equations are a kind of number. (That is, they can be treated similarly to the numbers.)

A "proposition of mathematics" that has been proved by induction is not a "proposition" in the same sense as the answer to a mathematical question, unless one can ask¹ for this induction in a system of checks.

"Every equation G has a root." And what if it doesn't have one? Can we describe that case as we can describe the one where the equation doesn't have a rational solution? What is the criterion for an equation not having a solution? For this criterion must be given² if

1 (V): search

2 (V): must have been given

626 die mathematische *Frage* einen Sinn haben soll und wenn der Existenzsatz⁶ Antwort auf eine Frage sein soll.⁷

(Worin besteht die Beschreibung des Gegenteils; worauf stützt sie sich; auf welche Beispiele, und wie sind diese Beispiele mit einem besonderen Fall des bewiesenen Gegenteils verwandt? Diese Fragen sind nicht etwa nebensächlich, sondern absolut wesentlich.)

(Die Philosophie der Mathematik besteht in einer *genauen* Untersuchung der mathematischen Beweise – nicht darin, daß man die Mathematik mit einem Dunst umgibt.)

Wenn in den Diskussionen über die Beweisbarkeit der mathematischen Sätze gesagt wird, es gäbe wesentlich Sätze der Mathematik, deren Wahrheit oder Falschheit unentschieden bleiben müsse, so bedenken⁸ die, die es sagen,⁹ nicht, daß solche Sätze, *wenn* wir sie gebrauchen können und „Sätze“ nennen wollen, ganz andere Gebilde sind, als was sonst „Satz“ genannt wird: denn der Beweis ändert die Grammatik des Satzes. Man kann wohl ein und dasselbe Brett einmal als Windfahne, ein andermal als Wegweiser verwenden; aber das feststehende nicht als Windfahne und das bewegliche nicht als Wegweiser. Wollte jemand sagen „es gibt auch bewegliche Wegweiser“, so würde ich ihm antworten: „Du willst wohl sagen, es gibt auch bewegliche *Bretter*“; und ich sage nicht, daß das bewegliche Brett unmöglich irgendwie verwendet werden kann, – nur nicht als Wegweiser“.

Das Wort „Satz“, wenn es hier überhaupt Bedeutung haben soll, ist äquivalent einem Kalkül und zwar jedenfalls dem,¹⁰ in welchem $p \cdot \vee \cdot \sim p = \text{Taut.}$ ist (das „Gesetz des ausgeschlossenen Dritten“ gilt). Soll es nicht gelten, so haben wir den Begriff des Satzes geändert. Aber wir haben damit keine Entdeckung gemacht (etwas gefunden, das ein Satz ist, und dem und dem Gesetz nicht gehorcht); sondern eine neue Festsetzung getroffen, ein neues Spiel angegeben.

6 (O): Existenzsatz

8 (V): wissen

7 (V): und wenn das, was die Form eines Existenzsatzes hat, „Satz“ im Sinne der

9 (O): bedenken // wissen // ,die es sagen,

10 (O): den,

626 Antwort auf eine Frage sein soll.

the mathematical *question* is to have sense, and if the existence proposition is to be an answer to a question.³

(What does the description of the contradictory consist in? On what is it based? On what examples, and how are these examples related to particular cases of the proved contradictory? Far from being side issues, these questions are absolutely essential.)

(The philosophy of mathematics consists in an exact investigation of mathematical proofs – not in surrounding mathematics with a mist.)

If it's said in discussions about the provability of mathematical propositions that in essence there are propositions of mathematics whose truth or falsehood must remain undecided, those who say that don't consider⁴ that such propositions, *if* we can use them and want to call them "propositions", are completely different structures from what is otherwise called "propositions"; for a proof alters the grammar of a proposition. You *can* use one and the same board now as a weathervane and now as a signpost; but you can't use it as a weathervane when it's fixed nor as a signpost when it's movable. If someone were to say "There are also movable signposts" I would answer him "You want to say, don't you, 'There are also movable *boards*'; and I'm not saying that a movable board can't possibly be used in some way – just not as a signpost".

The word "proposition", if it is to have any meaning here at all, is equivalent to a calculus: to a calculus, in any case, in which $p \cdot \vee \cdot \sim p = \text{Taut.}$ (in which the "law of the excluded middle" is valid). If it is not supposed to be valid, then we have altered the concept of a proposition. But in so doing we haven't made a discovery (have not found something that is a proposition and doesn't obey such and such a law); rather we have made a new stipulation, set up a new game.

3 (V): and if what has the form of an existence proposition is to be a "proposition" in the sense of an answer to a question. 4 (V): know

628 Wenn Du wissen willst, *was* bewiesen wurde, schau den Beweis an.

Die Mathematiker verirren sich nur dann, wenn sie über Kalküle im Allgemeinen reden wollen; und zwar darum, weil sie dann die besondern Bestimmungen vergessen, die jedem besonderen Kalkül zu Grunde liegen.¹

Der Grund, warum alle Philosophen der Mathematik fehlgehen, ist der, daß man in der Logik nicht allgemeine Dicta durch Beispiele begründen kann, wie in der Naturgeschichte. Sondern jeder besondere Fall hat die volle² Bedeutung, aber alles ist mit ihm erschöpft. Und³ man kann keinen allgemeinen Schluß aus ihm ziehen (also *keinen* Schluß).

Eine logische Fiktion gibt es nicht und darum kann man nicht mit logischen Fiktionen arbeiten; und muß jedes Beispiel ganz ausführen.

629 In der Mathematik kann es nur mathematische troubles⁴ geben, nicht philosophische.

Der Philosoph notiert eigentlich nur das, was der Mathematiker so gelegentlich über seine Tätigkeit hinwirft.

Der Philosoph kommt leicht in die Lage eines ungeschickten Direktors, der, statt *seine* Arbeit zu tun und nur darauf zu schauen, daß seine Angestellten ihre Arbeit richtig machen, ihnen ihre Arbeit abnimmt und sich so eines Tages mit fremder Arbeit überladen sieht, während die Angestellten zuschauen und ihn kritisieren.

Besonders ist er geneigt, sich die Arbeit des Mathematikers aufzuhalsen.

Wenn Du wissen willst, was der Ausdruck „Stetigkeit einer Funktion“ bedeutet, schau’ den Beweis der Stetigkeit an; der wird ja zeigen, was er beweist. Aber sieh nicht das Resultat an, wie es in Prosa ausgedrückt⁵ ist und auch nicht, wie es in der Russell’schen Notation lautet, die ja bloß eine Übersetzung des Prosaausdrucks ist; sondern richte Deinen Blick dorthin, wo im Beweis noch gerechnet wird. Denn der Wortausdruck des angeblich bewiesenen Satzes ist meist irreführend, denn er verschleiert das eigentliche Ziel des Beweises, das in diesem mit voller Klarheit zu sehen ist.

630 „Wird die Gleichung von irgend welchen Zahlen befriedigt?“; „sie wird von Zahlen befriedigt“; „sie wird von allen Zahlen (von keiner Zahl) befriedigt“. Hat Dein Kalkül Beweise? und welche? daraus erst wird man den Sinn dieser Sätze und Fragen entnehmen können.

Sage mir *wie* Du suchst und ich werde Dir sagen *was* Du suchst.

1 (V): Kalkül als Grundlage dienen.

2 (V): größtmögliche

3 (V): Bedeutung, und andererseits // wieder // ist mit ihm alles erschöpft, und

4 (V): Schwierigkeiten

5 (V): hingeschrieben

If you Want to Know *What* was Proved, Look at the Proof.

Mathematicians always get lost when they start to talk about calculi in general; they do so because they forget the particular stipulations that are the foundations¹ of each particular calculus.

The reason every philosopher of mathematics goes astray is that in logic, as opposed to natural history, one cannot justify generalizations with examples. Rather, meaning² is fully contained in the particular case, and it is exhaustive. You³ can't draw any general conclusion from it (and that means *any* conclusion).

There is no such thing as a logical fiction, and therefore you can't work with logical fictions; you have to work out each example fully.

In mathematics there can only be mathematical troubles⁴, not philosophical ones.

Really, all the philosopher ever jots down is what the mathematician occasionally dashes off about his activities.

The philosopher easily gets into the position of a clumsy manager, who, instead of doing his *own* work and merely making sure that his employees are doing their work well, relieves them of their work and then one day finds himself overburdened with other people's work, while his employees watch and criticize him.

He is particularly inclined to saddle himself with the work of the mathematician.

If you want to know what the expression "continuity of a function" means, look at the proof of continuity; that will show what it proves. But don't look at the result as it is expressed⁵ in prose, or as it reads in Russellian notation, which is simply a translation of the prose expression; rather, direct your attention to the part of the proof where calculation is still going on. For the verbal expression of the allegedly proved proposition is in most cases misleading, because it veils the real goal of the proof, which can be seen completely clearly in the proof itself.

"Is the equation satisfied by any numbers?"; "It is satisfied by numbers?"; "It is satisfied by all numbers (no number)". Does your calculus have proofs? And what proofs? It is only from them that we will be able to gather the sense of these propositions and questions.

Tell me *how* you are searching and I will tell you *what* you are searching for.

1 (V): that serve as the foundation

2 (V): Rather, the greatest possible meaning

3 (V): case, and on the other hand you // and then again you

4 (V): difficulties

5 (V): as it has been written down

Wir werden uns zuerst fragen müssen: Ist der mathematische Satz bewiesen? und wie? Denn der Beweis gehört zur Grammatik des Satzes! – Daß das so oft nicht eingesehen wird, kommt daher, daß wir hier wieder auf der Bahn einer uns irreführenden Analogie denken. Es ist, wie gewöhnlich in diesen Fällen, eine Analogie aus unserm naturwissenschaftlichen Denken. Wir sagen z.B. „dieser Mann ist vor 2 Stunden gestorben“, und wenn man uns fragt „wie läßt sich das feststellen“, so können wir eine Reihe von Anzeigen (Symptomen)⁶ dafür angeben. Wir lassen aber auch die Möglichkeit dafür offen, daß etwa die Medizin bis jetzt unbekannte Methoden entdeckt, die Zeit des Todes festzustellen und das heißt: Wir können solche mögliche Methoden auch jetzt schon beschreiben, denn nicht ihre Beschreibung wird entdeckt, sondern, es wird nur experimentell festgestellt, ob die Beschreibung den Tatsachen entspricht. So kann ich z.B. sagen: eine Methode besteht darin, die Quantität des Hämoglobins im Blut zu finden, denn diese nehme mit der Zeit nach dem Tode, nach dem und dem Gesetz, ab. Das stimmt natürlich nicht, aber, wenn es stimmte, so würde sich dadurch an der von mir erdichteten Beschreibung nichts ändern. Nennt man nun die medizinische Entdeckung „die Entdeckung eines Beweises dafür, daß der Mann vor 2 Stunden gestorben ist“, so muß man sagen, daß diese Entdeckung an der Grammatik des Satzes „der Mann ist vor 2 Stunden gestorben“ nichts ändert. Die Entdeckung ist die Entdeckung, daß eine bestimmte Hypothese wahr ist (oder: mit den Tatsachen übereinstimmt). Diese Denkweise sind wir nun so gewöhnt, daß wir den Fall der Entdeckung eines

631 Beweises in der Mathematik unbesehen für den gleichen oder einen ähnlichen halten. Mit Unrecht: denn, kurz gesagt, den mathematischen Beweis konnte man nicht beschreiben, ehe er gefunden war.

Der „medizinische Beweis“ hat die Hypothese, die er bewiesen hat, nicht in einen neuen Kalkül eingliedert und ihm also keinen neuen Sinn gegeben; der mathematische Beweis gliedert den mathematischen Satz in einen neuen Kalkül ein, er verändert seine Stellung in der Mathematik. Der Satz mit seinem Beweis gehört einer andern Kategorie an, als der Satz ohne den Beweis. (Der unbewiesene mathematische Satz – Wegweiser der mathematischen Forschung, Anregung zu mathematischen Konstruktionen.)

Sind die Variablen von derselben Art in den Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + xy + z = 0 \quad ?$$

Das kommt auf die Verwendung dieser Gleichungen an. – Aber der Unterschied zwischen N^o 1 und N^o 2⁷ (wie sie gewöhnlich gebraucht werden) ist nicht einer der Extension der Werte, die sie⁸ befriedigen. Wie beweist Du den Satz „Nr. 1 gilt für alle Werte von x und y“ und wie den Satz „es gibt Werte von x, die Nr. 2 befriedigen“? So viel Analogie in diesen Beweisen ist, soviel Analogie ist im Sinn der beiden Sätze.

Aber kann ich nicht von einer Gleichung sagen: „Ich weiß, sie stimmt für einige Substitutionen nicht – ich erinnere mich nicht, für welche – ; ob sie aber allgemein nicht stimmt, das weiß ich nicht“? – Aber was meinst Du damit, wenn Du sagst, Du weißt das? Wie weißt Du es? Hinter den Worten „ich weiß . . .“ ist ja nicht ein bestimmter Geisteszustand, der

632 der Sinn dieser Worte wäre. Was kannst Du mit diesem Wissen anfangen? denn das wird

6 (O): ("Symptomen)

7 (V): zwischen Nr. 1 und Nr. 2

8 (V): ~~sich~~

We shall first have to ask ourselves: Has the mathematical proposition been proved? And how? For the proof is part of the grammar of the proposition! – The fact that this is so often not understood arises from our thinking once again along the lines of a misleading analogy. As usual in these cases, it is an analogy from the way we think in the natural sciences. We say, for example, “This man died two hours ago” and if someone asks us “How can you tell that?” we can give a series of indications (symptoms) for it. But we also leave open the possibility that, say, medicine will discover hitherto unknown methods for ascertaining the time of death. And that means that we can already describe such possible methods; for it isn’t their description that’s discovered. Rather, the only thing anyone ascertains experimentally is whether the description corresponds to the facts. Thus I can say, for example: One method consists in discovering the quantity of haemoglobin in the blood, because this diminishes according to such and such a law in proportion to the time after death. Of course that isn’t correct, but if it were correct, nothing in the description I’ve made up would change because of it. Now if you call the medical discovery “the discovery of a proof that the man died two hours ago” you must also say that this discovery doesn’t change anything in the grammar of the proposition “The man died two hours ago”. The discovery is the discovery that a particular hypothesis is true (or: agrees with the facts). Now we are so accustomed to this way of thinking that we take the case of the discovery of a proof in mathematics, sight unseen, as being the same, or similar. We are wrong to do so because, to put it concisely, the mathematical proof couldn’t be described before it had been discovered.

The “medical proof” didn’t incorporate the hypothesis it proved into a new calculus, and so didn’t give it a new sense; a mathematical proof incorporates the mathematical proposition into a new calculus, and alters its position in mathematics. A proposition with its proof belongs to a different category than a proposition without a proof. (Unproved mathematical propositions – signposts for mathematical research, stimuli for mathematical constructions.)

Are the variables in the following equations all of the same kind?

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + xy + z = 0$$

That depends on the use of these equations. – But the distinction between No. 1 and No. 2⁶ (as they are ordinarily used) is not between the extension of the values that satisfy them. How do you prove the proposition “No. 1 holds for all values of x and y ” and how do you prove the proposition “There are values of x that satisfy No. 2?” There’s as much similarity in these proofs as there is in the senses of the two propositions.

But can’t I say of an equation “I know it doesn’t hold for some substitutions. I’ve forgotten for *which*; but whether it fails to hold in general, I don’t know”? But what do you mean when you say you know that? How do you know it? It’s not as if behind the words “I know . . .” there’s a certain state of mind that’s the sense of those words. What can you do with that knowledge? For that’s what will show what that knowledge consists in. Do

6 (V): Nr. 1 and Nr. 2

zeigen, worin dieses Wissen besteht. Kennst Du eine Methode, um festzustellen, daß die Gleichung allgemein ungültig ist? Erinnerst Du Dich daran, daß die Gleichung für einige Werte von x zwischen 0 und 1000 nicht stimmt? Hat Dir jemand bloß die Gleichung gezeigt und gesagt, er habe Werte für x gefunden, die die Gleichung nicht befriedigen, und weißt Du vielleicht selbst nicht, wie man dies für einen gegebenen Wert konstatiert? etc. etc.

„Ich habe ausgerechnet, daß es keine Zahl gibt, welche . . .“. – In welchem Rechnungssystem kommt diese Rechnung vor? – Dies wird uns zeigen, in welchem Satzsystem der errechnete Satz ist. (Man fragt auch: „wie rechnet man *so etwas* aus?“)

„Ich habe gefunden, daß es eine solche⁹ Zahl gibt“.

„Ich habe ausgerechnet, daß es keine solche Zahl gibt“.

Im ersten Satz darf ich nicht „keine“ statt „eine“ einsetzen. – Und wie, wenn ich im zweiten statt „keine“ „eine“ setze? Nehmen wir an, eine¹⁰ Rechnung ergibt nicht den Satz „ $\sim(\exists n)$ etc.“, sondern „ $(\exists n)$ etc.“. Hat es dann etwa Sinn zu sagen: „nur Mut! jetzt mußst Du *einmal* auf eine solche Zahl kommen, wenn Du nur lang genug probierst“? Das hat nur Sinn, wenn der Beweis nicht „ $(\exists n)$ etc.“ ergeben, sondern dem Probieren Grenzen gesteckt hat, also etwas ganz anderes geleistet hat. D.h., das, was wir den Existenzsatz nennen, der uns eine Zahl suchen lehrt, hat zum Gegenteil nicht den Satz „ (n) etc.“, sondern einen Satz, der sagt, daß in dem und dem Intervall keine Zahl ist, die Was ist das Gegenteil des Bewiesenen? – Dazu muß man auf den Beweis schauen. Man kann sagen: das Gegenteil des bewiesenen Satzes ist das, was statt seiner durch einen bestimmten Rechnungsfehler im Beweis bewiesen worden wäre. Wenn nun z.B. der Beweis, daß $\sim(\exists n)$ etc. der Fall ist, eine Induktion ist die zeigt, daß, soweit ich auch gehe, eine solche Zahl nicht vorkommen kann, so ist das Gegenteil dieses Beweises (ich will einmal diesen Ausdruck gebrauchen) nicht der Existenzbeweis in unserem Sinne. – Es ist hier nicht, wie im Fall des Beweises, daß keine oder eine der Zahlen a, b, c, d die Eigenschaft E hat; und diesen Fall hat man immer als Vorbild vor Augen. Hier könnte ein Irrtum darin bestehen, daß ich glaube c hätte die Eigenschaft und, nachdem ich den Irrtum eingesehen hätte, wüßte ich, daß *keine* der Zahlen die Eigenschaft hat. Die Analogie bricht eben hier zusammen.

633

(Das hängt damit zusammen, daß ich nicht in jedem Kalkül, in dem ich Gleichungen gebrauchen, eo ipso auch die Verneinungen von Gleichungen gebrauchen darf. Denn $2 \times 3 \neq 7$ heißt nicht, daß die Gleichung „ $2 \times 3 = 7$ “ nicht vorkommen soll, wie etwa die Gleichung „ $2 \times 3 = \text{sinus}$ “, sondern die Verneinung ist eine Ausschließung innerhalb eines von vornherein bestimmten Systems. Eine Definition kann ich nicht verneinen, wie eine nach Regeln abgeleitete Gleichung.)

Sagt man, das Intervall im Existenzbeweis sei nicht wesentlich, da ein andres Intervall es auch getan hätte, so heißt das natürlich nicht, daß das Fehlen einer Intervallangabe es auch getan hätte. – Der Beweis der Nichtexistenz hat zum Beweis der Existenz nicht das Verhältnis eines Beweises von p zum Beweis des Gegenteils.

Man sollte glauben, in den¹¹ Beweis des Gegenteils von „ $(\exists n)$ etc.“ müßte sich eine Negation einschleichen¹² können, durch die irrümlicherweise „ $\sim(\exists n)$ etc.“ bewiesen wird.

634

Gehen wir doch einmal, umgekehrt, von den Beweisen aus und nehmen wir an, sie wären uns ursprünglich gezeigt worden und man hätte uns dann gefragt: was beweisen diese Rechnungen? Sieh auf die Beweise und entscheide *dann*, was sie beweisen.

9 (V): es so eine

10 (V): die

11 (O): dem

12 (V): verirren

you know a method for ascertaining that the equation doesn't hold in general? Do you remember that the equation doesn't hold for some values of x between 0 and 1,000? Did someone merely show you the equation and say he had found values of x that didn't satisfy the equation, and do you yourself perhaps not know how to establish this for a given value? Etc., etc.

"I have figured out that there is no number that. . ." In what system of calculation does that calculation occur? That will show us which propositional system the proposition that has been figured out belongs to. (One also asks: "How does one calculate *something like that?*")

"I have discovered that there is such a number."

"I have figured out that there is no such number."

In the first sentence I'm not allowed to substitute "no such" for "such a". – And what if in the second I put "such a" for "no such"? Let's suppose the result of a⁷ calculation isn't the proposition " $\sim(\exists n)$ etc.", but " $(\exists n)$ etc." Does it then maybe make sense to say "Courage! You have to get to such a number *at some point*, if only you try long enough"? *That* only makes sense if the proof hasn't yielded " $(\exists n)$ etc.", but has set limits to trying, i.e. has accomplished something altogether different. That is, the contradictory of what we call an existence theorem, a theorem that teaches us to look for a number, is not the proposition " (n) etc.", but a proposition that says that in such and such an interval there is no number that. . . . What is the contradictory of what has been proved? – For that you must look at the proof. We can say that the contradictory of a proved proposition is what would have been proved instead of it if a certain miscalculation had been made in the proof. Now if, for instance, the proof that $\sim(\exists n)$ etc. is the case is an induction that shows that however far I go such a number cannot occur, then the contradictory of this proof (I'm going to go ahead and use this expression) is not an existence proof in our sense. – Here it isn't the case, as it is in that of the proof, that none or one of the numbers a, b, c, d has the property ϵ ; and this is the case one always has in mind as a paradigm. Here it would be a mistake for me to believe that c had the property, and after I had recognized my mistake I would know that *none* of the numbers had the property. At this point the analogy just collapses.

(This is connected with the fact that not in every calculus in which I am allowed to use equations am I *eo ipso* also allowed to use the negations of equations as well. For $2 \times 3 \neq 7$ doesn't mean that the equation " $2 \times 3 = 7$ " is not supposed to occur, like, say, the equation $2 \times 3 = \text{sine}$; rather the negation is an exclusion within a predetermined system. I can't negate a definition as I can an equation derived according to rules.)

If you say that the interval in an existence proof isn't essential because another interval might also have served the purpose, then of course that doesn't mean that not specifying an interval would also have served the purpose. – The relation of a proof of non-existence to a proof of existence is not the same as that of a proof of p to a proof of its contradictory.

One should suppose that in a proof of the contradictory of " $(\exists n)$ etc." it ought to be possible for a negation to creep in,⁸ because of which " $\sim(\exists n)$ etc." is proved erroneously.

Let's for once start at the other end with the proofs, and suppose that they had been shown to us at the outset, and that then we had been asked: What do these calculations prove? Look at the proofs and *then* decide what they prove.

7 (V): the

8 (V): to stray into it,

Ich brauche nicht zu *behaupten*, man müsse die n Wurzeln der Gleichung n -ten Grades konstruieren können, sondern ich sage nur, daß der Satz „diese Gleichung hat n Wurzeln“ etwas *anderes* heißt, wenn ich ihn durch Abzählen der konstruierten Wurzeln, und wenn ich ihn anderswie bewiesen habe. Finde ich aber eine Formel für die Wurzeln einer Gleichung, so habe ich einen neuen Kalkül konstruiert und keine Lücke eines alten ausgefüllt.

Es ist daher Unsinn zu sagen, der Satz ist erst bewiesen, wenn man eine solche Konstruktion aufzeigt. Denn dann haben wir eben etwas Neues konstruiert, und was wir jetzt unter dem Hauptsatz der Algebra verstehen, ist eben, was der gegenwärtige „Beweis“ uns zeigt.

„Jeder Existenzbeweis muß eine Konstruktion dessen enthalten, dessen Existenz er beweist.“ Man kann nur sagen „ich nenne ‚Existenzbeweis‘ nur einen, der eine solche Konstruktion enthält“. Der Fehler liegt darin,¹³ daß man vorgibt¹⁴ einen klaren *Begriff* der Existenz¹⁵ zu besitzen.

Man glaubt ein Etwas, die Existenz, beweisen zu können, sodaß man nun *unabhängig vom Beweis* von ihr überzeugt ist. (Die Idee der, voneinander – und daher wohl auch vom Bewiesenen – unabhängigen Beweise!) In Wirklichkeit ist Existenz das, was man mit *dem* beweist, was man „Existenzbeweis“ nennt. Wenn die Intuitionisten und Andere darüber reden, so sagen sie: „Diesen¹⁶ Sachverhalt, die Existenz, kann man nur so, und nicht so, beweisen“. Und sehen nicht, daß sie damit einfach das definiert haben, was *sie* Existenz nennen. Denn die Sache verhält sich eben nicht so, wie wenn man sagt: „daß ein Mann in dem Zimmer ist, kann man nur dadurch beweisen, daß man hineinschaut, aber nicht, indem man an der Tür horcht“.

Wir haben keinen Begriff der Existenz unabhängig von unserm Begriff des Existenzbeweises.

Warum ich sage, daß wir einen Satz, wie den Hauptsatz der Algebra, nicht finden, sondern konstruieren? – Weil wir ihm beim Beweis einen neuen Sinn geben, den er früher gar nicht gehabt hat. Für diesen Sinn gab es vor dem sogenannten Beweis nur eine beiläufige Vorlage in der Wortsprache.

Denken wir, Einer würde sagen: das Schachspiel mußte nur *entdeckt* werden, es war immer da! Oder das *reine* Schachspiel war immer da, nur das materielle, von Materie verunreinigte, haben wir gemacht.

Wenn durch Entdeckungen ein Kalkül der Mathematik geändert wird, – können wir den alten Kalkül nicht behalten (aufheben)? (D.h., müssen wir ihn wegwerfen?) Das ist ein sehr interessanter Aspekt. Wir haben nach der Entdeckung des Nordpols nicht zwei Erden: eine mit, und eine ohne den Nordpol. Aber nach der Entdeckung des Gesetzes der Verteilung der Primzahlen, zwei Arten von Primzahlen.

Die mathematische Frage muß so exakt sein, wie der mathematische Satz. Wie irreführend die Ausdrucksweise der Wortsprache den Sinn der mathematischen Sätze darstellt, sieht man, wenn man sich die Multiplizität eines mathematischen Beweises vor Augen führt¹⁷ und bedenkt, daß der Beweis zum *Sinn* des bewiesenen Satzes gehört, d.h. den Sinn bestimmt. Also nicht etwas ist, was bewirkt, daß wir einen bestimmten Satz glauben,

13 (V): Fehler ist,

14 (V): glaubt

15 (V): *Begriff* des Existenzbeweises

16 (O): "Dieser

17 (V): stellt

I don't need to *assert* that it must be possible to construct the n roots of equations of the n th degree; rather, I'm only saying that the proposition "This equation has n roots" means something *different* if I proved it by enumerating the constructed roots than if I proved it some other way. But if I find a formula for the roots of an equation then I have constructed a new calculus, and have not filled in a gap in an old one.

Therefore it's nonsense to say that the proposition hasn't been proved until we produce such a construction. For in that case we simply have constructed something new, and what we now understand by the fundamental theorem of algebra is simply what the present "proof" shows us.

"Every existence proof must contain a construction of what it proves the existence of." All you can say is: "I won't call anything an 'existence proof' that doesn't contain such a construction". The mistake lies in pretending to possess⁹ a clear *concept* of existence.¹⁰

We think we can prove something, existence, in such a way that we are then convinced of it *independently of the proof*. (The idea of proofs independent of each other – and so presumably also independent of what has been proved!) In reality, existence is what is proved by *what* we call "existence proofs". When the intuitionists and others talk about this they say: "This state of affairs, existence, can be proved only thus and not so." And they don't see that in saying that they have simply defined what *they* call existence. For it isn't *at all* like saying "That someone is in the room can only be proved by looking inside, not by listening at the door".

We have no concept of existence independent of our concept of an existence proof.

Why do I say that we don't "discover" a proposition like the fundamental theorem of algebra, but instead "construct" it? – Because in proving it we give it a new sense that it didn't have before. Before the so-called proof there was only a rough model of that sense in word-language.

Suppose someone were to say: Chess only had to be *discovered*, it was always there! Or: the *pure* game of chess was always there; what we've made is only the material game, tainted by matter.

If a calculus in mathematics is altered by discoveries, can't we keep (hold on to) the old calculus? (That is, do we have to throw it away?) That is a very interesting way of looking at the matter. After the discovery of the North Pole we didn't have two earths, one with and one without the North Pole. But after the discovery of the law of the distribution of the primes, we do have two kinds of primes.

A mathematical question must be as exact as a mathematical proposition. You can see how misleadingly our way of speaking in word-language represents the sense of mathematical propositions if you call to mind the multiplicity of a mathematical proof, and consider that the proof belongs to the *sense* of the proved proposition, i.e. determines that sense. So it isn't something that causes us to believe a particular proposition, but something that shows us *what* we believe – if we can talk of believing here at all. Concept words in mathematics: prime

9 (V): mistake is in believing that one possesses

10 (V): of an existence proof.

sondern etwas, was uns zeigt, *was* wir glauben, – wenn hier von Glauben¹⁸ eine Rede sein kann. Begriffswörter in der Mathematik: Primzahl, Kardinalzahl, etc. Es scheint darum unmittelbar Sinn zu haben, wenn gefragt wird: „Wieviel Primzahlen gibt es?“ („Es glaubt der Mensch, wenn er nur Worte hört, . . .“.)¹⁹ In Wirklichkeit ist diese Wortzusammenstellung einstweilen Unsinn; bis für sie eine besondere Syntax gegeben wurde. Sieh’ den Beweis dafür an, „daß es unendlich viele Primzahlen gibt“ und dann die Frage, die er zu beantworten scheint. Das Resultat eines intrikaten Beweises kann nur insofern einen einfachen Wortausdruck haben, als das System von Ausdrücken, dem dieser Ausdruck angehört, in seiner Multiplizität einem System solcher Beweise entspricht. – Die Konfusionen in diesen Dingen sind ganz darauf zurückzuführen, daß man die Mathematik als eine Art Naturwissenschaft behandelt. Und das wieder hängt damit zusammen, daß sich die Mathematik von der Naturwissenschaft abgelöst hat. Denn, solange sie in unmittelbarer Verbindung mit der Physik betrieben wird, ist es klar, daß *sie* keine Naturwissenschaft ist. (Etwa, wie man einen Besen nicht für ein Einrichtungsstück des Zimmers halten kann, solange man ihn dazu benützt, die Einrichtungsgegenstände zu säubern.)

Ist nicht die Hauptgefahr die, daß uns der Prosa-Ausdruck des Ergebnisses einer mathematischen Operation einen Kalkül vortäuscht, der gar nicht vorhanden ist. Indem er seiner äußern Form nach einem System anzugehören scheint, das es hier gar nicht gibt.

637 Ein Beweis ist Beweis eines (bestimmten) Satzes, wenn er es nach einer Regel ist, nach der dieser Satz diesem Beweis zugeordnet ist. D.h., der Satz muß einem System von Sätzen angehören und der Beweis einem System von Beweisen. Und jeder Satz der Mathematik muß einem Kalkül der Mathematik angehören. (Und kann nicht in Einsamkeit thronen²⁰ und sich sozusagen nicht unter andere Sätze mischen.)

Also ist auch der Satz „jede Gleichung n-ten Grades hat n Lösungen“ nur ein Satz der Mathematik, sofern er einem System von Sätzen, und sein Beweis einem korrespondierenden System von Beweisen, entspricht. Denn welchen guten Grund habe ich, dieser Kette von Gleichungen etc. (dem sogenannten Beweis) *diesen* Prosasatz zuzuordnen. Es muß doch aus dem Beweis – nach einer Regel – hervorgehen, von welchem Satz er der Beweis ist.

Nun liegt es aber im Wesen dessen, *was wir als Satz bezeichnen*, daß es sich verneinen lassen muß. Und auch die Verneinung des bewiesenen Satzes muß mit dem Beweis zusammenhängen; so nämlich, daß sich zeigen läßt, unter welchen andern, entgegengesetzten, Bedingungen sie herausgekommen wäre.

18 (O): glauben

19 (E): Vgl. Goethe, *Faust* I, 2565–2566.

20 (O): tronen

number, cardinal number, etc. That is why it seems to make sense to ask without hesitation, “How many prime numbers are there?” (“Men always believe, if only they hear words / . . .”)¹¹ In reality this combination of words is nonsense for the time being; until it’s given a special syntax. Look at the proof for the claim “that there are infinitely many primes”, and then at the question that it appears to answer. The result of an intricate proof can have a simple verbal expression only in so far as the system of expressions to which this expression belongs has a multiplicity corresponding to a system of such proofs. – The confusions in these matters are entirely attributable to treating mathematics as a kind of natural science. And this is connected in turn with the fact that mathematics has detached itself from natural science; for as long as it is done in immediate connection with physics, it is clear that *it* isn’t a natural science. (Somewhat in the same way that you can’t take a broom for part of the furnishings of a room so long as you use it to clean the furniture.)

Isn’t this the main danger – that expressing the result of a mathematical operation in prose will give us the illusion of a calculus that doesn’t even exist, by outwardly appearing to belong to a system that isn’t even there?

A proof is a proof of a (particular) proposition if it performs its proof following a rule that correlates the proposition with the proof. That is, the proposition must belong to a system of propositions, and the proof to a system of proofs. And every proposition in mathematics must belong to a calculus of mathematics. (It cannot sit in splendid isolation and refuse to mingle with the other propositions, so to speak.)

So the proposition “Every equation of n th degree has n roots” is a proposition of mathematics only in so far as it corresponds to a system of propositions and its proof corresponds to an appropriate system of proofs. For what good reason do I have to correlate *this* prose sentence to that chain of equations, etc. (to the so-called proof)? Surely it must emerge from the proof – according to a rule – which proposition it is a proof of.

Now it is a part of the nature of *what we call propositions* that we must be able to negate them. And the negation of a proved proposition must also be connected with the proof; in such a way, that is, that we can show under what different, contrasting, conditions the negation would have been the result.

11 (E): Cf. Goethe, *Faust* I, 2565–6.

Das mathematische Problem. Arten der Probleme. Suchen. „Aufgaben“ in der Mathematik.

Wo man fragen kann, kann man auch suchen, und wo man nicht suchen kann, kann man auch nicht fragen. Und auch nicht antworten.

Wo es keine Methode des Suchens gibt, da kann auch die Frage keinen Sinn haben. – Nur wo eine Methode der Lösung ist, ist eine Frage (d.h. natürlich nicht: „nur wo die Lösung gefunden ist, ist eine Frage“). – D.h.: dort wo die Lösung des Problems nur von einer Art Offenbarung erwartet werden kann, ist auch keine Frage. Einer Offenbarung entspricht keine Frage. –

Die Annahme der Unentscheidbarkeit setzt voraus, daß zwischen den beiden Seiten einer Gleichung, sozusagen, eine unterirdische Verbindung besteht; daß die Brücke nicht in Symbolen geschlagen werden kann. Aber dennoch besteht; denn sonst wäre die Gleichung sinnlos. – Aber die Verbindung besteht nur, wenn *wir* sie durch einen Kalkül¹ gemacht haben. Der Übergang ist nicht durch eine dunkle Spekulation hergestellt, von anderer Art als das was er verbindet. (Wie ein dunkler Gang zwischen zwei lichten Orten.)

Ich kann den Ausdruck „die Gleichung G ergibt die Lösung L“ nicht eindeutig anwenden, solange ich keine Methode der Lösung besitze; weil „ergibt“ eine Struktur bedeutet, die ich, ohne sie zu kennen, nicht bezeichnen kann. Denn das heißt das Wort „ergibt“ zu verwenden, ohne seine Grammatik zu kennen. Ich könnte aber auch sagen: Das Wort „ergibt“ hat andere Bedeutung, wenn ich es so verwende, daß es sich auf eine Methode der Lösung bezieht, und eine andere, wenn dies nicht der Fall ist. Es verhält sich hier mit „ergibt“ ähnlich, wie mit dem Wort „gewinnen“ (oder „verlieren“), wenn das Kriterium des „Gewinnens“ einmal ein bestimmter Verlauf der Partie ist (hier muß ich die Spielregeln kennen, um sagen zu können, ob Einer gewonnen hat), oder ob ich mit „gewinnen“ etwas meine, was sich beiläufig² durch „zahlen müssen“ ausdrücken ließe.

Wenn wir „ergibt“ im ersten Sinne³ anwenden, so heißt „die Gleichung ergibt L“: wenn ich die Gleichung nach gewissen Regeln transformiere, so erhalte ich L. So wie die Gleichung $25 \times 25 = 620$ besagt, daß ich 620 erhalte, wenn ich auf 25×25 die Multiplikationsregeln anwende. Aber diese Regeln müssen mir hier⁴ schon gegeben sein, ehe das Wort „ergibt“ Bedeutung hat, und ehe die Frage einen Sinn hat, ob die Gleichung L ergibt.

1 (V): durch Symbole
2 (V): etwa

3 (V): „ergibt“ in der ersten Bedeutung
4 (V): nun

Mathematical Problems. Kinds of Problems. Searching. “Tasks” in Mathematics.

Where you can ask you can also search, and where you cannot search you cannot ask either. Nor can you answer.

Where there is no method of searching, a question cannot have any sense. – Only where there is a method for a solution is there a question (of course that doesn’t mean: “only where the solution has been found is there a question”). – That is: where we can only expect the solution of the problem from some sort of revelation, there is no question. To a revelation no question corresponds. –

The supposition of undecidability presupposes that there is, so to speak, an underground connection between the two sides of an equation; that the bridge cannot be built in symbols, but does exist; because otherwise the equation would be senseless. – But the connection only exists if *we* have made it via a calculus;¹ the transition isn’t produced by some dark speculation that is different in kind from what it connects (like a dark passage between two sunlit places).

I can’t use the expression “the equation G yields the solution L” unambiguously so long as I don’t have a method for solving the equation; because “yields” denotes a structure that I can’t designate unless I am acquainted with it. If I could, that would mean using the word “yields” without knowing its grammar. But I could also say: The word “yields” has one meaning when I use it in such a way that it refers to a method for solving the equation, and it has another meaning otherwise. Here the word “yields” is similar to the word “win” (or “lose”), when at one time the criterion for “winning” is a particular sequence of events in the game (in which case I must know the rules of the game in order to be able to say whether someone has won) and at another time by “winning” I mean something that I could express roughly² by “having to pay”.

If we use “yields” in the first sense,³ then “the equation yields L” means: if I transform the equation in accordance with certain rules, I get L. Just as the equation $25 \times 25 = 620$ says that I get 620 if I apply the rules of multiplication to 25×25 . But in this case⁴ these rules must already have been given to me before the word “yields” has a meaning, and before the question whether the equation yields L has a sense.

1 (V): via symbols;

2 (V): could perhaps express

3 (V): “yields” with the first meaning,

4 (V): But now

Es genügt also nicht zu sagen „p ist beweisbar“, sondern es muß heißen: beweisbar nach einem bestimmten System.

640 Und zwar behauptet der Satz nicht, p sei beweisbar nach dem System S, sondern nach *seinem* System, dem System von p. Daß p dem System S angehört, das läßt sich nicht behaupten (das muß sich zeigen). – Man kann nicht sagen, p gehört zum System S; man kann nicht fragen, zu welchem System p gehört; man kann nicht das System von p suchen. „p verstehen“ heißt, sein System kennen. Tritt p scheinbar von einem System in das andere über, so hat in Wirklichkeit p seinen Sinn gewechselt.

Es ist unmöglich, Entdeckungen neuartiger Regeln zu machen, die von einer uns bekannten Form (etwa dem sinus eines Winkels) gelten. Sind es neue Regeln, so ist es nicht die alte Form.

Kenne ich die Regeln der elementaren Trigonometrie, so kann ich den Satz $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ kontrollieren, aber nicht den Satz $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$. Das heißt aber, daß der sinus der elementaren Trigonometrie und der sinus der höheren Trigonometrie verschiedene Begriffe sind.

Die beiden Sätze stehen gleichsam auf zwei verschiedenen Ebenen. In der ersten kann ich mich bewegen, soweit ich will, ich werde nie zu dem Satz auf der höheren Ebene kommen.

Der Schüler, dem das Rüstzeug der elementaren Trigonometrie zur Verfügung stünde und von dem die Überprüfung der Gleichung $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} \dots$ verlangt würde, fände das, was er zur Bewältigung dieser Aufgabe braucht, eben nicht vor. Er kann die Frage nicht nur nicht beantworten, sondern er kann sie auch nicht verstehen. (Sie wäre wie die Aufgabe, die der Fürst im Märchen dem Schmied stellt: ihm einen „Klamank“ zu bringen. Busch, Volksmärchen.)

641 Man nennt es eine Aufgabe, wenn gefragt wird „wieviel ist 25×16 “, aber auch eine Aufgabe: was ist das $\int \sin^2 x dx$? Die erste hält man zwar für viel leichter als die zweite, sieht aber nicht, daß sie in verschiedenem Sinn „Aufgaben“ sind. Der Unterschied ist *natürlich* kein psychologischer; denn⁵ es handelt sich nicht drum, ob der Schüler die Aufgabe lösen kann, sondern ob der Kalkül sie lösen kann, oder, welcher Kalkül sie lösen kann.

Die Unterschiede, auf die ich aufmerksam machen kann, sind solche, wie sie jeder Bub in der Schule wohl kennt. Aber man verachtet diese Unterschiede später, wie die Russische Rechenmaschine (und den zeichnerischen Beweis in der Geometrie) und sieht sie als unwesentlich an, statt als wesentlich und fundamental.

Es ist uninteressant, ob der Schüler⁶ *eine Regel weiß*, nach der er⁷ $\int \sin^2 x dx$ gewiß lösen kann, aber nicht, ob der *Kalkül*, den wir vor uns haben (und den er zufälligerweise benützt) eine solche Regel enthält.

Nicht, ob der Schüler es kann, sondern ob der Kalkül es kann und *wie er* es tut, interessiert uns.

Im Falle $25 \times 16 = 370$ nun, schreibt der Kalkül, den wir benützen, jeden Schritt zur Prüfung dieser Gleichung vor.

Ein merkwürdiges Wort: „Es ist mir *gelingen*, das zu beweisen“. (Das ist es, was im Falle $25 \times 16 = 400$ niemand sagen würde.)

5 (V): und

6 (V): ob man

7 (V): man

So it is not enough to say “p is provable”; we must say: provable according to a particular system.

And, to be more specific, the proposition doesn’t assert that p is provable according to the system S, but according to *its own* system, the system of p. That p belongs to the system S cannot be asserted (that has to show itself). – We can’t say, p belongs to the system S; we can’t ask, to which system p belongs; we can’t search for p’s system. “Understanding p” means – knowing its system. If p appears to cross over from one system to another, then really it has changed its sense.

It is impossible to discover novel rules that are valid for a form familiar to us (say for the sine of an angle). If they are new rules, then it is not the old form.

If I know the rules of elementary trigonometry, I can check the proposition $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, but not the proposition $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$. But that means that the sine function of elementary trigonometry and that of higher trigonometry are different concepts.

The two propositions stand on two different planes, as it were. However far I range on the first plane I will never come to the proposition on the higher plane.

A schoolboy who had at his disposal the toolbox of elementary trigonometry and was told to verify the equation $\sin x = x - \frac{x^3}{3!}$ just wouldn’t find in it what he needs to come to grips with this problem. Not only couldn’t he answer the question – he couldn’t understand it, either. (It would be like the task the prince sets the smith in the fairy tale: to bring him a “hubbub”. Busch, *Volksmärchen*.)

We call it a problem when we are asked “How much is 25×16 ?”, but also when we are asked: what is $\int \sin^2 x dx$? We regard the first as much easier than the second, but we don’t see that they are “problems” in different senses. *Of course* the difference isn’t a psychological one; for⁵ it isn’t a matter of whether the pupil can solve the problem, but whether the calculus can solve it, or which calculus can solve it.

The distinctions to which I can draw attention are ones of the kind that are quite familiar to every schoolboy. But later on we disdain those distinctions, as we do the Russian abacus (and geometrical proofs that use drawings); and we regard them as inessential, rather than as essential and fundamental.

Whether a pupil⁶ *knows a rule* for ensuring a solution to the $\int \sin^2 x dx$ is of no interest; what does interest us is whether the *calculus* we have before us (and that he happens to be using) contains such a rule.

What interests us is not whether the pupil can do it, but whether the calculus can do it, and *how* it does it.

In the case of $25 \times 16 = 370$, the calculus we use prescribes every step for checking the equation.

A remarkable expression: “I *succeeded* in proving this”.

(That’s something no one would say in the case of $25 \times 16 = 400$.)

5 (V): and

6 (V): Whether one

Man könnte festlegen:⁸ „Was man anfassen kann, ist ein Problem. – Nur wo ein Problem sein kann, kann etwas behauptet werden.“

- 642 Würde denn aus dem Allen nicht das Paradox folgen: daß es in der Mathematik keine schweren Probleme gibt; weil, was schwer ist, kein Problem ist? Was folgt, ist, daß das „schwere mathematische Problem“, d.h. das Problem der mathematischen Forschung, zur Aufgabe „ $25 \times 25 = ?$ “ nicht in dem Verhältnis steht, wie etwa ein akrobatisches Kunststück zu einem einfachen Purzelbaum (also einfach in dem Verhältnis: sehr leicht zu sehr schwer), sondern daß es „Probleme“ in verschiedenen Bedeutungen des Wortes sind.

„Du sagst ‚wo eine Frage ist, da ist auch ein Weg zu ihrer Beantwortung‘, aber in der Mathematik gibt es doch Fragen, zu deren Beantwortung wir keinen Weg sehen.“ – Ganz richtig, und daraus folgt nur, daß wir in diesem Fall das Wort „Frage“ in anderem Sinn gebrauchen, als im oberen Fall. Und ich hätte vielleicht sagen sollen ‚es sind hier zwei verschiedene Formen und nur für die erste möchte ich das Wort ‚Frage‘ gebrauchen“. Aber dieses Letztere ist nebensächlich. Wichtig ist, daß wir es hier mit zwei verschiedenen Formen zu tun haben. (Und daß Du Dich in der Grammatik des Wortes „Art“ nicht auskennst, wenn Du nun sagen willst, es seien eben nur⁹ zwei verschiedene *Arten* von Fragen.)

„Ich weiß, daß es für diese Aufgabe eine Lösung gibt, obwohl ich die Lösung¹⁰ noch nicht habe“. – In welchem Symbolismus *weiß* ich es?¹¹



¹²„Ich weiß, daß es da ein Gesetz geben muß.“ Ist dieses Wissen ein amorphes, das Aussprechen des Satzes begleitendes Gefühl? Dann interessiert es uns nicht. Und ist es ein symbolischer Prozeß – nun, dann ist die Aufgabe, ihn in einem klaren¹³ Symbolismus darzustellen.¹⁴

- 643 Was heißt es: den Goldbach’schen Satz *glauben*? Worin besteht dieser Glaube? In einem Gefühl der Sicherheit, wenn wir den Satz aussprechen, oder hören? Das interessiert uns nicht. Ich weiß ja auch nicht, wie weit dieses Gefühl durch den Satz selbst hervorgerufen sein mag. Wie greift der Glaube in diesen Satz ein? Sehen wir nach, welche Konsequenzen er hat, wozu er uns bringt. „Er bringt mich zum Suchen nach einem Beweis dieses Satzes.“ – Gut, jetzt sehen wir noch nach, worin Dein Suchen eigentlich besteht; dann werden wir wissen, was es mit dem Glauben an den Satz auf sich hat.¹⁵

Man darf nicht an einem Unterschied der Formen vorbeigehen – wie man wohl an einem Unterschied zwischen Anzügen vorbeigehen kann, wenn er etwa sehr gering ist.

In gewissem Sinne gibt es für uns – nämlich in der Grammatik – nicht „geringe Unterschiede“. Und überhaupt bedeutet ja das Wort Unterschied etwas ganz anderes, als dort wo es sich um einen Unterschied zweier Sachen¹⁶ handelt.

Der Philosoph spürt Wechsel im Stil seiner Ableitung, an denen der Mathematiker von heute, mit seinem stumpfen Gesicht ruhig vorübergeht. – Eine höhere Sensitivität ist es eigentlich, was den Mathematiker der Zukunft von dem heutigen unterscheiden wird; und *die* wird die Mathematik – gleichsam – stützen; weil man dann mehr auf die absolute Klarheit, als auf das¹⁷ Erfinden neuer Spiele bedacht sein wird.

8 (V): erklären:

9 (V): nur ~~ver~~

10 (V): die Art der Lösung

11 (V): Symbolismus weißt Du es?

12 (F): MS 112, S. 70v.

13 (V): offenbaren

14 (V): auszudrücken.

15 (V): wissen, wie es sich mit Deinem Glauben an den Satz verhält.

16 (V): Dinge

17 (V): ein

One could stipulate:⁷ “Whatever one can get a grip on is a problem. – Only where there can be a problem can something be asserted.”

Wouldn’t a paradox follow from all of this: namely, there are no difficult problems in mathematics, since what is difficult isn’t a problem? What follows is, that the “difficult mathematical problems”, i.e. the problems of mathematical research, aren’t related to the problem “ $25 \times 25 = ?$ ” as, say, a feat of acrobatics is to a simple somersault (i.e. the relationship isn’t simply: very easy to very difficult). Rather, they are “problems” in different senses of the word.

“You say ‘Where there is a question, there is also a way to answer it’, but in mathematics there are questions that we don’t see any way to answer.” – Quite right, but all that follows from that is that in this case we are using the word “question” in a different sense than in the case above. And perhaps I should have said “Here there are two different forms, and I am going to restrict the word ‘question’ to the first”. But this latter point is a side issue. What is important is that we are dealing here with two different forms. (And that you do not know your way about in the grammar of the word “kind” if you now want to say that these forms are just two different *kinds* of questions.)

“I know that there is a solution for this problem, although I don’t yet have the solution.”⁸
 – In what symbolism do I *know*⁹ it?



¹⁰“I know there must be a rule here.” Is this knowledge an amorphous feeling accompanying the utterance of the sentence? Then it doesn’t interest us.

And if it is a symbolic process – well, then the task is to represent it in a clear symbolism.¹¹

What does it mean to *believe* Goldbach’s conjecture? What does this belief consist in? In a feeling of certainty when we utter or hear the conjecture? That doesn’t interest us. After all, I don’t know to what extent this feeling may have been caused by the proposition itself. How does my belief engage with this proposition? Let’s look and see what its consequences are, what it gets us to do. “It makes me search for a proof of this proposition.” – Very well; and now we’ll look and see what your searching really consists in. Then we’ll know what belief in the proposition amounts to.¹²

We mustn’t overlook a difference between forms – as we may well overlook a difference between suits, if for example it is very slight.

In a certain sense – in grammar, that is – there are for us no such things as “negligible distinctions”. And in general the word “distinction” means something completely different from when it is a question of a distinction between two objects.¹³

A philosopher notices changes in the style of a derivation which today’s mathematician passes over calmly, with a blank expression on his face. – What will distinguish the mathematicians of the future from those of today will really be a greater sensitivity; and *that* will – as it were – prune mathematics; for then everyone will be more concerned with absolute clarity than with the¹⁴ invention of new games.

7 (V): explain:

8 (V): the type of solution.”

9 (V): do you know

10 (F): MS 112, p. 70v.

11 (V): to express it in an obvious symbolism.

12 (V): know how things stand with your belief in the proposition.

13 (V): things.

14 (V): an

Die philosophische Klarheit wird auf das Wachstum der Mathematik den gleichen Einfluß haben, wie das Sonnenlicht auf das Wachsen der Kartoffeltriebe. (Im dunklen¹⁸ Keller wachsen sie meterlang.)

- 644 Den Mathematiker muß es bei meinen mathematischen Ausführungen grausen, denn seine Schulung hat ihn immer davon abgelenkt, sich Gedanken und Zweifeln, wie ich sie aufrolle, hinzugeben. Er hat sie als etwas Verächtliches ansehen lernen und hat, um eine Analogie aus der Psychoanalyse (dieser Absatz erinnert an Freud) zu gebrauchen, einen Ekel vor diesen Dingen erhalten, wie vor etwas Infantilem. D.h., ich rolle alle jene Probleme auf, die etwa ein Kind¹⁹ beim Lernen der Arithmetik, etc. als Schwierigkeiten empfindet und die der Unterricht unterdrückt, ohne sie zu lösen. Ich sage also zu diesen unterdrückten Zweifeln: ihr habt ganz recht, fragt nur, und verlangt nach Aufklärung!

18 (V): dunkeln

19 (V): Knabe

Philosophical clarity will have the same effect on the growth of mathematics as sunlight has on the growth of potato shoots. (In a dark cellar they grow several metres long.)

A mathematician is bound to be horrified when faced with my mathematical remarks, since his schooling has always diverted him from giving himself over to thoughts and doubts of the kind that I am bringing up. He has learned to regard them as something contemptible and, to use an analogy from psychoanalysis (this paragraph is reminiscent of Freud), he has acquired a revulsion against these things as against something infantile. That is to say, I'm bringing up all of those problems that a child¹⁵ learning arithmetic, etc., finds difficult, the problems that classroom instruction suppresses without solving. So I'm saying to those suppressed doubts: You are quite right, go ahead and ask – and demand clarification!

15 (V): boy

Eulerscher Beweis.

645

Kann man aus der Ungleichung: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \neq (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots) \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots)$ eine Zahl v konstruieren,¹ die jedenfalls in den Kombinationen der rechten Seite noch fehlt? Der Euler'sche Beweis dafür, daß es „unendlich viele Primzahlen gibt“ soll ja ein Existenzbeweis sein, und wie ist der ohne Konstruktion möglich?

646 $\sim 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots) \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots)$ das Argument läuft so: Das rechte Produkt ist eine Reihe von Brüchen $\frac{1}{n}$, in deren Nenner alle Kombinationen $2^v 3^u$ vorkommen; wären das alle Zahlen, so müßte diese Reihe die gleiche sein, wie die $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ und dann müßten auch die Summen gleich sein. Die linke ist aber ∞ und die rechte nur eine endliche Zahl $\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} = 3$, also fehlen in der rechten Reihe unendlich viele Brüche, d.h. *es gibt* in der linken² Reihe Brüche, die in der rechten³ nicht vorkommen. Und nun handelt es sich darum: ist dieses Argument richtig? Wenn es sich hier um endliche Reihen handelte, so wäre alles durchsichtig.⁴ Denn dann könnte man aus der Methode der Summation eben herausfinden, welche Glieder der linken Reihe auf die rechte Reihe fehlen. Man könnte nun fragen: wie kommt es, daß die linke⁵ Reihe ∞ gibt, was muß sie außer den Gliedern der rechten⁶ enthalten, daß es so wird? Ja es fragt sich: hat eine Gleichung, wie die obere $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = 3$ überhaupt einen Sinn? Ich kann ja aus ihr nicht herausfinden, *welche* Glieder links zuviel sind. Wie wissen wir, daß alle Glieder der rechten auch in der linken Seite vorkommen? Im Fall endlicher Reihen kann ich es erst sagen, wenn ich mich Glied für Glied davon überzeugt habe; – und dann sehe ich zugleich, welche übrigbleiben. – Es fehlt uns hier die Verbindung zwischen dem Resultat der Summe und den Gliedern, die einzige, die den Beweis erbringen könnte. – Am klarsten wird alles, wenn man sich die Sache mit einer endlichen Gleichung ausgeführt denkt: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \neq (1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{3}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Wir haben hier wieder das Merkwürdige, was man etwa einen Indizienbeweis in der Mathematik nennen könnte – der ewig unerlaubt ist. Oder, einen Beweis durch *Symptome*. Das Ergebnis der Summation ist ein Symptom dessen (oder wird als eines aufgefaßt), daß links Glieder sind, die rechts fehlen.⁷ Die Verbindung des Symptoms, mit dem, was man bewiesen haben möchte,⁸ ist *lose*. D.h. es ist eine Brücke nicht geschlagen, aber man gibt sich damit zufrieden, daß man das andere Ufer *sieht*.

Alle Glieder der rechten Seite kommen in der linken Seite vor, aber die Summe links gibt ∞ und die rechte nur einen endlichen Wert – *also müssen*. . . . aber in der Mathematik *muß* garnichts, außer was *ist*.

Die Brücke muß geschlagen werden.

1 (V): ableiten,
2 (O): rechten
3 (O): linken
4 (V): klar.

5 (O): rechte
6 (O): linken
7 (O): daß rechts Glieder sind, die links fehlen.
8 (V): man beweisen möchte,

Euler's Proof.

From the inequality $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \neq (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots) \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots)$ can we construct¹ a number \underline{y} which is still missing – at least from the combinations on the right side? After all, Euler's proof that “there are infinitely many prime numbers” is supposed to be an existence proof, and how is such a proof possible without a construction?

$\sim 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots) \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots)$ The argument goes like this: The product on the right is a series of fractions $\frac{1}{n}$ in whose denominators all combinations of the form $2^y 3^u$ occur; if there were no numbers besides these, then this series would have to be the same as the series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$, and in that case the sums also would have to be the same. But the sum on the left side is ∞ and the one on the right side is only a finite number $\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} = 3$, so there are infinitely many fractions missing in the series on the right; that is, *there are* fractions in the series on the left that do not occur on the right.² And now the question is: Is this argument correct? If it were a question of a finite series here, everything would be transparent.³ For then the method of summation would enable us to find out which terms occurring in the series on the left were missing from the right. Now we could ask: How does it come about that the series on the left⁴ gives us ∞ ? What must it contain in addition to the terms on the right⁵ to make it infinite? Indeed the question arises: Does an equation like $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = 3$ above have any sense at all? After all, I can't find out from it *which* terms on the left are in excess. How do we know that all the terms on the right side also occur on the left? In the case of a finite series I can't say that until I have ascertained it term by term; – and then I see at the same time which are the extra ones. – Here we are lacking the connection between the result of the sum and the terms, the only connection that could furnish a proof. Everything becomes clearest if we imagine the matter carried out with a finite equation: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \neq (1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{3}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Here once again we have that remarkable phenomenon that we might call circumstantial proof in mathematics – something that is absolutely never permitted. Or perhaps we could call it a proof by *symptoms*. The result of the summation is (or is understood as) a symptom that there are terms on the left that are missing on the right.⁶ The connection of the symptom to what we would like to have proved⁷ is *loose*. That is, no bridge has been built, so we settle for *seeing* the other bank.

All the terms on the right side occur on the left, but the sum on the left side yields ∞ and the one on the right only a finite value – *so . . . must*; but in mathematics the only thing that *must be* is what *is*.

The bridge has to be built.

1 (V): derive

2 (O): on the right that do not occur on the left.

3 (V): *clear*.

4 (O): right

5 (O): left

6 (O): terms on the right that are missing on the left.

7 (V): like to prove

In der Mathematik gibt es kein Symptom, das kann es nur im psychologischen Sinne für den Mathematiker geben.

Man könnte auch so sagen: Es kann sich in der Mathematik nicht auf etwas schließen lassen, was sich nicht *sehen* läßt.

⁹Das ganze lose Wesen jener Beweisführung beruht wohl auf der Verwechslung der Summe und des Grenzwerts der Summe.

Das sieht man klar: *wie weit immer* man die rechte Reihe fortsetzt, immer kann man die linke auch so weit bringen, daß sie alle Glieder der rechten einschließt. (Dabei bleibt noch *offen*, ob die dann auch noch andre Glieder enthält.)

¹⁰Man könnte auch so fragen: Wenn man¹¹ nur diesen Beweis hätte,¹² was könnte man¹³ nun daraufhin wagen? Wenn wir etwa die Primzahlen bis N gefunden hätten, könnten wir nun daraufhin ins Unendliche auf die Suche nach einer weiteren Primzahl gehen – da uns der Beweis verbürgt, daß wir eine finden werden? Das ist doch Unsinn. – Denn das „wenn wir nur lange genug suchen“ heißt garnichts. (Bezieht sich auf Existenzbeweise im Allgemeinen.)

648 ¹⁴Könnte ich auf diesen Beweis hin weitere Primzahlen links hinzufügen? Gewiß nicht, denn ich weiß ja garnicht, wie ich welche finden kann und das heißt: ich habe¹⁵ ja gar keinen Begriff der Primzahl, der Beweis hat mir keinen gegeben. Ich könnte nur beliebige Zahlen (bezw. Reihen) hinzufügen.

(Die Mathematik ist angezogen mit falschen Deutungen.)

(„Es *muß* noch eine Primzahl¹⁶ kommen“ heißt in der Mathematik nichts. Das hängt unmittelbar damit zusammen, daß es „in der Logik nichts Allgemeineres und Spezielleres gibt“.)

Wenn die Zahlen alle Kombinationen von 2 und 3 wären, so müßte

$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{v=n} \frac{1}{2^v} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{v=n} \frac{1}{3^v} \right)$ den $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n=m} \frac{1}{n}$ ¹⁷ergeben, – sie ergibt ihn aber nicht. . . Was folgt daraus? (Satz des ausgeschlossenen Dritten.) Daraus folgt nichts, als daß die Grenzwerte der Summen verschieden sind; also nichts (Neues). Nun könnte man aber untersuchen, woran das liegt. Dabei wird man vielleicht auf Zahlen stoßen, die durch $2^v \times 3^u$ nicht darstellbar sind, also auf größere Primzahlen, nie aber wird man sehen, daß *keine* Anzahl solcher ursprünglicher Zahlen zur Darstellung aller Zahlen genügt.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \neq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

Wieviel Glieder der Form $\frac{1}{2^v}$ ich auch zusammennehmen mag, nie ergibt es mehr als 2, während die ersten vier Glieder der linken Reihe schon mehr als 2 ergeben. (*Hierin* muß also schon der Beweis liegen.) Und hierin liegt er auch und zugleich die Konstruktion einer Zahl, die keine Potenz von 2 ist, denn die Regel heißt nun: finde den Abschnitt der Reihe, der jedenfalls 2 übertrifft, dieser muß eine Zahl enthalten, die keine Potenz von 2 ist.

9 (M): 14 \ 1

10 (M): 14 \ 2

11 (V): du

12 (V): hättest,

13 (V): was könntest du

14 (M): 14 \ 3

15 (V): habe **g**

16 (V): eine solche Zahl

17 (F): MS 108, S. 284.

In mathematics there are no symptoms: only in a psychological sense can that sort of thing exist for mathematicians.

We could also put it like this: In mathematics nothing can be inferred that cannot be *seen*.

⁸All of the looseness of that line of reasoning most likely rests on the confusion between a sum and the limiting value of a sum.

We see this clearly: *however far* we continue the series on the right we can always get the one on the left to the point that it includes all the terms of the one on the right. (And this leaves it *open* whether the one on the left then contains other terms as well.)

⁹We could also put the question this way: If one had only this proof, what would one stake on it?¹⁰ If, say, we had found the primes up to N, could we then go on infinitely in search of a further prime number – since the proof gives us the guarantee that we will find one? Surely that is nonsense. – For “if we only search long enough” means nothing at all. (And this refers to existence proofs in general).

¹¹Could I, based on this proof, add further prime numbers to the left side? Certainly not, because I have no idea how to find any, and that means: I have absolutely no concept of prime numbers; the proof hasn't given me any. I could only add arbitrary numbers (or series).

(Mathematics is dressed in false interpretations).

(“Another prime¹² number *has to* turn up” means nothing in mathematics. That is directly connected with the fact that “in logic there is nothing ‘more general’ or ‘more particular’”).

If the numbers were all combinations of 2 and 3 then –

$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{v=n} \frac{1}{2^v}\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{v=n} \frac{1}{3^v}\right)$ would yield $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n=m} \frac{1}{n}$ ¹³but it doesn't . . . What follows from that? (The law of the excluded middle.) Nothing follows, except that the limiting values of the sums are different; that is, nothing (new). But now we could investigate why this is so. In so doing we may hit upon numbers that are not representable by $2^v \times 3^u$. That is to say, we may hit upon larger prime numbers, but we will never see that *no* quantity of such original numbers will suffice for the representation of all numbers.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \neq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

However many terms of the form $\frac{1}{2^v}$ I put might together, they never add up to more than 2, whereas the first four terms of the series on the left already add up to more than 2. (So the proof must already be contained *in this*.) And this *is* what it is contained in, and so is – at the same time – the construction of a number that is not a power of 2, for the rule now says: find the segment of the series that adds up to more than 2 – this must contain a number that is not a power of 2.

8 (M): 14\1

9 (M): 14\2

10 (V): way: If you had only this proof, what would you stake on it?

11 (M): 14\3

12 (V): such

13 (F): MS 108, p. 284.

$$649 \quad \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots\right) = n.^{18}$$

Wenn ich nun die Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ so weit ausdehne, bis sie n überschreitet, dann muß dieser Teil ein Glied enthalten, das in der rechten Reihe nicht gefunden werden kann, denn enthielte die rechte Reihe alle diese Glieder, dann müßte sie eine größere und keine kleinere Summe ergeben.

Die Bedingung, unter der ein Teil der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$, etwa $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+v}$, gleich oder größer als 1 wird, ist folgende:

Es soll also werden:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+v} \geq 1$$

Formen wir die linke Seite um in:

$$\frac{1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \dots + \frac{n}{n+v}}{n}$$

$$= \frac{1 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{n-1}{n+(n-1)}\right) + \frac{n}{2n} + \frac{n}{2n+1} + \frac{n}{2n+2} + \dots + \frac{n}{n+v}}{n}$$

$$= \frac{n - \frac{1}{2}n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{n+1} + (v-n+1) \cdot \frac{n}{n+v}}{n}$$

$$= 1 - \frac{n-1}{2n+2} + \frac{v-n+1}{n+v} \geq 1$$

$$\therefore 2nv + 2v - 2n^2 - 2n + 2n + 2 - n^2 - nv + n + v \geq 0$$

$$nv + 3v - 3n^2 + 2 + n \geq 0$$

$$v \geq \frac{3n^2 - (n+2)}{n+3} < 3n - 1.^{19}$$

18 (F): MS 108, S. 285.

19 (F): MS 108, S. 286.

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots) \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots) = n.^{14}$$

Now if I extend the sum $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ until it is greater than n , this part must contain a term that can't be found in the series on the right, for if this series contained all those terms, it would have to yield a larger, not a smaller, sum.

The condition for a segment of the series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$, say $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+v}$, being equal to or greater than 1 is as follows:

To make:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+v} \geq 1$$

transform the left side into:

$$\frac{1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \dots + \frac{n}{n+v}}{n}$$

$$= \frac{1 + (1 - \frac{1}{n+1}) + (1 - \frac{2}{n+2}) + \dots + (1 - \frac{n-1}{n+(n-1)}) + \frac{n}{2n} + \frac{n}{2n+1} + \frac{n}{2n+2} + \dots + \frac{n}{n+v}}{n}$$

$$= \frac{n - \frac{1}{2}n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{n+1} + (v-n+1) \frac{n}{n+v}}{n}$$

$$= 1 - \frac{n-1}{2n+2} + \frac{v-n+1}{n+v} \geq 1$$

$$\therefore 2nv + 2v - 2n^2 - 2n + 2n + 2 - n^2 - nv + n + v \geq 0$$

$$nv + 3v - 3n^2 + 2 + n \geq 0$$

$$v \geq \frac{3n^2 - (n+2)}{n+3} < 3n - 1.^{15}$$

14 (F): MS 108, p. 285.

15 (F): MS 108, p. 286.

Dreiteilung des Winkels, etc.

650

Man könnte sagen: In der Geometrie der euklidischen Ebene kann man nach der 3-Teilung des Winkels nicht suchen, weil es sie nicht gibt – und nach der 2-Teilung nicht, weil es sie gibt.

In der Welt der euklidischen¹ Elemente kann ich ebensowenig nach der 3-Teilung des Winkels fragen, wie ich nach ihr suchen kann. Es ist von ihr einfach nicht die Rede.

(Ich kann der Aufgabe der 3-Teilung des Winkels in einem größern System ihren Platz bestimmen, aber nicht im System der euklidischen² Geometrie danach fragen, ob sie lösbar ist.³ In welcher *Sprache* sollte ich denn danach fragen? in der euklidischen? – Und ebensowenig kann ich in der euklidischen Sprache nach der Möglichkeit der 2-Teilung des Winkels im euklidischen System fragen. Denn das würde in dieser Sprache auf eine Frage nach der Möglichkeit schlechthin hinauslaufen, welche immer Unsinn ist.)

651

Wir müssen übrigens hier eine Unterscheidung zwischen gewissen Arten von Fragen machen, eine Unterscheidung, die wieder zeigt, daß, was wir in der Mathematik „Frage“ nennen, von dem verschieden ist, was wir im alltäglichen Leben so nennen. Wir müssen unterscheiden zwischen einer Frage „wie teilt man den Winkel in 2 gleiche Teile“ und der Frage „ist *diese* Konstruktion die Halbierung des Winkels“. Die Frage hat nur Sinn in einem Kalkül, der uns eine Methode zu ihrer Lösung gibt; nun kann uns ein Kalkül sehr wohl eine Methode zur Beantwortung der einen Frage geben, aber nicht zur Beantwortung der andern. Euklid z.B. lehrt uns nicht nach der Lösung seiner Probleme suchen, sondern gibt sie uns und beweist, daß es die Lösungen sind. Das ist aber keine psychologische oder pädagogische Angelegenheit, sondern eine mathematische. D.h.⁴ der *Kalkül* (den er uns gibt) ermöglicht es uns nicht, nach der Konstruktion zu suchen. Und ein Kalkül, der es ermöglicht, ist eben ein *anderer*. (Vergleiche auch Methoden des Integrierens mit denen des Differenzierens; etc.)

Es gibt eben in der Mathematik sehr Verschiedenes, was alles Beweis genannt wird und diese Verschiedenheiten sind *logische*. Was also „Beweis“ genannt wird, hat nicht mehr miteinander zu tun, als was⁵ „Zahl“ genannt wird.

652

Welcher Art ist der *Satz* „die 3-Teilung des Winkels mit Zirkel und Lineal ist unmöglich“? Doch wohl von derselben, wie: „in der Reihe der Winkelteilungen $F(n)$ kommt keine $F(3)$ vor, wie in der Reihe der Kombinationszahlen $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ keine 4“. Aber welcher Art ist *dieser* Satz? Von der des Satzes: „in der Reihe der Kardinalzahlen kommt $\frac{1}{2}$ nicht

1 (O): Euklidischen

2 (O): Euklidischen

3 (V): Geometrie nach der Möglichkeit der 3-Teilung fragen // nach ihrer Lösbarkeit fragen.

4 (O): D.H.

5 (V): was ~~Zahl~~

The Trisection of an Angle, etc.

We could say: In Euclidean plane geometry we can't search for the trisection of an angle, because there is no such thing – and we can't search for the bisection of an angle, because there is such a thing.

In the world of Euclid's *Elements* I can no more ask about the trisection of an angle than I can search for it. It just isn't mentioned.

(I can assign the problem of the trisection of an angle its place within a larger system, but I can't ask within the system of Euclidean geometry whether it's solvable.¹ In what *language* should I ask this? In the Euclidean? – And it is equally impossible for me to ask in Euclidean language about the possibility of bisecting an angle within the Euclidean system. For in that language that would amount to a question about absolute possibility, which is always nonsense.)

Incidentally, here we must make a distinction between certain types of questions, a distinction that will show once again that what we call a “question” in mathematics is different from what we call by that word in everyday life. We must distinguish between the question “How does one divide an angle into two equal parts?” and the question “Is *this* construction the bisection of an angle?” A question makes sense only in a calculus which gives us a method for its solution; and a calculus may well give us a method for answering the one question, but not the other. For instance, Euclid doesn't teach us to search for the solutions to his problems; rather, he gives them to us and then proves that they are the solutions. And this isn't a psychological or pedagogical matter, but a mathematical one. That is, the *calculus* (that he gives us) doesn't enable us to search for the construction. And a calculus that does enable us to do that is simply a *different* one. (Compare also the methods of integration with those of differentiation, etc.)

In mathematics there are just very different things that are all called proofs, and these disparities are *logical* disparities. So the things that are called “proofs” have no more to do with each other than the things called “*numbers*”.

What kind of *proposition* is “The trisection of an angle with ruler and compass is impossible”? The same kind, no doubt, as “There is no F(3) in the series of angle-divisions F(n), just as there is no 4 in the series of combination-numbers $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ ”. But what kind of proposition is *that*? The same kind as “ $\frac{1}{2}$ doesn't occur in the series of cardinal numbers”. That is evidently a (superfluous) rule of the game, something like: in draughts there is no piece called “the queen”. And the question whether trisection is possible is then the question whether there is such a thing in the game as trisection, whether there is a piece in

1 (V): possible.

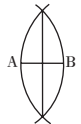
vor“. Das ist offenbar eine (überflüssige) Spielregel, etwa wie die: im Damespiel kommt keine Figur vor, die „König“ genannt wird. Und die Frage, ob eine 3-Teilung möglich ist, ist dann die, ob es eine 3-Teilung im Spiel gibt, ob es eine Figur im Damespiel gibt, die „König“ genannt wird, und etwa eine ähnliche Rolle spielt, wie der Schachkönig. Diese Frage wäre natürlich einfach durch eine Bestimmung zu beantworten, aber sie würde kein Problem, keine Rechenaufgabe stellen. Hätte also einen andern Sinn, als eine, deren Antwort lautete: ich werde ausrechnen, ob es so etwas gibt. (Etwa: „ich werde ausrechnen, ob es unter den Zahlen 5, 7, 18, 25, eine gibt, die durch 3 teilbar ist.“) Ist nun die Frage nach der Möglichkeit der 3-Teilung des Winkels von dieser Art? Ja, – wenn man im Kalkül ein allgemeines System hat, um, etwa, die Möglichkeit der n-Teilung zu berechnen.

Warum nennt man *diesen* Beweis den Beweis *dieses* Satzes? Der Satz ist ja kein Name, sondern gehört (als Satz) einem Sprachsystem an: Wenn ich sagen kann „es gibt keine 3-Teilung“, so hat es Sinn zu sagen „es gibt keine 4-Teilung“ etc. etc. Und ist *dies* ein Beweis des ersten Satzes (ein Teil seiner Syntax), so muß es also entsprechende Beweise (oder Gegenbeweise) für die andern Sätze des Satzsystems geben, denn sonst gehören sie nicht zu demselben System.

653 Ich kann nicht fragen, ob die 4 unter den Kombinationszahlen vorkommt, wenn das⁶ mein Zahlensystem ist. Und nicht, ob $\frac{1}{2}$ unter den Kardinalzahlen vorkommt, oder zeigen, daß es nicht eine von ihnen ist, außer, wenn ich „Kardinalzahlen“ einen Teil eines Systems nenne, welches auch $\frac{1}{2}$ enthält. (Ebensowenig kann ich aber auch sagen oder beweisen, daß 3 eine der Kardinalzahlen ist.) Die Frage heißt vielmehr etwa so: „Geht die Division 1 : 2 in ganzen Zahlen aus“, und das läßt sich nur fragen in einem System, worin das Ausgehen und das Nichtausgehen bekannt ist.⁷ (Die *Ausrechnung* muß Sinn haben.)

Bezeichnen wir mit „Kardinalzahlen“ nicht einen Teil der rationalen Zahlen, so können wir nicht ausrechnen, ob $81/3$ eine Kardinalzahl ist, sondern, ob die Division $81 : 3$ ausgeht oder nicht.

Statt des Problems der 3-Teilung des Winkels mit Lineal und Zirkel können wir nun ein ganz entsprechendes, aber viel übersichtlicheres, untersuchen. Es steht uns ja frei, die Möglichkeiten der Konstruktion mit Lineal und Zirkel weiter einzuschränken. So können wir z.B. die Bedingung setzen, daß sich die Öffnung des Zirkels nicht verändern läßt. Und wir können festsetzen, daß die einzige Konstruktion, die wir kennen – oder besser: die unser Kalkül kennt⁸ – diejenige ist, die man zur Halbierung einer Strecke AB benützt, nämlich:⁹



654 (Das könnte z.B. tatsächlich die primitive Geometrie eines Volkes sein. Und für sie gälte das, was ich über die Gleichberechtigung der Zahlenreihe „1, 2, 3, 4, 5, viele“ mit der Reihe der Kardinalzahlen gesagt habe. Überhaupt ist es für unsere Untersuchungen ein guter Trick, sich die Arithmetik oder Geometrie eines primitiven Volkes vorzustellen.)¹⁰

Ich will diese Geometrie das System α nennen und fragen: „ist die 3-Teilung der Strecke im System α möglich?“

Welche 3-Teilung ist in dieser Frage gemeint? – denn davon hängt offenbar der Sinn der Frage ab. Ist z.B. die physikalische 3-Teilung gemeint? D.h. die 3-Teilung durch Probieren und Nachmessen. In diesem Falle ist die Frage vielleicht zu bejahen. Oder die optische 3-Teilung? d.h. die Teilung, deren Resultat drei gleichlang aussehende Teile sind?

6 (V): dieses

7 (V): Nichtausgehen vorkommt.

8 (V): nennt

9 (F): MS 113, S. 114v.

10 (V): auszumalen.)

draughts called “the queen” which perhaps has a role like that of the queen in chess. Of course this question could be answered simply by a stipulation; but it wouldn’t pose any problem, any task of calculation; and so it would have a different sense from one whose answer was: I will figure out whether there is such a thing. (For example: “I will figure out whether there is one among the numbers 5, 7, 18, 25 that is divisible by 3”.) Now is the question about the possibility of trisecting an angle of that kind? It is – if you have a general system in the calculus for calculating, for instance, the possibility of division into n equal parts.

Why does one call *this* proof the proof of *this* proposition? A proposition isn’t a name, after all; it belongs (as a proposition) to a system of language. If I can say “There is no such thing as trisection” then it makes sense to say “There is no such thing as quadrisection”, etc., etc. And if *this* is a proof of the first proposition (a part of its syntax), then there must be corresponding proofs (or disproofs) for the other propositions of the propositional system, for otherwise they don’t belong to the same system.

I can’t ask whether 4 occurs among the combination-numbers if that² is my number system. And I can’t ask whether $\frac{1}{2}$ occurs among the cardinal numbers, or show that it isn’t one of them, unless I mean by “cardinal numbers” part of a system that contains $\frac{1}{2}$ as well. (But neither can I say or prove that 3 is one of the cardinal numbers.) Rather, the question goes something like this: “Does the division $1 \div 2$ come out in whole numbers?”, and that can only be asked in a system in which coming out even and not coming out even are familiar.³ (The *calculation* must make sense.)

If by “cardinal numbers” we aren’t referring to a subset of the rational numbers, then we can’t work out whether $81/3$ is a cardinal number; what we can work out is whether the division $81 \div 3$ comes out even or not.

Instead of the problem of trisecting an angle with ruler and compass we can now investigate one that corresponds to it completely, but can be surveyed much more easily. After all, there is nothing to prevent us from further restricting the possibilities of construction with ruler and compass. For instance, we might lay down the condition that the opening of the compass can’t be changed. And we can stipulate that the only construction we know – or better: that our calculus knows – is the one used to bisect a line-segment AB, namely⁴



(That might actually be the primitive geometry of a tribe, for instance. And what I said earlier about the number series “1, 2, 3, 4, 5, many” having equal rights with the series of cardinal numbers would be valid for this geometry too. In general it is a good trick in our investigations to imagine⁵ the arithmetic or geometry of a primitive people.)

I want to call this geometry system α and ask: “Is the trisection of a line possible in system α ?”

What kind of trisection is meant in this question? – for that’s obviously what the sense of the question depends on. For instance, is what is meant physical trisection? Trisection, that is, by trial and error and measurement? In that case the answer is perhaps yes. Or is optical trisection meant? A division, that is, that yields three parts that seem to have the

2 (V): this

3 (V): coming out even occurs.

4 (F): MS 113, p. 114v.

5 (V): picture

Wenn wir z.B. durch ein verzerrendes Medium sehen, so ist es ganz leicht vorstellbar, daß uns die Teile a, b, und c gleichlang erscheinen.¹¹

Nun könnte man die Resultate der Teilungen im System α nach der Zahl der erzeugten Teile durch die Zahlen 2, 2², 2³, u.s.w. darstellen; und die Frage, ob die 3-Teilung möglich ist, könnte bedeuten: ist eine der Zahlen in dieser Reihe = 3. Diese Frage kann freilich nur gestellt werden, wenn die 2, 2², 2³, etc. in einem andern System (etwa den Kardinalzahlen) eingebettet sind; nicht, wenn sie selbst unser Zahlensystem sind; denn dann

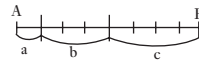
kennen wir – oder unser System – eben die 3 nicht. – Aber wenn unsere Frage lautet: ist eine der Zahlen 2, 2², etc. gleich 3, so ist hier eigentlich von einer 3-Teilung der Strecke nicht die Rede. Immerhin könnte¹² die Frage nach der Möglichkeit der 3-Teilung so aufgefaßt werden. – Eine andere Auffassung erhalten wir nun, wenn wir dem System α ein

655

System β hinzufügen, worin es die Streckenteilung nach Art dieser Figur¹³ gibt. Es kann nun gefragt werden: ist die Teilung β in 108 Teile eine Teilung der Art α ? Und diese Frage könnte wieder auf die hinauslaufen: ist 108 eine Potenz von 2? aber sie könnte auch auf eine andere Entscheidungsart hinweisen (einen andern Sinn haben), wenn wir die Systeme α und β zu einem geometrischen Konstruktionssystem verbinden; so zwar, daß es sich nun in diesem System beweisen läßt, daß die beiden Konstruktionen die gleichen Teilungspunkte B, C, D „liefern müssen“.¹⁴

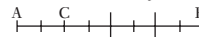
Denken wir nun, es hätte Einer im System α eine Strecke AB in 8 Teile geteilt, nähme¹⁵ diese nun zu den Strecken a, b, c zusammen und fragte: ist das eine Teilung in 3 gleiche Teile.¹⁶

(Wir könnten uns den Fall übrigens leichter mit



einer größeren Anzahl ursprünglicher Teile vorstellen, die es möglich

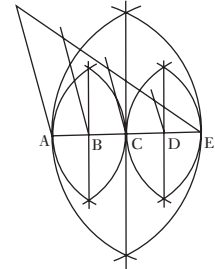
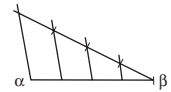
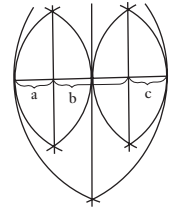
macht, 3 gleichlang aussehende Gruppen von Teilen zu bilden.) Die Antwort auf diese Frage wäre der Beweis, daß 2³ nicht durch 3 teilbar ist; oder der Hinweis darauf, daß sich die Teile a, b, c wie 1 : 3 : 4 verhalten. Und nun könnte man fragen: habe ich also im System α nicht doch einen Begriff von der 3-Teilung, nämlich der Teilung, die die Teile a, b, c im Verhältnis 1 : 1 : 1 hervorbringt? Gewiß, ich habe nun einen neuen Begriff „3-Teilung einer Strecke“ eingeführt; wir könnten ja sehr wohl sagen, daß wir durch die 8-Teilung der Strecke AB die Strecke CB in 3 gleiche Teile geteilt haben, wenn das eben heißen soll: wir haben eine Strecke erzeugt, die aus 3 gleichen Teilen besteht.¹⁷



Die Perplexität, in der wir uns bezüglich des

Problems der 3-Teilung befanden, war etwa die: Wenn die 3-Teilung des Winkels unmöglich ist – logisch unmöglich – wie kann man dann überhaupt nach ihr fragen? Wie kann man das logisch Unmögliche beschreiben und nach seiner Möglichkeit sinnvoll fragen? D.h., wie kann man *logisch* nicht zusammenpassende Begriffe zusammenstellen (gegen die Grammatik, also unsinnig) und sinnvoll nach der Möglichkeit dieser Zusammenstellung fragen? – Aber dieses Paradox fände sich ja wieder, wenn man fragt: „ist $25 \times 25 = 620$?“ – da es doch *logisch* unmöglich ist, daß diese Gleichung stimmt; ich kann ja nicht beschreiben, wie es wäre, wenn –. Ja, der Zweifel ob $25 \times 25 = 620$ (oder der, ob es = 625 ist) hat eben den Sinn, den die Methode der Prüfung ihm gibt. Und die Frage nach der Möglichkeit der

656



11 (F): MS 113, S. 115r.

12 (V): kann

13 (F): MS 113, S. 115v.

14 (F): MS 113, S. 115v.

15 (O): nehme

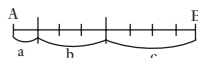
16 (V): eine 3-Teilung. (F): MS 113, S. 115v.

17 (F): MS 113, S. 116r.

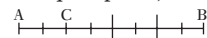
same length? If, for instance, we look through some distorting medium, it is quite easily imaginable that the parts a, b, and c might appear to us to be of the same length.⁶

Now we could represent the results of the divisions in system α by the numbers 2, 2^2 , 2^3 , etc., corresponding to the number of segments produced; and the question whether trisection is possible could mean: Does any of the numbers in this series = 3? To be sure, this question can only be asked if 2, 2^2 , 2^3 , etc. are embedded in another system (say in the system of cardinal numbers); if these numbers are themselves our number system it can't be asked, for in that case we – or our system – simply aren't acquainted with the number 3. – But if our question is: Is one of the numbers 2, 2^2 , etc. equal to 3?, then we're not really talking about a *trisection* of the line-segment here. Nonetheless, we might⁷ understand the question about the possibility of trisection in that way. – Now we get a different understanding if we adjoin to the system α a system β in which line-segments are divided in the manner of this figure. ⁸Now we can ask: Is a division β into 108 sections a division of type α ? And this question could again boil down to: Is 108 a power of 2? But it could also point to a different decision procedure (have a different sense) if we connected the systems α and β to form a system of geometrical constructions in such a way that now it could be proved in this system that the two constructions “must yield” the same division points B, C, D.⁹

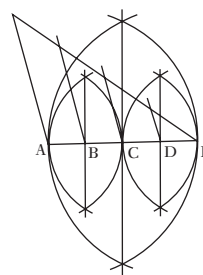
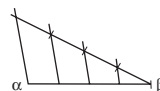
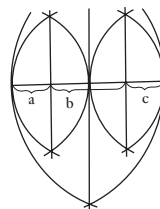
Now suppose that someone, having divided a line-segment AB into 8 sections in system α , were now to group these into the line-segments a, b, c, and were to ask: Is this a division into 3 equal parts?¹⁰



(Incidentally, we could imagine the case more easily with a larger number of original sections, which would make it possible to form 3 groups of sections which seemed to be of equal length.) The answer to this question would be a proof that 2^3 is not divisible by 3; or an indication that the sections a, b, c are in the ratio 1 : 3 : 4. And now you could ask: So don't I have a concept of trisection in system α after all, i.e. a concept of a division which yields the parts a, b, c, in the ratio 1 : 1 : 1? Of course, I have now introduced a new concept of “trisection of a line-segment”; we could perfectly well say that by dividing the line-segment AB into eight parts we have divided the line-segment CB into 3 equal parts, if that is to *mean*: we have produced a line that consists of 3 equal parts.¹¹



The perplexity in which we found ourselves in relation to the problem of trisection was roughly this: if the trisection of an angle is impossible – logically impossible – then how can we ask about it at all? How can we describe what is logically impossible and meaningfully ask about its possibility? That is, how can one (in violation of grammar, and thus nonsensically) put together concepts that don't fit together *logically*, and meaningfully ask about the possibility of this combination? But this paradox would recur if we asked “Is $25 \times 25 = 620?$ ”, since it's *logically* impossible that this equation is correct; after all, I can't describe what it would be like if . . . – Indeed, the doubt whether $25 \times 25 = 620$ (or whether it = 625) has precisely the sense that the method of checking gives it. And the question about the



6 (F): MS 113, p. 115r.
 7 (V): can
 8 (F): MS 113, p. 115v.
 9 (F): MS 113, p. 115v.

10 (V): a tripartite division? (F): MS 113, p. 115v.
 11 (F): MS 113, p. 116r.

3-Teilung hat den Sinn, den die Methode der Prüfung ihr gibt. Es ist ganz richtig: wir stellen uns hier nicht vor, oder beschreiben, wie es ist, wenn $25 \times 25 = 620$ ist, und das heißt eben, daß wir es hier mit einer andern (logischen) Art von Frage zu tun haben, als etwa der: „ist diese Straße 620 oder 625m lang?“

(Wir sprechen von einer „*Teilung des Kreises* in 7 Teile“ und von einer Teilung des Kuchens in 7 Teile.)

possibility of trisection has the sense that the method of checking gives it. It is quite correct that: Here we don't imagine, or describe, what it is like if $25 \times 25 = 620$; and what that means is simply that here we are dealing with a type of question that is (logically) different from, say, "Is this street 620 or 625 metres long"?

(We talk about a "*division of a circle* into 7 segments" and of a division of a cake into 7 segments.)

Suchen und Versuchen.

Wenn man jemandem,¹ der es noch nicht versucht hat, sagt „versuche die Ohren zu bewegen“, so wird er zuerst etwas in der Nähe der Ohren bewegen, was er schon früher bewegt hat, und dann werden sich entweder auf einmal seine Ohren bewegen oder nicht. Man könnte nun von diesem Vorgang sagen: er versucht die Ohren zu bewegen. Aber wenn das ein Versuch genannt werden kann, so ist es einer in einem ganz anderen Sinn als der, die Ohren (oder die Hände) zu bewegen, wenn wir zwar „wohl wissen, wie es zu machen ist“, aber sie jemand hält, sodaß wir sie schwer oder nicht bewegen können. Der Versuch im ersten Sinne entspricht einem Versuch, „ein mathematisches Problem zu lösen“, zu dessen Lösung es keine² Methode gibt. Man kann sich immer um das scheinbare Problem bemühen. Wenn man mir sagt „versuche, durch den bloßen Willen den Krug dort am anderen Ende des Zimmers zu bewegen“ so werde ich ihn anschauen und vielleicht irgendwelche seltsame Bewegungen mit meinen Gesichtsmuskeln machen; also selbst in diesem Falle scheint es einen Versuch zu geben.

658 Denken wir daran, was es heißt, etwas im Gedächtnis zu *suchen*.
Hier liegt gewiß *etwas wie* ein Suchen im eigentlichen Sinn vor.

Versuchen, eine Erscheinung hervorzurufen, aber heißt nicht, sie *suchen*.

Angenommen, ich taste meine Hand nach einer schmerzhaften Stelle ab, so suche ich wohl im Tastraum, aber nicht im Schmerzraum. D.h., was ich eventuell finde, ist eigentlich eine Stelle und nicht der Schmerz. D.h., wenn die Erfahrung auch ergeben hat, daß Drücken³ einen Schmerz hervorruft, so ist doch das Drücken kein Suchen nach einem Schmerz. So wenig, wie das Drehen einer Elektrisiermaschine das Suchen nach einem Funken ist.

|Kann man versuchen, zu einer Melodie den falschen Takt zu schlagen? Oder: Wie verhält sich dieser Versuch⁴ zu dem, ein Gewicht zu heben, das uns zu schwer ist? |

|Es ist nicht nur höchst bedeutsam, daß man die Gruppe |||| auf vielerlei Arten sehen kann (in vielerlei Gruppierungen), sondern (noch) viel bemerkenswerter,⁵ daß man es willkürlich tun kann. D.h., daß es einen ganz bestimmten Vorgang gibt, eine bestimmte „Auffassung“ auf Befehl zu bekommen; und daß es – dem entsprechend – auch einen ganz bestimmten Vorgang des vergeblichen Versuchens gibt. So kann man auf Befehl die Figur



⁶so sehen, daß der eine oder der andere Vertikalstrich die Nase, dieser oder jener Strich der Mund wird, und kann unter Umständen das eine oder das andere vergeblich versuchen. |

1 (O): jemanden,
2 (O): eine
3 (O): drücken

4 (V): sich dieses Versuchen
5 (O): viel mehr bemerkenswerter,
6 (F): MS 112, S. 50r.

Trying to Find and Trying.


If you say to someone who hasn't yet tried it, "Try to move your ears", he will first move some part of his body near his ears that he has moved before, and then either his ears will suddenly move or they won't. Now you could say of this process: He is trying to move his ears. But if that can be called trying, it's trying in a completely different sense from trying to move our ears (or our hands) when we already "know how to do it" but someone is holding them, so that we can move them only with difficulty or not at all. Trying in the first sense corresponds to trying "to solve a mathematical problem" when there is no method for its solution. One can always strive to solve the apparent problem. If someone says to me "Try to move that jug at the other end of the room using only your will power", I will look at it and perhaps make some strange movements with my facial muscles; so even in that case there seems to be such a thing as trying.

Let's think of what it means to *try to find* something in one's memory.
Here there is certainly *something like* trying to find in the strict sense.

But trying to evoke a phenomenon does not mean *trying to find* it.

Suppose I am feeling for a painful place on my hand; in that case I *am* trying to find it in the space of touch, but not in the space of pain. That means: what I may find is actually a location and not the pain. That means that even if experience has shown that pressing produces a pain, pressing still isn't trying to find a pain, any more than turning the handle of an electrostatic machine is trying to find a spark.

| Can one try to beat the wrong time to a melody? Or: How is trying to do this like trying to lift a weight that's too heavy for us? |

| It's not only highly significant that one can see the group | | | | in many different ways (in many different groupings); what is (still) more noteworthy is that one can do it at will. That is, that there is a very definite process of taking a particular "view" on command; and that correspondingly there is also a very definite process of vainly trying to do so. Thus, when ordered to do so you can see this figure  in such a way that one or the other vertical line becomes the nose, this or that line the mouth; and in certain circumstances you can try in vain to do the one or the other. |

1 (F): MS 112, p. 50r.

659 |Das Wesentliche ist hier, daß dieser Versuch den Charakter desjenigen hat, ein Gewicht mit der Hand zu heben; nicht den Charakter des Versuchs, in welchem man Verschiedenes tut, verschiedene Mittel ausprobiert, um (z.B.) ein Gewicht zu heben. In den zwei Fällen hat das Wort „Versuch“ ganz verschiedene Bedeutungen. (Eine außerordentlich folgenreiche grammatische Tatsache.)|

| The essential thing here is that this kind of trying is like trying to lift a weight with one's hand; not like the kind of trying where one does different things, tries out different means, in order (for example) to lift a weight. In the two cases the word "trying" has completely different meanings. (A grammatical fact that is extraordinarily rich in consequences.)|

Induktionsbeweis. Periodizität.

Inductive Proofs. Periodicity.

Inwiefern beweist der Induktionsbeweis einen *Satz*?

Ist der Induktionsbeweis ein Beweis von $a + (b + c) = (a + b) + c$, so muß man sagen können: die *Rechnung liefert*, daß $a + (b + c) = (a + b) + c$ ist (und kein anderes Resultat).

Denn dann muß erst die Methode der Berechnung (allgemein) bekannt sein und, wie wir darauf 25×16 ausrechnen können, so auch $a + (b + c)$. Es wird also erst eine allgemeine Regel zur Ausrechnung aller solcher Aufgaben gelehrt und danach die besondere gerechnet. – Welches ist aber hier die allgemeine Methode der Ausrechnung? Sie muß auf allgemeinen Zeichenregeln beruhen (– etwa, wie dem associativen Gesetz –).

Wenn ich $a + (b + c) = (a + b) + c$ negiere, so hat das nur Sinn, wenn ich etwa sagen will: es ist nicht $a + (b + c) = (a + b) + c$, sondern $= (a + 2b) + c$. Denn es fragt sich: was ist der Raum, in welchem ich den Satz negiere? wenn ich ihn abgrenze, ausschließe, – wovon?

Die Kontrolle von $25 \times 25 = 625$ ist die Ausrechnung von 25×25 , die Berechnung der rechten Seite; – kann ich nun $a + (b + c) = (a + b) + c$ errechnen, das Resultat $(a + b) + c$ ausrechnen? Je nachdem man es als berechenbar oder unberechenbar betrachtet, ist es beweisbar oder nicht. Denn ist der Satz eine Regel, der jede Ausrechnung folgen muß, ein Paradigma, dann hat es keinen Sinn, von einer Ausrechnung der Gleichung zu reden; sowenig, wie von der einer Definition.

Das, was die Ausrechnung möglich macht, ist das System, dem der Satz angehört und das auch die Rechenfehler bestimmt, die sich bei der Ausrechnung machen lassen. Z.B. ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und nicht $= a^2 + ab + b^2$; aber $(a + b)^2 = -4$ ist kein möglicher Rechenfehler in diesem System.

Ich könnte ja auch ganz beiläufig (siehe andere Bemerkungen¹) sagen: „ $25 \times 64 = 160$, $64 \times 25 = 160$; das beweist, daß $a \times b = b \times a$ ist“ (und diese Redeweise ist nicht vielleicht lächerlich und falsch; sondern man muß sie nur recht deuten). Und man kann richtig daraus schließen; also läßt sich „ $a \cdot b = b \cdot a$ “ in *einem* Sinne beweisen.²

Und ich will sagen: *Nur* in dem Sinne, in welchem die Ausrechnung so eines Beispiels Beweis des algebraischen Satzes genannt werden kann, ist der Induktionsbeweis ein Beweis dieses Satzes. Nur insofern kontrolliert er den algebraischen Satz. (Er kontrolliert seinen Bau,³ nicht seine Allgemeinheit.)

(Die Philosophie prüft nicht die Kalküle der Mathematik, sondern nur, was die Mathematiker über diese Kalküle sagen.)

1 (O): Bemerkungen

2 (V): berechnen.

3 (V): kontrolliert seine Struktur,

To what Extent does a Proof by Induction Prove a *Proposition*?

If a proof by induction is a proof of $a + (b + c) = (a + b) + c$, we must be able to say: the calculation gives the result that $a + (b + c) = (a + b) + c$ (and no other result).

For in that case the method of calculation must first be known (in general), and as easily as we can then calculate 25×16 , so can we calculate $a + (b + c)$. So first a general rule is taught for calculating all such problems, and afterwards the particular problem is calculated. – But what is the general method of calculation here? It must be based on general rules for signs (– such as, say, the associative law –).

If I negate $a + (b + c) = (a + b) + c$, this only makes sense if I want to say, for instance: $a + (b + c)$ isn't $(a + b) + c$, but is $(a + 2b) + c$. For the question is: What is the space in which I negate the proposition? If I mark it off and exclude it – from what?

To check $25 \times 25 = 625$ I calculate 25×25 , computing the right side; – can I now calculate $a + (b + c) = (a + b) + c$, computing the result $(a + b) + c$? Depending on whether we look at it as calculable or not, it is or isn't provable. For if the proposition is a rule which every calculation has to follow, a paradigm, then it makes no more sense to talk about calculating that equation than to talk about calculating a definition.

What makes the calculation possible is the system to which the proposition belongs; and that also determines the mistakes that can be made in the calculation. For example, $(a + b)^2$ is $a^2 + 2ab + b^2$, and not $a^2 + ab + b^2$; but $(a + b)^2 = -4$ is not a possible miscalculation in this system.

I could also say, quite off the cuff (see other remarks): “ $25 \times 64 = 160$, $64 \times 25 = 160$; that proves that $a \times b = b \times a$ ” (and this way of speaking is *not* ridiculous and incorrect; you just have to interpret it correctly). And you can infer correctly from that; so in *one* sense “ $a \cdot b = b \cdot a$ ” can be proved.¹

And I want to say: It is *only* in the sense in which you can call calculating such an example a proof of the algebraic proposition that the proof by induction is a proof of this proposition. Only to that extent is it a check of the algebraic proposition. (It is a check of its construction², not its generality).

(Philosophy doesn't examine the calculi of mathematics, but only what mathematicians say about these calculi.)

1 (V): calculated.

2 (V): structure

Der rekursive Beweis und der Begriff des Satzes. Hat der Beweis einen Satz als wahr erwiesen und sein Gegenteil¹ als falsch?

Hat der rekursive Beweis von $a + (b + c) = (a + b) + c \dots\dots A$ eine Frage beantwortet? und welche? Hat er eine Behauptung als wahr erwiesen und also ihr Gegenteil als falsch?

664 Das, was Skolem² den rekursiven Beweis von A nennt, kann man so schreiben:

$$\left. \begin{array}{l} a + (b + 1) = (a + b) + 1 \\ a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c)) + 1 \\ (a + b) + (c + 1) = ((a + b) + c) + 1 \end{array} \right\} \dots\dots B$$

In diesem Beweis kommt offenbar der bewiesene Satz gar nicht vor. – Man müßte nur eine allgemeine Bestimmung machen,³ die den Übergang zu ihm erlaubt. Diese Bestimmung könnte man so ausdrücken:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \quad \phi(1) = \psi(1) \\ \beta \quad \phi(c + 1) = F(\phi(c)) \\ \gamma \quad \psi(c + 1) = F(\psi(c)) \end{array} \right\} \phi(c) = \psi(c) \dots\dots \Delta$$

Wenn 3 Gleichungen von der Form α, β, γ bewiesen sind, so sagen wir, es sei „die Gleichung Δ für alle Kardinalzahlen bewiesen“. Das ist eine Erklärung dieser Ausdrucksform durch die erste. Sie zeigt, daß wir das Wort „beweisen“ im zweiten Fall anders gebrauchen als im ersten. Es ist jedenfalls irreführend zu sagen, wir hätten die Gleichung Δ oder A bewiesen, und vielleicht besser zu sagen, wir hätten ihre Allgemeingültigkeit bewiesen, obwohl das wieder in anderer Hinsicht irreführend ist.

Hat nun der Beweis B eine Frage beantwortet, eine Behauptung als wahr erwiesen? Ja, welches ist denn der Beweis B: ist⁴ es die Gruppe der 3 Gleichungen von der Form α, β, γ , oder die Klasse der Beweise dieser Gleichungen? Diese Gleichungen *behaupten* ja etwas (und beweisen nichts in dem Sinne, in dem *sie* bewiesen werden). Die Beweise von α, β, γ aber beantworten die Frage, ob diese 3 Gleichungen stimmen, und erweisen die Behauptung als wahr, daß sie stimmen. Ich kann nun erklären: die Frage, ob A für alle Kardinalzahlen gilt, solle bedeuten: „gelten für die Funktionen

1 (V): und einen ändern

2 (V): man

3 (V): treffen,

4 (V): B. Ist

Recursive Proof and the Concept of a Proposition. Did the Proof Prove a Proposition True and its Contradictory¹ False?

Did the recursive proof of $a + (b + c) = (a + b) + c \dots\dots A$ answer a question? And if so, what question? Did it show an assertion to be true and thus its contradictory to be false?

What Skolem² calls the recursive proof of B can be written thus:

$$\left. \begin{aligned} a + (b + 1) &= (a + b) + 1 \\ a + (b + (c + 1)) &= a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c)) + 1 \\ (a + b) + (c + 1) &= ((a + b) + c) + 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots B$$

In this proof the proposition proved obviously doesn't even occur. – All we have to do is to make³ a general stipulation that allows the transition to it. This stipulation could be expressed thus:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \quad \phi(1) &= \psi(1) \\ \beta \quad \phi(c + 1) &= F(\phi(c)) \\ \gamma \quad \psi(c + 1) &= F(\psi(c)) \end{aligned} \right\} \phi(c) = \psi(c) \dots\dots \Delta$$

If 3 equations of the form α, β, γ have been proved, we say “The equation Δ has been proved for all cardinal numbers”. This is a definition of this latter form of expression in terms of the first. It shows that the word “prove” is used differently in the second case than in the first. In any case it is misleading to say that we have proved the equation Δ or A. Perhaps it is better to say that we have proved its general validity, though that too is misleading in other respects.

Now has proof B answered a question, proved an assertion true? Well, which *is* proof B, anyway? Is it the group of three equations of the form α, β, γ , or the class of proofs of these equations? After all, these equations *assert* something (and don't prove anything in the sense in which *they* are proved). But the proofs of α, β, γ answer the question whether these three equations are correct, and show the truth of the assertion that they are correct. So I can produce a definition: the question whether A is valid for all cardinal numbers is to mean: “Are the equations α, β , and γ valid for the functions

1 (V): and Another Proposition
 2 (V): one

3 (V): produce

$$\phi(\xi) = a + (b + \xi), \psi(\xi) = (a + b) + \xi$$

665 Gleichungen α , β und γ “ Und dann ist diese Frage durch den rekursiven Beweis von A beantwortet, wenn hierunter die Beweise von α , β , γ verstanden werden (bezw. die Festsetzung von α und die Beweise von β und γ mittels α).

Ich kann also sagen, daß der rekursive Beweis ausrechnet, daß die Gleichung A einer gewissen Bedingung genügt; aber es ist nicht eine Bedingung der Art, wie sie etwa die Gleichung $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ erfüllen muß, um „richtig“ genannt zu werden. Nenne ich A „richtig“, weil sich Gleichungen von der Form α , β , γ dafür beweisen lassen, so verwende ich jetzt das Wort „richtig“ anders, als im Falle der Gleichungen α , β , γ oder $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Was heißt „ $1 : 3 = 0,3$ “? heißt es dasselbe wie „ $\frac{1}{3} : 3 = 0,3$ “? – Oder ist diese Division

$$\frac{1}{3}$$

der Beweis des ersten Satzes? D.h.: steht sie zu ihm im Verhältnis der Ausrechnung zum Bewiesenen?

„ $1 : 3 = 0,3$ “ ist ja nicht von der Art, wie

„ $1 : 2 = 0,5$ “; vielmehr entspricht

„ $1 : 2 = 0,5$ “ dem „ $1 : 3 = 0,3$ “ (aber nicht dem „ $\frac{1}{3} : 3 = 0,3$ “).

$$0$$

$$1$$

$$\frac{1}{3}$$

Ich will einmal statt der Schreibweise „ $1 : 4 = 0,25$ “ die annehmen:⁵

„ $1 : 4 = 0,25$ “ also z.B. „ $3 : 8 = 0,375$ “

$$\frac{0}{4}$$

$$\frac{0}{8}$$

dann kann ich sagen, diesem Satz entspricht nicht der: $1 : 3 = 0,3$, sondern z.B. der:

666 „ $1 : 3 = 0,333$ “. $0,3$ ist nicht in dem Sinne Resultat (Quotient) der Division, wie $0,375$.

$$\frac{1}{3}$$

Denn die Ziffer „ $0,375$ “⁶ war uns vor der Division $3 : 8$ bekannt; was aber bedeutet „ $0,3$ “ losgelöst von der periodischen Division? – Die Behauptung, daß die Division $a : b$ als Quotienten $0, \dot{c}$ ergibt, ist dieselbe wie die: die erste Stelle des Quotienten sei c und der erste Rest gleich dem Dividenden.

Nun steht B zur Behauptung, A gelte für alle Kardinalzahlen, im selben Verhältnis, wie

$\frac{1}{3} : 3 = 0,3$ zu $1 : 3 = 0,3$.

$$\frac{1}{3}$$

Der Gegensatz zu der Behauptung „A gilt für alle Kardinalzahlen“ ist nun: eine der Gleichungen α , β , γ sei falsch. Und die entsprechende Frage sucht keine Entscheidung zwischen einem $(x).fx$ und einem $(\exists x).\sim fx$.

Die Konstruktion der Induktion ist nicht *ein* Beweis, sondern eine bestimmte Zusammenstellung (ein Muster im Sinne von Ornament) von Beweisen. Man kann ja auch nicht sagen: ich beweise eine Gleichung, wenn ich drei beweise. Wie die Sätze einer Suite nicht *einen* Satz ergeben.

5 (V): gebrauchen:

6 (V): die Zahl 0,375

$$\phi(\xi) = a + (b + \xi), \psi(\xi) = (a + b) + \xi?"$$

And then that question will have been answered by the recursive proof of A, if by that the proofs of α, β, γ are understood (or the laying down of α and the proofs of β and γ using it).

So I can say that the recursive proof shows that the equation A satisfies a certain condition; but it isn't the kind of condition that, say, the equation $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ has to fulfill in order to be called "correct". If I call A "correct" because equations of the form α, β, γ can be proved for it, I am now using the word "correct" differently than with the equations α, β, γ , or $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

What does " $1 \div 3 = 0.\dot{3}$ "? mean? The same as " $\underline{1} \div 3 = 0.3$ "? – Or is that division the $\underline{1}$ proof of the first proposition? That is, does it have the same relationship to it as a calculation has to what is proved?

" $1 \div 3 = 0.\dot{3}$ " is not the same kind of thing as

" $1 \div 2 = 0.5$ "; rather, what

" $1 \div 2 = 0.5$ " corresponds to is " $1 \div 3 = 0.3$ " (but not " $\underline{1} \div 3 = 0.3$ ").

$$0 \qquad \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \qquad \underline{1}$$

Instead of the notation " $1 \div 4 = 0.25$ " let me adopt⁴ for this occasion the following:

" $1 \div 4 = 0.25$ ". So, for example " $3 \div 8 = 0.375$ ".

$$\underline{0} \qquad \qquad \qquad \underline{0}$$

Then I can say that what corresponds to this proposition is not $1 \div 3 = 0.\dot{3}$, but, for example:

" $1 \div 3 = 0.333$ ". $0.\dot{3}$ is not a result of division (quotient) in the same sense as 0.375 .

$$\underline{1}$$

For we were acquainted with the numeral " 0.375 "⁵ before the division $3 \div 8$; but what does " $0.\dot{3}$ " mean when detached from the periodic division? – The assertion that the division $a \div b$ gives $0.\dot{c}$ as a quotient is the same as the assertion that the first place of the quotient is c and the first remainder is the same as the dividend.

The relation of B to the assertion that A holds for all cardinal numbers is the same as that of

$$\underline{1} \div 3 = 0.3 \text{ to } 1 \div 3 = 0.\dot{3}.$$

$$\underline{1}$$

The contradictory of the assertion "A is valid for all cardinal numbers" is that one of the equations α, β, γ is false. And the corresponding question doesn't ask for a decision between $a(x).fx$ and $a(\exists x).\sim fx$.

The construction of the induction is not *one* proof, but a particular combination of proofs (a pattern of proofs in the sense of a decoration). For neither can one say: If I prove three equations, then I prove one. Just as the movements of a suite don't amount to a *single* movement.

4 (V): use

5 (V): the number 0.375

Man kann auch so sagen: Sofern man die Regel, in irgendeinem Spiel Dezimalbrüche zu bilden, die nur aus der Ziffer 3 bestehen, sofern man *diese Regel* als eine Art Zahl auffaßt, kann eine Division sie nicht zum Resultat haben, sondern nur das, was man periodische Division nennen kann und was die Form $a : b = c$ hat.

a

We can also put it this way: In so far as one understands *this rule* – the rule in a certain game of forming decimal fractions consisting only of the numeral 3 – as a kind of number, this number cannot be the result of a division, but only of what we can call a periodic division, of the form $a \div b = c$.

a

Induktion, $(\forall x)\phi x$ und $(\exists x)\phi x$. Inwiefern erweist die Induktion den allgemeinen Satz als wahr und einen Existentialsatz als falsch?

$$3 \times 2 = 5 + 1$$

$$3 \times (a + 1) = 3 + (3 \times a) = (5 + b) + 3 = 5 + (b + 3)$$

Warum nennst Du denn diese Induktion den Beweis dafür, daß $(n): n > 2 \therefore 3 \times n \neq 5?!$
– Nun, siehst Du denn nicht, daß der Satz, wenn er für $n = 2$ gilt, auch für $n = 3$ gilt, und dann auch für $n = 4$, und daß es immer so weiter geht? (Was erkläre ich denn, wenn ich das Funktionieren des induktiven Beweises erkläre?) Du nennst ihn also einen Beweis für „ $f(2)$ & $f(3)$ & $f(4)$ & u.s.w.“, ist er aber nicht vielmehr die Form der Beweise für „ $f(2)$ “ und „ $f(3)$ “ und „ $f(4)$ “ u.s.w.? Oder kommt das auf *eins* hinaus? Nun, wenn ich die Induktion den Beweis *eines* Satzes nenne, dann darf ich es nur, wenn das nichts anderes heißen soll, als daß sie jeden Satz einer gewissen Form beweist. (Und mein Ausdruck bedient sich der Analogie vom Verhältnis der Sätze „alle Säuren färben Lackmuspapier¹ rot“, „Schwefelsäure färbt Lackmuspapier² rot“.)

Denken wir nun, jemand sagte „prüfen wir nach, ob $f(n)$ für alle n gilt“ und nun fängt er an, die Reihe zu schreiben:

$$3 \times 2 = 5 + 1$$

$$3 \times (2 + 1) = (3 \times 2) + 3 = (5 + 1) + 3 = 5 + (1 + 3)$$

$$3 \times (2 + 2) = (3 \times (2 + 1)) + 3 = (5 + (1 + 3)) + 3 = 5 + (1 + 3 + 3)$$

und nun bricht er ab und sagt: „ich sehe schon, daß es für alle n gilt“. – So hat er also eine *Induktion* gesehen! Aber hatte er denn nach einer Induktion *gesucht*? Er hatte ja gar keine Methode, um nach einer³ zu suchen. Und hätte er nun keine entdeckt, hätte er damit eine Zahl gefunden, die der Bedingung nicht entspricht? – Die Regel der Kontrolle kann ja nicht lauten: sehen wir nach, ob sich eine Induktion findet, oder ein Fall, für den das Gesetz nicht gilt. – Wenn das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten nicht gilt, so heißt das nur, daß unser Ausdruck nicht mit einem Satz zu vergleichen ist.

Wenn wir sagen, die Induktion beweise den allgemeinen Satz, so wollen wir natürlich zur Ausdrucksform übergehen, sie beweise, daß *dies*, und nicht sein Gegenteil der Fall ist.⁴ Welches wäre aber das Gegenteil des Bewiesenen? Nun, daß $(\exists n) \sim f n$ der Fall ist. Damit verbinden

1 (O): Lakmuspapier

2 (O): Lakmuspapier

3 (V): ihr

4 (V): so denken wir: sie beweist, daß dieser Satz und nicht sein Gegenteil wahr ist.

Induction, $(x).\phi x$ and $(\exists x).\phi x$. To What Extent does Induction Prove a Universal Proposition True and an Existential Proposition False?

$$3 \times 2 = 5 + 1$$

$$3 \times (a + 1) = 3 + (3 \times a) = (5 + b) + 3 = 5 + (b + 3)$$

Why do you call this induction the proof that $(n): n > 2 \therefore 3 \times n \neq 5$? Well, don't you see that if the proposition is valid for $n = 2$, it's also valid for $n = 3$, and then also for $n = 4$, and that it goes on like that for ever? (What am I explaining, anyway, when I explain the way a proof by induction works?) So you call it a proof of " $f(2) \ \& \ f(3) \ \& \ f(4)$, etc.", but isn't it rather the form of the proofs of " $f(2)$ " and " $f(3)$ " and " $f(4)$ ", etc.? Or does that amount to *the same thing*? Well, if I call the induction the proof of a *single* proposition, I am allowed to do so only if that is supposed to mean no more than that it proves every proposition of a certain form. (And my expression uses the analogy of the relationship between the propositions "All acids turn litmus paper red" and "Sulphuric acid turns litmus paper red").

Now suppose someone were to say "Let's check whether $f(n)$ is valid for all n ", and then he begins to write the series

$$3 \times 2 = 5 + 1$$

$$3 \times (2 + 1) = (3 \times 2) + 3 = (5 + 1) + 3 = 5 + (1 + 3)$$

$$3 \times (2 + 2) = (3 \times (2 + 1)) + 3 = (5 + (1 + 3)) + 3 = 5 + (1 + 3 + 3)$$

and then he breaks off and says "I already see that it's valid for all n ". – So he has seen an *induction*! But was he *trying to find* an induction? After all, he didn't have any method for trying to find one.¹ And if he hadn't discovered one, would he thereby have found a number which did not satisfy the condition? – The rule for checking clearly can't be: let's see whether an induction turns up, or a case for which the law doesn't hold. – If the law of the excluded middle doesn't hold, that only means that our expression isn't comparable to a proposition.

When we say that induction proves the universal proposition, of course we want to switch to the mode of expression that it proves that *this* and not its contradictory is the case.² But what would be the contradictory of what was proved? Well, that $(\exists n).\sim f n$ is the case. Here we are combining two concepts: one derived from my current concept of the proof of $(n).f(n)$,

1 (V): it.

2 (V): When we say that induction proves the universal proposition, we think: it proves that

this proposition and not its contradictory is true.

wir zwei Begriffe: den einen, den ich aus meinem gegenwärtigen Begriff des Beweises von $(n).f(n)$ herleite, und einen andern, der von der Analogie mit $(\exists x).\phi x$ hergenommen ist. (Wir müssen ja bedenken, daß „ $(n).fn$ “ kein Satz ist, solange ich kein Kriterium seiner Wahrheit habe; und dann nur den Sinn hat, den ihm dieses Kriterium gibt. Ich konnte freilich, schon ehe ich das Kriterium besaß,⁵ etwa nach einer Analogie zu $(x).fx$ ausschauen.) Was ist nun das Gegenteil von dem, was die Induktion beweist? Der Beweis von $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ rechnet diese Gleichung aus im Gegensatz etwa zu $(a + b)^2 = a^2 + 3ab + b^2$. Was rechnet der Induktionsbeweis aus?

Die Gleichungen: $3 + 2 = 5 + 1$, $3 \times (a + 1) = (3 \times a) + 3$, $(5 + b) + 3 = 5 + (b + 3)$ im Gegensatz also etwa zu $3 + 2 = 5 + 6$, $3 \times (a + 1) = (4 \times a) + 2$, etc. Aber dieses Gegenteil entspricht ja nicht dem Satz $(\exists x).\phi x$. – Ferner ist nun⁶ mit jener Induktion im Gegensatz jeder Satz von der Form $\sim f(n)$, d.h.⁷ der Satz „ $\sim f(2)$ “, „ $\sim f(3)$ “, u.s.w.; d.h. die Induktion ist *das Gemeinsame* in der Ausrechnung⁸ von $f(2)$, $f(3)$, u.s.w.; aber sie ist nicht die Ausrechnung „aller Sätze der Form $f(n)$ “, da ja nicht eine Klasse von Sätzen in dem Beweis vorkommt, die ich „alle Sätze der Form $f(n)$ “ nenne. Jede einzelne nun von diesen Ausrechnungen ist die Kontrolle eines Satzes von der Form $f(n)$. Ich konnte nach der Richtigkeit dieses Satzes fragen und eine Methode zu ihrer Kontrolle anwenden, die durch die Induktion nur auf eine einfache Form gebracht war. Nenne ich aber die Induktion „den Beweis eines allgemeinen Satzes“, so kann ich nach der Richtigkeit dieses Satzes nicht fragen (sowenig, wie nach der Richtigkeit der Form der Kardinalzahlen). Denn, was ich Induktionsbeweis nenne, gibt mir keine Methode zur *Prüfung*, ob der allgemeine Satz richtig oder falsch ist; diese Methode müßte mich vielmehr lehren, auszurechnen (zu prüfen), ob sich für einen bestimmten Fall eines Systems von Sätzen eine Induktion bilden läßt, oder nicht. (Was so geprüft wird, ist, ob alle n die oder jene Eigenschaft haben, wenn ich so sagen darf; aber nicht, ob alle sie haben, oder ob es einige gibt, die sie nicht haben. Wir rechnen z.B. aus, daß⁹ die Gleichung $x^2 + 3x + 1 = 0$ keine rationalen Lösungen hat (daß es keine rationale Zahl gibt, die . . .) und nicht die Gleichung $x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$,¹⁰ dagegen die Gleichung $x^2 + 2x + 1 = 0$, etc.)

Daher wir es seltsam empfinden, wenn uns gesagt wird, die Induktion beweise den allgemeinen Satz; da wir das richtige Gefühl haben, daß wir ja in der Sprache der Induktion die allgemeine Frage gar nicht hätten stellen können. Da uns ja nicht zuerst eine Alternative gestellt war (sondern nur zu sein schien, solange uns ein Kalkül mit endlichen Klassen vorschwebte).

Die Frage nach der Allgemeinheit hatte vor dem Beweis noch gar keinen Sinn, also war sie auch keine Frage, denn die hätte nur Sinn gehabt, wenn eine allgemeine Methode der Entscheidung bekannt war, *ehe* der besondere Beweis bekannt war.¹¹

Denn der Induktionsbeweis entscheidet nicht in einer Streitfrage.¹²

Wenn gesagt wird: „der Satz ‚ $(n).fn$ ‘ folgt aus der Induktion“ heiße nur: jeder Satz der Form $f(n)$ folge aus der Induktion; – „der Satz ‚ $(\exists n).\sim f(n)$ ‘ widerspricht¹³ der Induktion“

5 (V): hatte,

6 (V): nun **nicht**

7 (V): $\sim f(n)$, nämlich

8 (V): in den Ausrechnungen

9 (V): ~~der~~

10 (O): $x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$,

11 (V): Die Frage nach der Allgemeinheit hätte // hatte // vor dem Beweis noch gar

keinen Sinn, also ist sie auch keine Frage, denn die Frage hätte nur Sinn gehabt, wenn eine allgemeine Methode zur Entscheidung bekannt war, *ehe* der besondere Beweis bekannt war.

12 (V): entscheidet nichts. // entscheidet keine Streitfrage.

13 (V): widerspreche

and another taken from the analogy with $(\exists x).\phi x$. (For we have to keep in mind that “ $(n).fn$ ” isn’t a proposition until I have a criterion for its truth; and that then it only has the sense this criterion gives it. To be sure, even before I had the criterion I could be on the lookout, say, for an analogy to $(x).fx$.) Now what is the opposite of what the induction proves? The proof of $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ solves this equation, in contrast to, say, $(a + b)^2 = a^2 + 3ab + b^2$. What does the inductive proof solve?

The equations: $3 + 2 = 5 + 1$, $3 \times (a + 1) = (3 \times a) + 3$, $(5 + b) + 3 = 5 + (b + 3)$, as opposed to, say, $3 + 2 = 5 + 6$, $3 \times (a + 1) = (4 \times a) + 2$, etc. But of course this opposite doesn’t correspond to the proposition $(\exists x).\phi x$. – Furthermore, every proposition of the form $\sim f(n)$, i.e.³ the propositions “ $\sim f(2)$ ”, “ $\sim f(3)$ ”, etc., now conflicts with that induction; that is to say, the induction is *the common element* in the calculation⁴ of $f(2)$, $f(3)$, etc.; but it isn’t the calculation “of all propositions of the form $f(n)$ ”, since of course no class of propositions occurs in the proof that I call “all propositions of the form $f(n)$ ”. Now each one of these calculations is a check on a proposition of the form $f(n)$. I was able to investigate the correctness of this proposition and employ a method to check it, which the induction just brought into a simple form. But if I call the induction “the proof of a universal proposition”, I can’t ask whether that proposition is correct (any more than whether the form of the cardinal numbers is correct). Because what I call inductive proof gives me no method of *checking* whether the universal proposition is correct or incorrect; rather, what this method teaches me is how to calculate (check) whether or not an induction can be constructed for a particular case within a system of propositions. (What is checked in this way is whether all n have this or that property, if I may put it like that; not whether all of them have it, or whether there are some that don’t have it. For example, we calculate that the equation $x^2 + 3x + 1 = 0$ has no rational roots (that there is no rational number that . . .), and neither does the equation $x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$ – but the equation $x^2 + 2x + 1 = 0$ does, etc.)

Thus we find it odd when we are told that the induction proves the universal proposition; for we feel rightly that in the language of the induction we couldn’t even have posed the universal question. After all, we weren’t first given an alternative (there only seemed to be one so long as we had a calculus with finite classes in mind).

Prior to the proof, the question about universality made no sense at all, and so it wasn’t even a question, because a question would only have made sense if a general method for making a decision had been known *before* the particular proof was known.⁵

Proof by induction isn’t decisive for a disputed question.⁶

If it is said: “The proposition ‘ $(n).fn$ ’ follows from the induction” only means: every proposition of the form $f(n)$ follows from the induction, and “The proposition $(\exists n).\sim f(n)$ contradicts the induction” only means: every proposition of the form $\sim f(n)$ is disproved by

3 (V): namely,

4 (V): calculations

5 (V): Prior to the proof, the question about the universal proposition would make // made // no sense at all, and so it isn’t even a question,

because the question would only have made sense if a general method of decision were known *before* the particular proof was discovered.

6 (V): induction decides nothing. // induction doesn’t decide a disputed question.

heiße nur: jeder Satz der Form $\sim f(n)$ werde durch die Induktion widerlegt, – so kann man damit einverstanden sein,¹⁴ aber wird¹⁵ jetzt fragen: Wie gebrauchen wir den Ausdruck „der Satz $(n).f(n)$ “ richtig? Was ist seine Grammatik. (Denn daraus, daß ich ihn in gewissen Verbindungen gebrauche, folgt nicht, daß ich ihn überall dem Ausdruck „der Satz $(x).\phi x$ “ analog gebrauche.)

Denken wir, es stritten sich Leute darüber, ob in der Division $1 : 3$ lauter Dreier im Quotienten herauskommen müßten; sie hätten aber keine Methode, um dies zu entscheiden.¹⁶ Nun bemerkt Einer von ihnen die induktive Eigenschaft von $1,0 : 3 = 0,3$ und sagt: jetzt

1

weiß ich's, es müssen lauter 3 im Quotienten stehen. Die Andern hatten an *diese* Art der Entscheidung nicht gedacht. Ich nehme an, es habe ihnen unklar etwas von einer Entscheidung durch stufenweise Kontrolle vorgeschwebt, und daß sie diese Entscheidung freilich nicht herbeiführen könnten. Halten sie nun an ihrer extensiven Auffassung fest, so ist allerdings durch die Induktion eine Entscheidung herbeigeführt, denn die Induktion zeigt für jede Extension des Quotienten, daß sie aus lauter 3 besteht. Lassen sie aber die extensive Auffassung fallen, so entscheidet die Induktion nichts. Oder nur das, was die Ausrechnung von $1,0 : 3 = 0,3$ entscheidet: nämlich, daß ein Rest bleibt, der gleich dem

1

Dividenden ist. Aber mehr nicht. Und nun kann es allerdings eine richtige Frage geben, nämlich: ist der Rest, der bei dieser Division bleibt, gleich dem Dividenden? und diese Frage ist jetzt an die Stelle der alten extensiven getreten und ich kann natürlich den alten Wortlaut beibehalten, aber er ist jetzt außerordentlich irreführend, denn er¹⁷ läßt es immer so erscheinen, als wäre die Erkenntnis der Induktion nur ein Vehikel, das uns in die Unendlichkeit tragen kann. (Das hängt auch damit zusammen, daß das Zeichen „u.s.w.“ sich auf eine interne Eigenschaft des Reihengliedes, das ihm vorhergeht, bezieht und nicht auf seine Extension.)

Die Frage „gibt es eine rationale Zahl, die die Wurzel von $x^2 + 3x + 1 = 0$ ist“ ist freilich durch eine Induktion entschieden.¹⁸ – aber hier habe ich eben eine Methode konstruiert, um Induktionen zu bilden; und die Frage hat ihren Wortlaut nur, weil es sich um eine Konstruktion von Induktionen handelt. D.h. die Frage wird durch eine Induktion entschieden, wenn ich nach dieser Induktion fragen konnte. Wenn mir also ihr Zeichen von vornherein auf ja und nein bestimmt war, so daß ich rechnerisch zwischen ihnen entscheiden konnte, wie z.B., ob der Rest in $5 : 7$ gleich oder ungleich dem Dividenden sein wird. (Die Verwendung der Ausdrücke „alle . . .“ und „es gibt . . .“ für diese Fälle hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Verwendung des Wortes „unendlich“ im Satz „heute habe ich ein Lineal mit unendlichem Krümmungsradius gekauft“.)

672 1 : $3 = 0,3$ entscheidet durch ihre Periodizität nichts, was früher offen gelassen war. Wenn

1

vor der Entdeckung der Periodizität Einer vergebens nach einer 4 in der Entwicklung von $1 : 3$ gesucht hätte, so hätte er doch die Frage „gibt es eine 4 in der Entwicklung von $1 : 3$ “ nicht sinnvoll stellen können; d.h., *abgesehen davon*, daß er tatsächlich zu keiner 4 gekommen war, können wir ihn davon überzeugen, daß er keine Methode besitzt, seine Frage zu entscheiden. Oder wir könnten auch sagen: abgesehen von dem Resultat seiner Tätigkeit könnten wir ihn über die Grammatik seiner Frage und die Natur seines Suchens aufklären

14 (V): so kann man sich damit zufrieden geben,

15 (V): wird

16 (V): Methode, wie dies zu entscheiden sei.

17 (V): sie

18 (V): entschieden,

the induction, then we can agree;⁷ but then we shall ask: How do we use the expression “the proposition $(n).f(n)$ ” correctly? What is its grammar? (For from the fact that I use it in certain contexts it doesn’t follow that I use it everywhere analogously to the expression “the proposition $(x).\phi x$ ”.)

Let’s imagine that people argued about whether the quotient of the division $1 \div 3$ had to contain only threes, but had no method of deciding this.⁸ Now one of them notices the inductiveness of $1 \cdot 0 \div 3 = 0 \cdot 3$ and says: Now I have it: there must be only threes in the quotient.

1

The others hadn’t thought of *that* kind of decision. I suppose that they had vaguely imagined some kind of decision by checking step by step, realizing that, to be sure, they wouldn’t be able to reach this decision. Now if they hold on to their extensional viewpoint, the induction has indeed produced a decision, because in the case of each extension of the quotient it shows that the extension consists of nothing but threes. But if they drop their extensional viewpoint the induction decides nothing; or only what is decided by figuring out $1 \cdot 0 \div 3 = 0 \cdot 3$, namely that there is a remainder that’s the same as the dividend. But nothing

1

more than that. And now a real question can be asked, namely, is the remainder left after this division equal to the dividend? And this question has now taken the place of the old extensional question, and of course I can keep the old wording, but it is now extremely misleading, for it⁹ always makes it look as if the knowledge of induction were merely a vehicle – a vehicle that could carry us into infinity. (This is also connected with the fact that the sign “etc.” refers to an internal property of the part of the series that precedes it, and not to its extension.)

To be sure, the question “Is there a rational number that is a root of $x^2 + 3x + 1 = 0$?” is decided by an induction: – but here I’ve just constructed a method for forming inductions; and the question is only phrased as it is because it is a matter of constructing inductions. That is, a question is decided by an induction, if I was able to ask about that induction; i.e. if its sign was settled for me from the start, right down to yes and no, so that by calculating I could decide between the two; as I can decide, for instance, whether the remainder in $5 \div 7$ will be equal to the dividend or not. (The use in these cases of the expressions “all . . .” and “there is . . .” has a certain similarity to the use of the word “infinite” in the sentence “Today I bought a ruler with an infinite radius of curvature”.)

The periodicity of $\underline{1} \div 3 = 0 \cdot 3$ decides nothing that had earlier been left open. Even if

1

before the discovery of its periodicity, someone had been looking in vain for a 4 in the development of $1 \div 3$, he still couldn’t have meaningfully asked the question “Is there a 4 in the development of $1 \div 3$?”. That is, *independently of the fact* that he hadn’t actually come upon a 4, we can convince him that he doesn’t have any method of deciding his question. Or we could also say: apart from the result of his activity we could enlighten him as to the grammar of his question and the nature of his search (as we could enlighten a

7 (V): can rest content with this;

9 (V): for the question

8 (V): method of finding out how this was to be decided.

(wie einen heutigen Mathematiker über analoge Probleme). „Aber als Folge der Entdeckung der Periodizität hört er nun doch gewiß auf, nach einer 4 zu suchen! Sie überzeugt ihn also, daß er nie eine finden wird“. – Nein. Die Entdeckung der Periodizität bringt ihn vom Suchen ab, *wenn* er sich nun neu einstellt. Man könnte ihn fragen: „Wie ist es nun, willst Du noch immer nach einer 4 suchen?“ (Oder hat Dich, sozusagen, die Periodizität auf andere Gedanken gebracht.)

Und die Entdeckung der Periodizität ist in Wirklichkeit die Konstruktion eines neuen Zeichens und Kalküls. Denn es ist irreführend ausgedrückt, wenn wir sagen, sie bestehe darin, daß es uns *aufgefallen* sei, daß der erste Rest gleich dem Dividenten ist. Denn hätte man Einen, der die periodische Division nicht kannte, gefragt:¹⁹ ist in dieser Division der erste Rest gleich dem Dividenten, so hätte er natürlich „ja“ gesagt; es wäre ihm also aufgefallen. Aber damit hätte ihm nicht die Periodizität auffallen müssen;²⁰ d.h.: er hätte damit nicht den Kalkül mit den Zeichen $a : b = c$ gefunden.

Ist nicht, was ich hier sage, das,²¹ was Kant damit²² meinte, daß $5 + 7 = 12$ nicht analytisch, sondern synthetisch a priori sei?

19 (V): gefragt,
20 (V): brauchen;

21 (V): sage, immer dasselbe,
22 (V): damit ☞

contemporary mathematician about analogous problems). “But as a result of discovering the periodicity surely he’ll stop looking for a 4! So it convinces him that he’ll never find one.”
 – No. The discovery of the periodicity will dissuade him from looking *if* he now adopts a new frame of mind. We could ask him: “Well, how about it, do you still want to look for a 4?” (Or has the periodicity, so to say, changed your mind?)

And the discovery of the periodicity is really the construction of a new sign and a new calculus. For it is misleading to say that this discovery consists in our having *noticed* that the first remainder is equal to the dividend. For if we had asked someone unacquainted with periodic division: “Is the first remainder in this division equal to the dividend?”, of course he would have answered “Yes”; so he would have noticed this. But in noticing it he wouldn’t have had to notice the periodicity; that is, in noticing it he would not have discovered the calculus with the signs $a \div b = c$.

Isn’t what I’m saying here what^a Kant meant by saying that $5 + 7 = 12$ is not analytic but synthetic *a priori*?

10 (V): here the same as what

Wird aus der Anschreibung des
Rekursionsbeweises *noch ein weiterer
Schluß* auf die Allgemeinheit gezogen,
sagt das Rekursionsschema nicht
schon alles was zu sagen war?

Man sagt für gewöhnlich, die rekursiven Beweise zeigen,¹ daß die algebraischen Gleichungen für alle Kardinalzahlen gelten; aber es kommt hier momentan nicht darauf an, ob dieser Ausdruck glücklich oder schlecht gewählt ist, sondern nur darauf, ob er in allen Fällen die gleiche, klarbestimmte, Bedeutung hat.²

Und ist es da nicht klar, daß die rekursiven Beweise tatsächlich *dasselbe* für alle „bewiesenen“ Gleichungen zeigen?

Und das heißt doch, daß zwischen dem rekursiven Beweis und dem von ihm bewiesenen Satz immer die gleiche (interne) Beziehung besteht?

Es ist ja übrigens ganz klar, daß es so einen rekursiven, oder richtiger, iterativen „Beweis“ geben muß. (Der uns die Einsicht vermittelt, daß es „mit allen Zahlen so gehen muß“.)

|D.h. es scheint *mir* klar, und daß ich einem Anderen die Richtigkeit dieser Sätze für die Kardinalzahlen durch einen Prozeß der Iteration begreiflich machen könnte. |

Wie aber weiß ich $28 + (45 + 17) = (28 + 45) + 17$ ohne es bewiesen zu haben? Wie kann mir ein allgemeiner Beweis einen besonderen Beweis schenken? Denn ich könnte doch den besondern Beweis führen, und wie treffen sich da die beiden Beweise, und wie, wenn sie nicht übereinstimmen?

D.h.: Ich möchte Einem zeigen, daß das *distributive* Gesetz wirklich im Wesen der Anzahl liegt und nicht etwa nur in diesem bestimmten Fall zufällig gilt; werde ich da nicht durch einen Prozeß der Iteration zu zeigen versuchen, daß das Gesetz gilt und immer weiter gelten muß? Ja, – daraus ersehen wir, was wir hier darunter verstehen, daß ein Gesetz für alle Zahlen gelten muß.

Und inwiefern kann man diesen Vorgang nicht einen³ Beweis des (distributiven) Gesetzes nennen?

Und dieser Begriff des „begreiflich-Machens“ ist hier ein Segen.⁴

1 (V): beweisen,

2 (V): gleiche Bedeutung

3 (V): den

4 (V): „begreiflich-Machens“ kann uns hier wirklich helfen // kann uns hier helfen.

Is a Further Inference to Generality Drawn from Writing Down the Recursive Proof? Doesn't the Recursion Schema Already Say all that Needed to be Said?

We commonly say that recursive proofs show¹ that the algebraic equations hold for all cardinal numbers; but here, for the moment, it doesn't matter whether this expression is well or ill chosen; the only thing that matters is whether it has the same clearly defined meaning² in all cases.

And isn't it clear here that recursive proofs really do show *the same thing* for all "proved" equations?

And doesn't that mean that between the recursive proof and the proposition it proves, there is always the same (internal) relation?

It is quite clear, by the way, that there must be a recursive, or more correctly, iterative "proof" of this kind. (A proof conveying the insight that "that's the way it must be with all numbers".)

| That is, it seems clear *to me*; and it also seems clear to me that by a process of iteration I could make the correctness of these theorems for the cardinal numbers comprehensible to someone else. |

But how do I know that $28 + (45 + 17) = (28 + 45) + 17$ without having proved it? How can a general proof give me a particular proof? For after all I could carry out the particular proof, and then how do the two proofs meet? And what happens if they don't agree?

That is: suppose I would like to show someone that the *distributive* law really is part of the nature of number, and doesn't only happen to hold in this particular case; won't I use a process of iteration to try to show that the law holds and must go on holding? Yes – that process shows us what we understand here by a law having to be valid for all numbers.

And to what extent can we not call this process a³ proof of the (distributive) law?

And here this concept of "making something comprehensible" is a blessing.⁴

1 (V): prove

2 (V): the same meaning

3 (V): the

4 (V): "comprehensible" can really help us here. // can help us here.

Denn man könnte sagen: das Kriterium dafür, ob etwas ein Beweis eines Satzes ist, ist, ob man ihn dadurch begrifflich machen kann. (Natürlich handelt es sich da wieder nur um eine Erweiterung unserer grammatischen Betrachtungen des Wortes⁵ „Beweis“; nicht um ein psychologisches Interesse an dem Vorgang des Begriflich-machens.)

675 | „Dieser Satz ist für alle Zahlen durch das rekursive Verfahren bewiesen.“ Das ist der Ausdruck, der so ganz irreführend ist. Es klingt so, als würde hier ein Satz, der konstatiert, daß das und das für alle Kardinalzahlen gilt, auf einem Wege als wahr erwiesen, und als sei dieser Weg ein Weg in einem Raum denkbarer Wege.

Während die Rekursion in Wahrheit nur sich selber zeigt, wie auch die Periodizität nur sich selbst zeigt.⁶

Wir sagen nicht, daß der Satz $f(x)$, wenn $f(1)$ gilt und aus $f(c)$ $f(c + 1)$ folgt, *darum* für alle Kardinalzahlen wahr ist; sondern: „der Satz $f(x)$ gilt für alle Kardinalzahlen“ heißt „er gilt für $x = 1$ und $f(c + 1)$ folgt aus $f(c)$ “.

Und hier ist ja der Zusammenhang mit der Allgemeinheit in endlichen Bereichen ganz klar, denn eben das wäre in einem endlichen Bereich allerdings der Beweis dafür, daß $f(x)$ für alle Werte von x gilt und *eben das* ist der Grund, warum wir auch im arithmetischen Falle sagen, $f(x)$ gelte für alle Zahlen.

Zum mindesten muß ich sagen, daß, welcher Einwand gegen den Beweis B^7 gilt, auch z.B. gegen den der Formel $(a + b)^n = \text{etc.}$ gilt.

Auch hier, müßte ich dann sagen, nehme ich nur eine algebraische Regel in Übereinstimmung mit den Induktionen der Arithmetik an.

$$f(n) \times (a + b) = f(n + 1)$$

$$f(1) = a + b$$

$$\text{also: } f(1) \times (a + b) = (a + b)^2 = f(2)$$

$$\text{also: } f(2) \times (a + b) = (a + b)^3 = f(3) \text{ u.s.w.}$$

676 | Soweit ist es klar. Aber nun: „also $(a + b)^n = f(n)$ “!

Ist denn hier ein weiterer Schluß gezogen? Ist denn hier noch etwas zu konstatieren?

Ich würde aber doch fragen, wenn mir Einer die Formel $(a + b)^n = f(n)$ zeigt: wie ist man denn dazugekommen? Und als Antwort käme doch die Gruppe

$$f(n) \times (a + b) = f(n + 1)$$

$$f(1) = a + b.$$

Ist sie also nicht ein Beweis des algebraischen Satzes? – Oder antwortet sie nicht eher auf die Frage „was bedeutet der algebraische Satz“?

Ich will sagen: hier ist doch mit der Induktion alles erledigt.

Der Satz, daß A für alle Kardinalzahlen gilt, ist eigentlich der Komplex B. Und sein Beweis der Beweis von β und γ . Aber das zeigt auch, daß dieser Satz in einem andern Sinne Satz ist, als eine Gleichung, und dieser⁸ Beweis in andern Sinne Beweis eines Satzes.

Vergiß hier nicht, daß wir nicht erst den Begriff des Satzes haben, dann wissen, daß die Gleichungen mathematische Sätze sind, und dann erkennen, daß es noch andere Arten von mathematischen Sätzen gibt!

5 (V): Betrachtungen über das Wort

6 (V): selber zeigt, wie auch die Periodizität.

7 (E): Vgl. den Anfang von Abschnitt 127.

8 (V): sein

For we could say: the criterion for whether something is a proof of a proposition is whether we can use it for making the proposition comprehensible. (Of course here again it is only a matter of extending our grammatical examinations of⁵ the word “proof”, and not a matter of our taking any psychological interest in the process of making things comprehensible.)

| “This proposition is proved for all numbers by the recursive procedure.” That is the expression that is so very misleading. It sounds as if here a proposition stating that such and such holds for all cardinal numbers were shown to be true by a particular route, and as if this route were a route within a space of conceivable routes.

Whereas in reality recursion shows nothing but itself, just as periodicity too shows nothing but itself.⁶|

We are not saying that when $f(1)$ holds and when $f(c + 1)$ follows from $f(c)$, the proposition $f(x)$ is *therefore* true of all cardinal numbers; but rather: “The proposition $f(x)$ holds for all cardinal numbers” *means* “It holds for $x = 1$, and $f(c + 1)$ follows from $f(c)$ ”.

And here the connection with generality in finite domains is quite clear, for in a finite domain that very thing would indeed be a proof that $f(x)$ holds for all values of x , and *precisely that* is the reason we say in the arithmetical case too that $f(x)$ holds for all numbers.

At least I have to say that whatever objection holds against the proof B^7 holds also, e.g., against the proof of the formula $(a + b)^n = \text{etc.}$

Here too, I would then have to say, I am merely assuming an algebraic rule that agrees with the inductions of arithmetic.

$$f(n) \times (a + b) = f(n + 1)$$

$$f(1) = a + b$$

$$\text{therefore } f(1) \times (a + b) = (a + b)^2 = f(2)$$

$$\text{therefore } f(2) \times (a + b) = (a + b)^3 = f(3), \text{ etc.}$$

So far it's clear. But now: “*therefore* $(a + b)^n = f(n)$ ”!

Has a further inference been drawn here? Is there something else to be ascertained here?

For if someone shows me the formula $(a + b)^n = f(n)$ I would still ask: How was it arrived at? And surely the answer would be: the group

$$f(n) \times (a + b) = f(n + 1)$$

$$f(1) = a + b.$$

So isn't it a proof of the algebraic proposition? – Or isn't it rather an answer to the question “What does the algebraic proposition mean?”

I want to say: Once you've got the induction, it's all been taken care of.

The proposition that A holds for all cardinal numbers is really the complex B. And the proof of that proposition is the proof of β and γ . But that also shows that this proposition is a proposition in a different sense than an equation is, and that this⁸ proof is a proof of a proposition in a different sense.

Don't forget in this context that it isn't that we first of all have the concept of a proposition, and then come to know that equations are mathematical propositions, and still later come to know that there are other kinds of mathematical propositions as well!

5 (V): concerning

6 (V): just as does periodicity.

7 (E): Cf. the beginning of Chapter 127.

8 (V): its

Inwiefern verdient der
Rekursionsbeweis den Namen
eines „Beweises“?¹
Inwiefern ist der Übergang nach
dem Paradigma A durch den Beweis
von B gerechtfertigt?²

Man kann nicht eine Rechnung zum Beweis eines Satzes ernennen.³

Ich möchte sagen: *Muß* man die Induktionsrechnung⁴ den Beweis des Satzes I nennen?⁵
D.h., tut's keine andere Beziehung?

(Die unendliche Schwierigkeit ist die „allseitige Betrachtung“ des Kalküls.)

678 „Der Übergang ist gerechtfertigt“ heißt in einem Falle, daß er nach bestimmten gegebenen Formen vollzogen werden kann. Im andern Fall wäre die Rechtfertigung, daß der Übergang nach Paradigmen geschieht, die selbst eine bestimmte Bedingung befriedigen.

Man denke sich, daß für ein Brettspiel solche Regeln gegeben würden, die aus lauter Wörtern ohne „r“ bestünden, und daß ich eine Regel gerechtfertigt nenne, wenn sie kein „r“ enthält. Wenn nun jemand sagte, er habe für das und das Spiel nur *eine* Regel aufgestellt, nämlich, daß die Züge Regeln entsprechen müßten, die kein „r“ enthalten. – Ist denn das eine Spielregel (im ersten Sinn)? Geht das Spiel nicht doch nach der Klasse von Regeln⁶ vor sich, die nur alle jener ersten Regel entsprechen sollen?

Es macht mir jemand die Konstruktion von B vor und sagt nun, A ist bewiesen. Ich frage: „Wieso? – ich sehe nur, daß Du um A eine Konstruktion mit Hilfe von ρ^7 gemacht hast“. Nun sagt er: „Ja, aber wenn das möglich ist, so sage ich eben, A sei bewiesen“. Darauf antworte ich: „Damit hast Du mir nur gezeigt, welchen neuen Sinn Du mit dem Wort ‚beweisen‘ verbindest“.

1 (O): „Beweises“.

2 (E): Zum Verständnis von „A“ und „B“ siehe die ersten beiden Bemerkungen in Kapitel 127. „A“ steht dort für $a + (b + c) = (a + b) + c$ und „B“ für $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

3 (V): Rechnung als den Beweis eines Satzes bestimmen.

4 (V): man diese Rechnung

5 (E): Aus einer früheren Version dieser Bemerkung (MS 111, S. 161) geht hervor, daß sich „I“ auf „ $a + (b + c) = (a + b) + c$ “ bezieht.

6 (V): nach den Regeln

7 (V): α (E): Bezieht sich wahrscheinlich auf die mit „ ρ “ bezeichneten Zeilen in MS 111, S. 148 (siehe Anhang I).

To what Extent does a
Recursive Proof Deserve
the Name “Proof”?
To what Extent is a Step in
Accordance with the Paradigm A
Justified by the Proof of B?¹

We cannot appoint a calculation to be a² proof of a proposition.

I would like to say: Do we *have to* call the inductive calculation³ the proof of the proposition I?⁴ That is, won't another relationship do?

(What is infinitely difficult is a “comprehensive examination” of the calculus.)

In the one case “This step is justified” means that it can be carried out in accordance with specific forms that have been given. In the other case the justification might be that the step takes place in accordance with paradigms that themselves satisfy a specific condition.

Suppose that for a certain board game rules were given consisting only of words with no “r” in them, and that I called a rule “justified” if it contained no “r”. Now if someone said he had laid down only *one* rule for a certain game, namely, that its moves had to obey rules containing no “r”’s – would *that* be a rule of the game (in the first sense)? Isn't the game played in accordance with the class that the rules belong to⁵, the only proviso being that all of them are supposed to satisfy that first rule?

Someone demonstrates the construction of B for me and then says that A has been proved. I ask “How come? All I see is that you have used ρ^6 to carry out a construction around A”. Then he says “Right, but when that's possible, that's when I say that A has been proved”. To that I answer: “That only shows me what new sense you are attaching to the word ‘prove’.”

1 (E): For the likely referents of “A” and “B”, cf. the first two remarks of Chapter 127. “A” presumably refers to $a + (b + c) = (a + b) + c$, whereas “B” seems to refer to $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

2 (V): cannot stipulate a calculation as being the

3 (V): call this calculation

4 (E): On the basis of an earlier version of this remark in MS 111 (p. 161), it is clear that “I” refers to “ $a + (b + c) = (a + b) + c$ ”.

5 (V): with the rules

6 (V): α (E): Presumably this is a reference to the line(s) labelled “ ρ ” in MS 111, p. 148. They are included here in Appendix I.

In einem Sinn heißt es, daß Du das Paradigma mittels ρ^8 so und so konstruiert hast, in dem andern, nach wie vor, daß eine Gleichung dem Paradigma entspricht.

Wenn wir fragen „ist das ein Beweis oder nicht?“, so bewegen wir uns in der Wortsprache.⁹

679 Nun ist natürlich nichts dagegen einzuwenden, wenn Einer sagt: Wenn die Glieder des Übergangs in einer Konstruktion der und der Art stehen, so sage ich, die Rechtmäßigkeit des Übergangs ist bewiesen.

Was wehrt sich in mir gegen die Auffassung von B als einem Beweis von A? Zuerst entdeckte ich, daß ich den Satz von „allen Kardinalzahlen“ in meiner Rechnung nirgends brauche. Ich habe den Komplex B mit Hilfe von ρ konstruiert und bin dann auf die Gleichung A übergegangen; von „allen Kardinalzahlen“ war dabei keine Rede. (Dieser Satz ist eine Begleitung der Rechnung in der Wortsprache, die mich hier nur¹⁰ verwirren kann.) Aber nicht nur fällt dieser allgemeine Satz überhaupt fort, sondern kein anderer tritt an seine Stelle.

Der Satz, der die Allgemeinheit behauptet, fällt also weg, „es ist nichts *bewiesen*“, „es *folgt* nichts“.

„Ja, aber die Gleichung A folgt, sie steht nun an Stelle des allgemeinen Satzes“. – Ja in wiefern folgt sie denn? Offenbar verwende ich hier „folgt“ in einem ganz andern Sinn, als dem normalen, da das, woraus A folgt, kein Satz ist. Das ist es auch, warum wir fühlen, daß das Wort „folgen“ nicht richtig angewandt ist.

Wenn man sagt „aus dem Komplex B folgt, daß $a + (b + c) = (a + b) + c$ “, so schwindelt Einem. Man fühlt, daß man da auf irgend eine Weise einen Unsinn geredet hat, obwohl es äußerlich richtig klingt.

Daß eine Gleichung folgt, heißt eben schon etwas (hat seine bestimmte Grammatik).

680 Aber wenn ich höre „aus B folgt A“, so möchte ich fragen: „*was* folgt?“ Daß $a + (b + c)$ gleich $(a + b) + c$ ist, ist ja eine Festsetzung, wenn es nicht auf normale Weise aus einer Gleichung folgt.

Wir können unsern Begriff des Folgens dem A und B nicht aufsetzen,¹¹ er paßt hier nicht.

„Ich werde Dir beweisen, daß $a + (b + n) = (a + b) + n$.“ Niemand erwartet sich nun den Komplex B zu sehen. Man erwartet eine andere Regel über a, b und n zu hören, die den Übergang von der einen auf die andere Seite vermittelt. Wenn mir statt dessen B und das Schema R¹² gegeben wird, so kann ich das keinen Beweis nennen, eben weil ich unter Beweis etwas anderes verstehe.

Ja ich werde dann etwa sagen: „Ach so, das nennst Du ‚Beweis‘, ich habe mir vorgestellt . . .“.

Der Beweis von $17 + (18 + 5) = (17 + 18) + 5$ wird allerdings nach dem Schema B geführt und dieser Zahlensatz ist von der Form A. Oder auch: B ist der Beweis des Zahlensatzes; aber eben deshalb nicht von A.

8 (O): α (E): Das ρ , das wir hier eingesetzt haben, findet sich in der handschriftlichen Version dieser Bemerkung (MS 112, S. 35v).

9 (V): in den Formen der Wortsprache.

10 (V): die mich nur

11 (V): des Folgens mit A und B nicht zur Deckung bringen. // des Folgens dem A und B nicht auffassen.

12 (E): Siehe die in Anhang I zitierte Stelle aus MS 111.

In one sense this means that you have used ρ^7 to construct the paradigm in such and such a way; in another, it means, as before, that an equation is in accordance with the paradigm.

If we ask “Is that a proof or not?” we are operating within word-language.⁸

Now of course there can’t be any objection if someone says: When the terms of a step are in a construction of such and such a kind, I say that the legitimacy of the step has been proved.

What is it in me that resists understanding B as a proof of A? First, I discover that nowhere in my calculation do I use the proposition about “all cardinal numbers”. I used ρ to construct the complex B and then I made the step to the equation A; there was no mention of “all cardinal numbers” in that process. (This proposition is an accompaniment of the calculation in word-language, and all it can do here is⁹ confuse me.) But it isn’t just that this universal proposition completely drops out; it’s that no other takes its place.

So the proposition asserting the generalization drops out; “nothing is *proved*”, “nothing *follows*”.

“Right, but the equation A follows; it now takes the place of the general proposition.” – Well, to what extent *does* it follow? Obviously, I’m using “follows” here in a sense quite different from the normal one, because what A follows from isn’t a proposition. And that’s why we feel that the word “follows” hasn’t been applied correctly.

If you say “It follows from the complex B that $a + (b + c) = (a + b) + c$ ”, your head reels. You feel that somehow or other you’ve said something nonsensical although outwardly it sounds right.

That an equation follows, already has a meaning (has its own particular grammar).

But when I hear “A follows from B”, I would like to ask: “*What* follows?” If it doesn’t follow from an equation in the normal way, that $a + (b + c)$ is equal to $(a + b) + c$ is no more than a stipulation.

We can’t impose our concept of following on A and B; it doesn’t fit there.¹⁰

“I will prove to you that $a + (b + n) = (a + b) + n$.” No one then expects to see the complex B. You expect to hear a different rule for a, b, and n that mediates the transition from one side to the other. If instead of that I am given B and the schema R¹¹ I can’t call that a proof, because I understand something different by “proof”.

In that case, I shall say something like “Oh, so that’s what you call a ‘proof’; I had imagined . . .”.

To be sure, the proof of $17 + (18 + 5) = (17 + 18) + 5$ is carried out in accordance with the schema B, and this numerical proposition is of the form A. Or alternatively: B is the proof of the numerical proposition: but for that very reason, it isn’t a proof of A.

7 (O): α (E): The ρ we have included here occurs in the handwritten version of this remark in MS 112, p. 35v.

8 (V): within the forms of word-language.

9 (V): do is

10 (V): We cannot superimpose our concept of following on A and B. // We cannot fit our concept of following onto A and B.

11 (E): Cf. the passage from MS 111 that is included in Appendix I of this book.

„Ich werde Dir A_I ,¹³ A_{II} , A_{III} ¹⁴ aus *einem*¹⁵ Satz ableiten“. – Man denkt dabei natürlich an eine Ableitung, wie sie *mit Hilfe* dieser Sätze gemacht wird. – Man denkt, es wird eine Art von kleineren Kettengliedern gegeben werden, durch die wir alle diese großen ersetzen können.

Und da haben wir doch ein bestimmtes Bild; und es wird uns etwas ganz Anderes geboten.

681 Die Gleichung wird durch den induktiven Beweis, quasi, der Quere, statt der Länge nach zusammengesetzt.

Wenn wir nun die Ableitung rechnen,¹⁶ so kommen wir endlich zu dem Punkt, wo die Konstruktion von B vollendet ist. Aber hier heißt es nun „also gilt diese Gleichung“. Aber diese Worte heißen ja nun etwas anderes als, wo wir sonst eine Gleichung aus Gleichungen folgern. Die Worte „die Gleichung folgt daraus“ haben ja schon eine Bedeutung. Und hier wird eine Gleichung allerdings konstruiert, aber nach einem andern Prinzip.

Wenn ich sage „aus dem Komplex folgt die Gleichung“, so „folgt“ hier eine Gleichung aus etwas, was gar keine Gleichung ist.

Man kann nicht sagen: die Gleichung, wenn sie aus B folgt, folge doch aus einem Satz, nämlich aus α & β & γ ; denn es kommt eben darauf an, *wie* ich¹⁷ aus diesem Satz A erhalte; ob nach einer Regel des Folgens. Welches die Verwandtschaft der Gleichung zum Satz α & β & γ ist. (Die Regel, die in diesem Falle zu A führt macht gleichsam einen Querschnitt durch α & β & γ , sie faßt den Satz anders auf, als eine Regel des Folgens.)

Wenn uns die Ableitung von A aus α versprochen war und wir sehen nun den Übergang von B auf A, so möchten wir sagen: „ach, so war es nicht gemeint“. So, als hätte jemand mir versprochen, er werde mir etwas schenken und nun sagt er: so, jetzt schenke ich Dir mein Vertrauen.¹⁸

682 Darin, daß der Übergang von B auf A kein Folgen ist, liegt auch, was ich damit meinte, daß nicht das logische Produkt α & β & γ die Allgemeinheit ausdrückt.

Ich sage, $(a + b)^2 = etc.$ ist mit Hilfe von A_I , A_{II} , etc. bewiesen, weil die Übergänge von $(a + b)^2$ zu $a^2 + 2ab + b^2$ alle von der Form A_I , oder A_{II} , etc., sind. In diesem Sinne ist in III auch der Übergang von $(b + 1) + a$ auf $(b + a) + 1$ nach A_I gemacht, aber nicht der Übergang von $a + n$ auf $n + a$!

Daß man sagt „die Richtigkeit der Gleichung ist bewiesen“, zeigt schon, daß Beweis nicht jede Konstruktion der Gleichung ist.¹⁹

Es zeigt mir jemand die Komplexe B und ich sage „das sind keine Beweise der Gleichungen A“. Nun sagt er: „Du siehst aber noch nicht das System, nach dem diese Komplexe gebildet sind“, und macht mich darauf aufmerksam.²⁰ Wie konnte das die B zu Beweisen²¹ machen? –

Durch diese Einsicht steige ich in eine andere, sozusagen höhere, Ebene; während der *Beweis* auf der tieferen geführt werden müßte.²²

13 (V): A_I , ~~an d~~

14 (E): Siehe die in Anhang I zitierte Stelle aus MS 111.

15 (V): aus dem *einen*

16 (V): ausführen,

17 (V): ich *sie*

18 (V): Dir meine Zeit.

19 (V): nicht jede Ableitung // Konstruktion // ist.

20 (V): und zeigt es mir.

21 (O): beweisen

22 (V): tieferen hätte geführt werden müssen.

“I will derive A_I, A_{II}, A_{III} ¹² from a *single*¹³ proposition”. – In this context one is, of course, thinking of a derivation of the kind that is made *using* these propositions. – We think we shall be given smaller links of some kind that we can use to replace all these large ones in the chain.

Here we have a particular picture in mind; and we are offered something quite different.

The inductive proof puts the equation together crosswise, as it were, instead of lengthwise.

Now when we figure out¹⁴ the derivation, we finally come to the point at which the construction of B has been completed. And at this point we say “Therefore this equation holds”. But now these words mean something different from when we otherwise deduce an equation from equations. The words “The equation follows from it” already *have* a meaning. And an equation *is* constructed here, but according to a different principle.

If I say “The equation follows from the complex”, then here an equation “follows” from something that is not an equation at all.

We can’t say: if the equation follows from B, then it follows from a proposition, namely from α & β & γ ; for what matters is *how* I get A from that proposition; whether I do so in accordance with a rule of inference; and what the relationship of the equation is to the proposition α & β & γ . (The rule leading to A in this case makes a cross-section, as it were, through α & β & γ ; it views the proposition differently from the way a rule of inference does.)

If we had been promised a derivation of A from α and now we see the step from B to A, we feel like saying “Oh, that isn’t the way it was meant”. As if someone had promised to give me a gift, and then he says: Here, now I’m giving you my trust.¹⁵

The fact that the step from B to A is not an inference also indicates what I meant when I said that it isn’t the logical product α & β & γ that expresses the generalization.

I say that $(a + b)^2 = \text{etc.}$ has been proved using A_I, A_{II} , etc., because the steps from $(a + b)^2$ to $a^2 + 2ab + b^2$ are all of the form A_I or A_{II} , etc. In this sense the step in III from $(b + 1) + a$ to $(b + a) + 1$ has also been made in accordance with A, but the step from $a + n$ to $n + a$ hasn’t!

The fact that we say “*the correctness* of the equation has been proved” already shows that not every construction of the equation is¹⁶ a proof.

Someone shows me the complexes B and I say “They are not proofs of the equations A”. Then he says: “But you haven’t yet seen the system according to which these complexes have been constructed”, and he points it out to me.¹⁷ How could that turn the B’s into proofs? –

Through this insight I ascend to another, as it were higher, level; whereas a *proof* would have to be¹⁸ carried out on a lower level.

12 (E): Cf. the passage from MS 111 that is included in Appendix I of this book.

13 (V): from the *one*

14 (V): we carry out

15 (V): time.

16 (V): not every derivation // construction // is

17 (V): and he shows it to me.

18 (V): have to have been

Nur ein bestimmter Übergang von Gleichungen zu einer Gleichung ist ein Beweis dieser letzteren. Dieser findet hier nicht statt²³ und alles Andere kann B nicht mehr zum Beweis von A machen.²⁴

683 Aber kann ich eben nicht sagen, daß, wenn ich dies über A bewiesen habe, ich damit A bewiesen habe? Und woher kam dann überhaupt die Täuschung, daß ich es dadurch bewiesen hätte? denn diese muß doch einen tieferen Grund haben.

Nun, wenn es eine Täuschung ist, so kam sie jedenfalls von unserer Ausdrucksweise in der Wortsprache her „dieser Satz gilt für *alle* Zahlen“; denn der algebraische Satz war ja nach dieser Auffassung nur eine andere Schreibweise dieses Satzes (der Wortsprache). Und diese Ausdrucksweise ließ den Fall *aller* Zahlen mit dem Fall „aller Menschen in diesem Zimmer“ verwechseln. (Während wir, um die Fälle zu unterscheiden, fragen: Wie verifiziert man den einen und wie den andern.)

Wenn ich mir die Funktionen ϕ, ψ, F exakt definiert²⁵ denke und nun das Schema des Induktionsbeweises schreibe, -

$$\begin{array}{c}
 R \\
 B \left\{ \begin{array}{l} \alpha \quad \phi(1) = \psi(1) \\ \beta \quad \phi(c + 1) = F(\phi(c)) \\ \gamma \quad \psi(c + 1) = F(\psi(c)) \end{array} \right\} \dots \phi n = \psi n \quad A
 \end{array}$$

²⁶auch dann kann ich nicht sagen, der Übergang von ϕn auf ψn sei auf Grund von ρ gemacht worden (wenn der Übergang in α, β, γ nach ρ gemacht wurde – in speziellen Fällen $\rho = \alpha$). Er bleibt der Gleichung A entsprechend gemacht und ich könnte nur sagen, er entspreche dem Komplex B, wenn ich nämlich diesen als ein anderes Zeichen statt der Gleichung A auffasse.

Denn das Schema des Übergangs mußte ja α, β und γ enthalten.

684 Tatsächlich ist R nicht das Schema des Induktionsbeweises B_{III} ; dieses ist viel komplizierter, da es das Schema B_I enthalten muß.

Es ist nur dann nicht ratsam, etwas „Beweis“ zu nennen, wenn die übliche Grammatik des Wortes „Beweis“ mit der Grammatik des betrachteten Gegenstandes nicht übereinstimmt.

Die tiefgehende Beunruhigung rührt am Schluß von einem kleinen, aber offen zu Tage liegenden Zug des überkommenen Ausdrucks her.

Was heißt es, daß R den Übergang von der Form A^{27} rechtfertigt? Es heißt wohl, daß ich mich entschieden habe, nur solche Übergänge in meinem Kalkül zuzulassen, denen ein Schema B entspricht, dessen Sätze α, β, γ wieder aus²⁸ ρ ableitbar sein sollen. (Und das hieße natürlich nichts anderes, als daß ich nur die Übergänge A_I, A_{II} , etc. zuließe und diesen Schemata B entsprächen.) Richtiger wäre es, zu schreiben „und diesen Schemata der Form R entsprechen“. Ich wollte mit dem Nachsatz in der Klammer sagen, der Schein der Allgemeinheit – ich meine, der Allgemeinheit des Begriffs der Induktionsmethode – ist unnötig, denn es kommt am Schluß doch nur darauf hinaus, daß die speziellen Konstruktionen B_I, B_{II} , etc. um die Seiten der Gleichungen A_I, A_{II} , etc. konstruiert wurden.

23 (V): Dieser ist hier nicht gemacht

24 (V): kann auf die Sprache keinen Einfluß (mehr) haben.

25 (V): bestimmt

26 (F): MS 112, S. 57r.

27 (V): den Übergang A

28 (V): nach

Only a definite transition to one equation from multiple equations is a proof of that equation. This definite transition doesn't take place here,¹⁹ and nothing else suffices to turn B into a proof of A.²⁰

But can't I say that if I have proved this about A, I have thereby proved A? And if not, then where then did the illusion come from that in doing this I had proved it? For surely there must be some deeper reason for this illusion.

Well, if it is an illusion, in any case it arose from our mode of expression in word-language, “This proposition holds for *all* numbers”; for according to this view the algebraic proposition was only another way of writing the proposition (of word-language). And this form of expression allowed the case of *all* the numbers to be confused with the case of “all the people in this room”. (Whereas to distinguish the cases, we ask: How does one verify the one, and how the other?)

If I imagine the functions ϕ, ψ, F as defined²¹ exactly and then write the schema for the inductive proof:

$$\begin{array}{c}
 R \\
 B \left\{ \begin{array}{l} \alpha \quad \phi(1) = \psi(1) \\ \beta \quad \phi(c + 1) = F(\phi(c)) \\ \gamma \quad \psi(c + 1) = F(\psi(c)) \end{array} \right\} \dots \phi n = \psi n \quad A
 \end{array}$$

²²even then I can't say that the step from ϕr to ψr was taken on the basis of ρ (i.e. if the step in α, β, γ was made in accordance with ρ – in particular cases $\rho = \alpha$). The step is still made in accordance with the equation A, and I can only say that the step corresponds to the complex B if I regard that complex as another sign in place of the equation A.

For of course the schema for the step had to contain α, β and γ .

In fact R isn't the schema for the inductive proof B_{III} ; that is much more complicated, since it has to contain the schema B_I .

The only time it is inadvisable to call something a “proof” is when the usual grammar of the word “proof” doesn't accord with the grammar of the object under consideration.

In the last analysis our profound uneasiness stems from a small but obvious feature of the conventional expression.

What does it mean, that R justifies a step of the form A^{23} No doubt it means that I have decided to allow in my calculus only those steps to which there corresponds a schema B, and whose propositions α, β, γ are supposed to be derivable from²⁴ ρ . (And of course that would only mean that I was allowing just the steps A_I, A_{II} , etc., and that schemata B corresponded to them). It would be more accurate to write “and that schemata of the form R correspond to them”. The sentence added in parentheses was intended to say that the appearance of generality – I mean of the generality of the concept of the inductive method – is unnecessary, for in the end all of this only amounts to the fact that the particular constructions B_I, B_{II} , etc. were constructed flanking the equations A_I, A_{II} , etc. Or that it is superfluous to pick out the common feature of these constructions at that point; all that

19 (V): This definite transition isn't made here,

22 (F): MS 112, p. 57r.

20 (V): nothing else can have any (more) influence on language.

23 (V): justifies a transition A?

21 (V): determined

24 (V): derivable according to

Oder: es ist ein Luxus, dann noch das Gemeinsame dieser Konstruktionen zu erkennen; alles was maßgebend ist, sind *diese* Konstruktionen (selber). Denn alles, was da steht, sind *diese* Beweise. Und der Begriff, unter den die Beweise fallen, ist überflüssig, denn wir haben nie etwas mit ihm gemacht. Wie der Begriff Sessel überflüssig ist, wenn ich nur – auf die Gegenstände weisend – sagen will „stelle dies und dies und dies in mein Zimmer“ (obwohl die drei Gegenstände Sessel sind). (Und eignen sich diese Geräte nicht, um darauf zu sitzen, so wird das dadurch nicht anders, daß man auf eine Ähnlichkeit zwischen ihnen aufmerksam macht.) Das heißt aber nichts anderes, als daß der einzelne Beweis unsere Anerkennung als solchen braucht (wenn „Beweis“ bedeuten soll, was es bedeutet); hat er die nicht, so kann keine Entdeckung einer Analogie mit anderen solchen Gebilden sie ihm verschaffen.²⁹ Und der Schein des Beweises entsteht dadurch, daß α , β , γ und A Gleichungen sind, und daß eine allgemeine Regel gegeben werden kann, nach der man aus B A bilden (und es in diesem Sinne ableiten) kann.

Auf diese *allgemeine Regel* kann man *nachträglich* aufmerksam werden. (Wird man nun dadurch aber *darauf* aufmerksam, daß die B doch in Wirklichkeit Beweise der A sind?) Man wird da auf eine Regel aufmerksam, mit der man hätte beginnen können und mittels der und α man A_I , A_{II} etc. hätte konstruieren³⁰ können. Niemand aber würde sie in diesem Spiel einen Beweis genannt haben.

Woher dieser Konflikt: „Das ist doch kein Beweis!“ – „das ist doch ein Beweis!“?

686 Man könnte sagen: Es ist wohl wahr, ich zeichne im Beweis von B mittels α die Konturen der Gleichung A nach,³¹ aber nicht auf die Weise, die ich nenne „A³² mittels α beweisen“.

Die Schwierigkeit, die in dieser³³ Betrachtung zu überwinden ist³⁴ ist, den Induktionsbeweis als etwas Neues, sozusagen, *naiv* zu betrachten.

Wenn wir also oben sagten, wir können mit R beginnen, so ist dieses Beginnen mit R in gewisser Weise Humbug. Es ist nicht so, wie wenn ich eine Rechnung mit der Ausrechnung von 526×718 beginne. Denn hier ist diese Problemstellung der Anfangspunkt eines Weges. Während ich dort das R sofort wieder verlasse und wo anders beginnen muß. Und wenn es geschehen ist, daß ich einen Komplex von der Form R konstruiert habe, dann ist es wieder gleichgültig, ob ich mir das früher äußerlich vorgesetzt habe, weil mir dieser Vorsatz, mathematisch (gesprochen), d.h. im Kalkül, doch nichts geholfen hat. Es bleibt also bei der Tatsache, daß ich jetzt einen Komplex von der Form R vor mir habe.

Wir könnten uns denken, wir kennen nur den Beweis B_I ³⁵ und würden nun sagen: Alles, was wir haben, ist diese Konstruktion. Von einer Analogie dieser mit anderen Konstruktionen, von einem allgemeinen Prinzip bei der Ausführung dieser Konstruktionen, ist gar keine Rede. – Wenn ich nun so B und A sehe, muß ich fragen: warum nennst Du das aber einen Beweis gerade von A_I ? (ich frage noch nicht: warum nennst Du es einen Beweis von A). Was hat dieser Komplex mit A_I zu tun? Als Antwort muß er mich auf die Beziehung zwischen A und B aufmerksam machen, die in V ausgedrückt ist.³⁶

29 (V): geben.

30 (V): bauen

31 (V): von B die Konturen der Gleichung A mittels α nach,

32 (V): nenne, „A

33 (V): die durch diese

34 (V): Betrachtung überwunden werden soll

35 (V): B_I mit d

36 (E): Im Manuskript (MS 112, S. 45r) erscheint „V“, einige Seiten vor der vorliegenden Bemerkung, als Kurzbezeichnung für eine längere Formel. Wir haben sie in Anhang I wiedergegeben.

is relevant are *those* constructions (themselves). For *these* proofs are all that is there. And the concept under which the proofs fall is superfluous, because we never did anything with it. Just as the concept “chair” is superfluous if – pointing to the objects – all I want to say is “Put that and that and that in my room” (even though the three objects are chairs). (And if those devices aren’t suitable for sitting on, then that doesn’t change by someone’s drawing attention to a similarity between them.) But that only means that the individual proof needs our acknowledgment of it as such (if “proof” is to mean what it means); and if it doesn’t have it, no discovery of an analogy with other such constructions can provide such an acknowledgment for it.²⁵ The reason it looks like a proof is that α , β , γ and A are equations, and that a general rule can be given, according to which we can construct (and in that sense derive) A from B.

After the event we might become aware of this *general rule*. (But does that then make us aware that the B’s are really proofs of the A’s?) What we become aware of is a rule we might have started with, and using which (in conjunction with α) we could have constructed²⁶ A_I, A_{II}, etc. But no one would have called it a proof in this game.

Whence this conflict: “But that isn’t any proof!” – “But that *is* a proof.”?

We could say: It’s no doubt true that in proving B, I use α to trace the contours of the equation A, but not in the way I call “proving A by α ”.²⁷

The difficulty that has to be²⁸ overcome in this²⁹ investigation is the difficulty of looking at the proof by induction as something new, *naively*, as it were.

So when we said above that we could begin with R, this beginning with R is, in a way, *humbug*. It isn’t like beginning a calculation by calculating 526×718 . For in the latter case this setting out of the problem is the starting point of a journey, whereas in the former case I immediately abandon the R and have to begin somewhere else. And when it turns out that I’ve constructed a complex of the form R, it is again immaterial whether I explicitly set out to do this earlier, since mathematically speaking, i.e. in the calculus, this intention didn’t help me. So what remains is the fact that I now have a complex of the form R in front of me.

We could imagine we were acquainted only with the proof B_I, and then we would say: All we have is this construction. There is no mention whatever of an analogy between this and other constructions, or of a general principle in carrying out these constructions. – Now if I see B and A like this I have to ask: But why do you call that a proof specifically of A_I? – (I am not yet asking: Why do you call it a *proof* of A?) What does this complex have to do with A_I? In answering he’ll have to point out to me the relation between A and B which is expressed in V.³⁰

25 (V): can give it to it.

26 (V): built

27 (V): say: It’s no doubt true that in proving B, I trace the contours of the equation A, but not in the way I call “proving A by α ”.

28 (V): that should be

29 (V): overcome through this

30 (E): In the manuscript source (MS 112, p. 45r) “V” appears a few pages before this remark, as a designation for a lengthy formula. We have included this formula here in Appendix I.

Es zeigt uns jemand B_1 und erklärt uns den Zusammenhang mit A_1 , d.i., daß die rechte Seite von A so und so erhalten wurde, etc. etc. Wir verstehen ihn; und er fragt uns (nun): ist nun das ein Beweis von A? Wir werden³⁷ antworten: gewiß *nicht*!

Hatten wir nun alles verstanden, was über diesen Beweis zu verstehen war? Ja. Hatten wir auch die allgemeine Form des Zusammenhangs von B und A gesehen? Ja!

Und wir könnten auch daraus schließen, daß man so aus jedem A ein B konstruieren kann *und also auch umgekehrt A aus B*.

Dieser Beweis ist nach einem bestimmten Plan gebaut (nach dem noch andere Beweise gebaut sind). Aber dieser Plan kann den Beweis nicht zum Beweis machen. Denn wir haben jetzt hier nur die eine Verkörperung dieses Planes, und können von dem Plan als allgemeinem Begriff (*ganz*) absehen. Der Beweis muß für sich sprechen und der Plan ist nur in ihm verkörpert, aber selbst kein Instrument³⁸ des Beweises. (Das wollte ich immer sagen.) Daher nützt es mir³⁹ nichts, wenn man mich auf die Ähnlichkeiten zwischen Beweisen aufmerksam macht, um mich davon zu überzeugen, daß sie Beweise sind.

688 Ist nicht unser Prinzip: kein *Begriffswort*⁴⁰ zu verwenden, wo keines⁴¹ nötig ist? – D.h. die Fälle, in denen das Begriffswort in Wirklichkeit für eine Aufzählung⁴² steht, als solche zu erklären.⁴³

Wenn ich nun früher sagte „das ist doch kein Beweis“, so meinte ich „Beweis“ in einem bereits festgelegten⁴⁴ Sinne, in welchem es aus A und B allein zu ersehen ist. Denn in diesem Sinne kann ich sagen: Ich verstehe doch ganz genau, was B tut und in welchem Verhältnis es zu A steht. Jede weitere Belehrung ist überflüssig und das, was da ist, ist kein Beweis.⁴⁵ In diesem Sinne habe ich es nur mit B und A allein zu tun; ich sehe außer ihnen nichts und nichts anderes geht mich an.

Dabei sehe ich das Verhältnis nach der Regel V sehr wohl,⁴⁶ aber es kommt für mich als *Konstruktionsbehelf* gar nicht in Frage. Sagte mir jemand, während meiner Betrachtung von B und A, daß man auch hätte B aus A (oder umgekehrt) nach einer Regel konstruieren können, so könnte ich ihm nur sagen „komm’ mir nicht mit unwesentlichen Sachen“. Denn das ist ja selbstverständlich, und ich sehe sofort, daß es B nicht zu einem Beweis von A macht. Denn diese allgemeine Regel könnte nur zeigen,⁴⁷ daß B der Beweis *gerade von A*⁴⁸ ist, wenn es überhaupt ein Beweis wäre. D.h., daß der Zusammenhang zwischen B und A einer Regel gemäß ist, kann nicht zeigen, daß B ein *Beweis* von A ist. Und jeder solche Zusammenhang könnte zur Konstruktion von B aus A (und umgekehrt) benützt werden.

689 Wenn ich also sagte „V⁴⁹ wird ja gar nicht zur Konstruktion benützt, also haben wir mit ihm nichts zu tun“, so hätte es heißen müssen: Ich habe es doch nur mit A und B allein zu tun. Es genügt doch, wenn ich A und B miteinander konfrontiere und nun frage „ist B ein Beweis von A“; und also brauche ich A nicht aus B nach einer vorher festgelegten Regel zu konstruieren, sondern es genügt, daß ich die einzelnen A – wie viele es sind – den

37 (V): würden

38 (V): kein Bestandteil

39 (O): mich

40 (V): Prinzip: keinen *Begriff*

41 (V): keiner

42 (V): Liste

43 (V): – D.h. die Fälle zu zeigen, in denen das Begriffswort in Wirklichkeit für eine Liste // Aufzählung // steht. // – D.h. in den Fällen, in

denen das Begriffswort für eine Liste steht, dies klar zu machen.

44 (O): festgelegtem

45 (V): und *das* ist kein Beweis.

46 (V): gut,

47 (V): Denn, daß es so eine allgemeine Regel gibt, könnte nur zeigen,

48 (V): der Beweis *von A und keinem andern Satz*

49 (V): „R

Someone shows us B_1 and explains the connection with A_1 , that is, that the right side of A was obtained in such and such a way, etc., etc. We understand him; and (then) he asks us: Now, is that a proof of A ? We will³¹ answer: Certainly *not*!

Now had we understood everything there was to understand about this proof? Yes. Had we also seen the general form of the connection between B and A ? Yes!

And we could also infer from this that in this way we can construct a B from every A , and therefore conversely an A from every B .

This proof has been constructed according to a certain plan (a plan according to which further proofs have also been constructed). But this plan cannot make the proof a proof. For all we have here is the one embodiment of this plan, and we can (completely) disregard the plan as a general concept. The proof has to speak for itself and the plan is only embodied in it, but isn't itself an instrument³² of the proof. (That's what I've been wanting to say all along). Therefore it's of no use to me if someone draws my attention to the similarities between proofs in order to convince me that they are proofs.

Isn't our principle: not to use a *concept-word*³³ where none is necessary? – That is, in cases where the concept-word really stands for an enumeration,³⁴ to say as much.³⁵

Now when I said earlier “But that isn't a proof”, I meant “proof” in an already established sense in which its being a proof can be gathered from A and B alone. For in this sense I can say: But I understand precisely what B does and what relationship it has to A . All further instruction is superfluous, and what is there³⁶ is no proof. In this sense I am concerned only with B and A ; I don't see anything other than them, and nothing else concerns me.

In this context, I certainly do see the relationship in accordance with the rule V , but it is completely out of the question for me as an *aid in construction*. If someone told me while I was examining B and A that we also could have constructed B from A (or conversely) according to a rule, I could only say to him “Don't bother me with irrelevancies”. For of course that goes without saying, and I see immediately that it doesn't make B a proof of A . For this general rule³⁷ could only show that B is a proof *specifically of A* ,³⁸ if it were a proof at all. That means that the fact that the connection between B and A is in accordance with a rule can't show that B is a *proof* of A . And every such connection could be used to construct B from A (and conversely).

So when I said “ V ³⁹ isn't even used for the construction, so we have nothing to do with it” I should have said: After all, I'm only dealing with A and B . It is surely enough if I confront A and B with each other and then ask: “Is B a proof of A ?” And so I don't need to construct A from B according to a previously established rule; it's sufficient for me to place the particular A 's – however many there are – in confrontation with particular B 's.

31 (V): would

32 (V): itself a component

33 (V): *concept*

34 (V): for a list,

35 (V): – That is, to point out the cases in which the concept-word really stands for a list // an

enumeration. // – That is, in cases where the concept-word stands for a list, to make this clear.

36 (V): and *that*

37 (V): For that there is such a general rule

38 (V): *proof of A and no other proposition*,

39 (V): “R

einzelnen B gegenüberstelle. Ich brauche eine Konstruktionsregel nicht; und das ist wahr. Ich brauche eine vorher aufgestellte Konstruktionsregel nicht (aus der ich dann erst die A gewonnen hätte).

Ich meine: Im Skolem'schen Kalkül *brauchen* wir keinen solchen Begriff,⁵⁰ *es*⁵¹ *genügt* die Liste.

Es geht uns nichts verloren, wenn wir nicht sagen „wir haben die Grundgesetze A auf diese Weise bewiesen“,⁵² sondern bloß zeigen, daß sich ihnen – in gewisser Beziehung analoge – Konstruktionen zuordnen lassen.

Der Begriff der Allgemeinheit (und der Rekursion), der in diesen Beweisen gebraucht wird, ist nicht allgemeiner, als er aus diesen Beweisen unmittelbar herauszulesen ist.

690 Die Klammer } in R, welche α , β , und γ zusammenhält, kann weiter nichts bedeuten, als daß wir den Übergang in A (oder einem von der Form A) als berechtigt ansehen, wenn die Glieder (Seiten) des Übergangs in einer, durch das Schema B charakterisierten Beziehung, zu einander stehen. Es nimmt dann B den Platz von A. Und wie es früher hieß: der Übergang ist in meinem Kalkül erlaubt, wenn er einem der A entspricht, so heißt es jetzt:⁵³ er ist erlaubt, wenn er einem der B entspricht.

Damit aber hätten wir noch keine Vereinfachung, keine Reduktion gewonnen.

Der Gleichungskalkül ist gegeben. In diesem Kalkül hat „Beweis“ eine fixe⁵⁴ Bedeutung. Nenne ich nun auch die induktive Rechnung einen Beweis, so erspart mir dieser Beweis doch nicht die Kontrolle, ob die Übergänge der Gleichungskette, nach *diesen* bestimmten Regeln (oder Paradigmen) gemacht sind. Ist das der Fall, so sage ich, die letzte Gleichung der Kette sei bewiesen; oder auch, die Gleichungskette stimme.

691 Denken wir uns, wir kontrollieren die Rechnung $(a + b)^3 = \dots$ auf die erste⁵⁵ Weise und beim ersten Übergang sagt er: „ja, dieser Übergang geschieht zwar⁵⁶ nach $a \cdot (b + c) = ab + ac$, aber stimmt das auch?“ Und nun zeigten wir ihm die Ableitung dieser Gleichung im induktiven Sinne. –

In einer Bedeutung heißt die Frage „stimmt die Gleichung“:⁵⁷ läßt sie sich nach den Paradigmen herleiten? – Im andern Fall heißt es: lassen sich die Gleichungen α , β , γ nach dem Paradigma (oder den Paradigmen) herleiten? – Und hier haben wir die beiden Bedeutungen der Frage (oder des Wortes „Beweis“) auf *eine* Ebene gestellt (in *einem* System ausgedrückt) und können sie nun vergleichen (und sehen, daß sie nicht Eines sind).

Und zwar leistet dieser neue Beweis nicht, was man annehmen könnte, daß er nämlich den Kalkül auf eine engere⁵⁸ Grundlage setzte – wie es etwa geschieht, wenn wir durch $p \mid q \mid p \vee q$ und $\sim p$ ersetzen, oder die Zahl der Axiome vermindern. Denn, wenn man nun sagt, man habe alle die Grundgleichungen A aus ρ allein abgeleitet, so heißt hier das Wort „abgeleitet“ etwas (ganz) andres. (Was man sich bei dieser Versprechung erwartet, ist die Ersetzung der großen Kettenglieder durch kleinere, nicht durch zwei halbe Kettenglieder.) Und in einem Sinne hat man durch diese Ableitungen alles beim alten gelassen. Denn es bleibt im neuen Kalkül ein Kettenglied des alten wesentlich als ein

50 (V): *brauchen* wir diesen Begriff nicht,

51 (V): **es**

52 (V): „wir haben die Grundgesetze A bewiesen“,

53 (V): so kann es jetzt heißen:

54 (V): festgelegte

55 (V): = . . . in der ersten

56 (V): (wohl)

57 (O): stimmt die Gleichung G“:

58 (V): kleinere

I don’t need a construction rule; and that’s the truth. I don’t need a previously established construction rule (from which only then could I have obtained the A’s).

What I mean is: in Skolem’s calculus we don’t *need* any such concept;⁴⁰ the list is *sufficient*.

We lose nothing if instead of saying “We have proved the fundamental laws A in this fashion”,⁴¹ we merely show that constructions that are analogous to them in certain respects can be coordinated with them.

The concept of generality (and of recursion) used in these proofs has no greater generality than can be read immediately from these proofs.

The brace } in R that unites α , β , and γ can’t mean any more than that we regard the step in A (or a step of the form A) as justified if the terms (sides) of the step are in a relation to each other characterized by the schema B. B then takes the place of A. And just as before we said: the step is permitted in my calculus if it corresponds to one of the A’s, so we now say:⁴² it is permitted if it corresponds to one of the B’s.

But that still wouldn’t have gained us any simplification or reduction.

The calculus of equations has been given. In that calculus “proof” has a fixed meaning.⁴³ Even if I now call the inductive calculation a proof, this proof still doesn’t spare me from checking whether the steps in the chain of equations have been taken in accordance with *these* particular rules (or paradigms). If they have been, I say that the last equation of the chain has been proved, or alternatively, that the chain of equations is correct.

Suppose that we were using the first method to check the calculation $(a + b)^3 = \dots$, and at the first step someone said: “To be sure, that step is being taken in accordance with $a \cdot (b + c) = ab + ac$, but is that really correct?” And now we were to show him the inductive derivation of that equation. –

One meaning of the question “Is the equation correct?”⁴⁴ is: Can it be derived in accordance with the paradigms? – Another is: Can the equations α , β , and γ be derived in accordance with the paradigm (or the paradigms?) – And here we have put the two meanings of the question (or of the word “proof”) on the *same* level (expressed them in a *single* system) and can now compare them (and see that they are not the same).

Specifically, this new proof doesn’t produce what you might expect, i.e. it doesn’t set the calculus on a narrower⁴⁵ foundation – as happens, for example, if we replace $p \vee q$ and $\sim p$ by $p \mid q$, or reduce the number of axioms. For if we now say that all the basic equations A have been derived from p alone, then the word “derived” here means something (entirely) different. (What we expect, given this promise, is for the big links in the chain to be replaced by smaller ones, not by two half links.) And in one sense these derivations have left everything as it was. For in the new calculus a link of the old chain continues in essence to

40 (V): *need* this concept;

41 (V): fundamental laws A”,

42 (V): now can say:

43 (V): has an established meaning.

44 (O): equation G correct?”

45 (V): smaller

solches bestehn. Die alte Struktur wird *nicht* aufgelöst. So daß man sagen muß, der alte Gang des Beweises bleibt bestehen. Und es bleibt im *alten* Sinne auch die Unreduzierbarkeit.

692 Man kann daher auch nicht sagen, Skolem habe das algebraische System auf eine kleinere Grundlage gesetzt, denn er hat es in einem andern Sinne als dem der Algebra „begründet“.⁵⁹

Wird ein Zusammenhang der A durch die Induktionsbeweise mittels α gezeigt und ist dies nicht das Zeichen dafür, daß wir es hier doch mit Beweisen zu tun haben? – Es wird nicht *der* Zusammenhang gezeigt, den ein Zerlegen der Übergänge A in Übergänge ρ herstellen würde. Und *ein* Zusammenhang der A ist ja schon vor jedem Beweis zu sehen.

Ich kann die Regel R

$$\left[\begin{array}{ll} a + (1 + 1) & (a + 1) + 1 \\ a + (\xi + 1) & = (a + \xi) + 1 \\ a + ((\xi + 1) + 1) & ((a + \xi) + 1) + 1 \end{array} \right] \dots R$$

auch⁶⁰ so schreiben:

$$\left[\begin{array}{ll} a + (1 + 1) & (a + 1) + 1 \\ a + (\xi + 1) & = (a + \xi) + 1 \\ a + ((\xi + 1) + 1) & (a + (\xi + 1)) + 1 \end{array} \right] \dots S$$

⁶¹oder auch so:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

wenn ich R oder S als Erklärung oder Ersatz für diese Form nehme.

Wenn ich nun sage, in

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \quad a + (b + 1) = (a + b) + 1 \\ \beta \quad a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c)) + 1 \\ \gamma \quad (a + b) + (c + 1) = ((a + b) + c) + 1 \end{array} \right\} \dots B$$

⁶²seien die Übergänge durch die Regel R gerechtfertigt, – so kann man mir drauf antworten: „Wenn Du das eine Rechtfertigung nennst, so hast Du die Übergänge gerechtfertigt. Du hättest uns aber ebensoviel gesagt, wenn Du uns nur auf die Regel R und ihre formale Beziehung zu α (oder zu α , β und γ) aufmerksam gemacht hättest.“

693

Ich hätte also auch sagen können: Ich nehme die Regel R in der und der Weise als Paradigma meiner Übergänge.

Wenn nun Skolem etwa nach seinem Beweis für das assoziative Gesetz übergeht zu:

$$\left. \begin{array}{l} a + 1 = 1 + a \\ a + (b + 1) = (a + b) + 1 \\ (b + 1) + a = b + (1 + a) = b + (a + 1) = (b + a) + 1 \end{array} \right\} \dots C$$

⁶³und sagt, der erste und dritte Übergang in der dritten Zeile seien nach dem bewiesenen assoziativen Gesetz gerechtfertigt, – so erfahren wir damit nicht mehr,⁶⁴ als wenn er sagte, die Übergänge seien nach dem Paradigma $a + (b + c) = (a + b) + c$ gemacht (d.h., sie entsprechen dem Paradigma) und es sei ein Schema α , β , γ mit Übergängen nach dem

59 (V): denn er hat es in einem andern Sinne als dem algebraischen „begründet“.

60 (O): Ich kann die Regel R auch
61 (F): MS 114, S. 1v.

62 (F): MS 114, S. 1v.

63 (F): MS 114, S. 1v.

64 (V): so sagt er uns damit nicht mehr,

exist as a link. The old structure is *not* broken up. So we have to say that the old proof-procedure continues to exist. And in the *old* sense the irreducibility remains as well.

Neither can we say that Skolem has set the algebraic system onto a smaller foundation, for he has “given it foundations” in a different sense from that of algebra.⁴⁶

Do the inductive proofs – by means of α – show a connection between the A’s? And isn’t this a sign that here we’re dealing with proofs after all? – The connection shown is not *the one* that breaking up the A steps into ρ steps would establish. And *one* connection between the A’s is already visible before any proof.

I can also write the rule R

$$\left[\begin{array}{ll} a + (1 + 1) & (a + 1) + 1 \\ a + (\xi + 1) & = (a + \xi) + 1 \\ a + ((\xi + 1) + 1) & ((a + \xi) + 1) + 1 \end{array} \right] \dots R$$

like⁴⁷ *this*:

$$\left[\begin{array}{ll} a + (1 + 1) & (a + 1) + 1 \\ a + (\xi + 1) & = (a + \xi) + 1 \\ a + ((\xi + 1) + 1) & (a + (\xi + 1)) + 1 \end{array} \right] \dots S$$

⁴⁸or also like this:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

if I take R or S as a definition or substitute for that form.

Now if I say that the steps in:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \quad a + (b + 1) = (a + b) + 1 \\ \beta \quad a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c)) + 1 \\ \gamma \quad (a + b) + (c + 1) = ((a + b) + c) + 1 \end{array} \right\} \dots B$$

⁴⁹are justified by the rule R, you can reply: “If that’s what you call a justification, then you have justified the steps. But you’d have told us as much if you had just drawn our attention to the rule R and its formal relationship to α (or to α , β , and γ).”

So I could also have said: I take the rule R in such and such a way as a paradigm for my steps.

So if Skolem, after his proof of the associative law, now takes the step to:

$$\left. \begin{array}{l} a + 1 = 1 + a \\ a + (b + 1) = (a + b) + 1 \\ (b + 1) + a = b + (1 + a) = b + (a + 1) = (b + a) + 1 \end{array} \right\} \dots C$$

⁵⁰and says that the first and third steps in the third line are justified according to the already proved associative law – that tells us no more⁵¹ than if he had said that the steps were taken in accordance with the paradigm $a + (b + c) = (a + b) + c$ (i.e. they correspond to the paradigm) and a schema α , β , γ was derived in steps according to the paradigm α . – “But does B justify these steps, or not?” – “What do you mean by the word ‘justify’?” – “Well, the step

46 (V): sense than in the algebraic one.

47 (O): I can also write the rule R like

48 (F): MS 114, p. 1v.

49 (F): MS 114, p. 1v.

50 (F): MS 114, p. 1v.

51 (V): law – then we don’t find out anything more from this

Paradigma α abgeleitet. – „Aber rechtfertigt B nun diese Übergänge, oder nicht?“ – Was meinst Du mit dem Wort „rechtfertigen“? – „Nun, der Übergang ist gerechtfertigt, wenn wirklich ein Satz, der für alle Zahlen gilt, bewiesen ist.“ – Aber in welchem Falle wäre das geschehen? Was nennst Du einen Beweis davon, daß ein Satz für alle Kardinalzahlen gültig ist? Wie weißt Du, ob der Satz (wirklich) für alle Kardinalzahlen gültig⁶⁵ ist, da Du es nicht ausprobieren kannst. Dein *einziges* Kriterium ist ja der Beweis. Du *bestimmst* also wohl eine Form und nennst sie die des Beweises, daß ein Satz für alle Kardinalzahlen gilt. Dann haben wir eigentlich gar nichts davon, daß uns zuerst die allgemeine Form dieser Beweise gezeigt wird; da ja dadurch nicht gezeigt wird, daß nun der besondere Beweis wirklich das leistet, was wir von ihm verlangen; ich meine: da hiedurch der besondere Beweis nicht als einer gerechtfertigt, erwiesen ist, der einen Satz für alle Kardinalzahlen beweist. Der rekursive Beweis muß vielmehr seine eigene Rechtfertigung sein. Wenn wir unsern Beweisvorgang wirklich als den Beweis einer solchen Allgemeinheit rechtfertigen wollen, tun wir vielmehr etwas anderes: wir gehen Beispiele einer Reihe durch, und diese Beispiele und das Gesetz, was wir in ihnen erkennen, befriedigt uns nun, und wir sagen: ja, unser Beweis leistet wirklich, was wir wollten. Aber wir müssen nun bedenken, daß wir mit der Angabe dieser Beispielreihe die Schreibweise B und C nur in eine andere (Schreibweise) übersetzt haben. (Denn die Beispielreihe ist nicht die unvollständige Anwendung der allgemeinen Form, sondern ein anderer Ausdruck des Gesetzes.)⁶⁶ Und weil die Wortsprache, wenn sie den Beweis erklärt, erklärt was er beweist, den Beweis nur in eine andere Ausdrucksform übersetzt, so können wir diese Erklärung auch ganz weglassen. Und wenn wir das tun, so werden die mathematischen Verhältnisse viel klarer, nicht verwischt durch die *Vieles bedeutenden*⁶⁷ Ausdrücke der Wortsprache. Wenn ich z.B. B unmittelbar neben A setze, ohne Vermittlung durch den Ausdruck der Wortsprache „für alle Kardinalzahlen etc.“⁶⁸, so kann kein falscher Schein eines Beweises von A durch B entstehen. Wir sehen dann die nüchternen, (nackten) Beziehungen zwischen A und B, und wie weit sie reichen.⁶⁹ Man lernt so erst, unbeirrt von der alles gleichmachenden Form der Wortsprache, die eigentliche Struktur dieser Beziehung kennen, und was es mit ihr auf sich hat.

Man sieht hier vor allem, daß wir an⁷⁰ dem Baum der Strukturen B, C, etc. interessiert sind, und daß an ihm zwar allenthalben die Form

$$\phi(1) = \psi(1)$$

$$\phi(n + 1) = F(\phi n)$$

$$\psi(n + 1) = F(\psi n)$$

zu sehen ist, gleichsam eine bestimmte Astgabelung, – daß aber diese Gebilde in verschiedenen Anordnungen, und Verbindungen untereinander, auftreten, und daß sie nicht in dem Sinne Konstruktionselemente sind,⁷¹ wie die Paradigmen im Beweis von $a + (b + (c + 1)) = (a + (b + c)) + 1$ oder $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Der Zweck der „rekursiven Beweise“ ist ja, den algebraischen Kalkül mit dem der Zahlen in Verbindung zu setzen. Und der Baum der rekursiven Beweise „rechtfertigt“ den algebraischen Kalkül nur, wenn das heißen soll, daß er ihn mit dem arithmetischen in Verbindung bringt. Nicht aber in dem Sinn, in welchem die Liste der Paradigmen den algebraischen Kalkül, d.h. die Übergänge in ihm, rechtfertigt.

65 (V): giltig

66 (V): Ausdruck dieser Form.)

67 (V): die mehrdeutigen

68 (V): ohne Dazwischenkunft des Wortes „alle“,

69 (V): Wir sehen dann ganz nüchtern, wie weit die Beziehungen von B zu A und zu $a + b = b + a$ reichen und wo sie aufhören.

70 (V): in

71 (V): bilden,

is justified if a theorem that holds for all numbers really has been proved.” – But in what case would that have happened? What do you call a proof that a theorem holds for all cardinal numbers? How do you know whether a theorem is (really) valid for all cardinal numbers, since you can’t test it? After all, your *only* criterion is the proof itself. So most likely you *stipulate* a form and call it the form of the proof that a proposition holds for all cardinal numbers. In that case we really gain nothing by being first shown the general form of these proofs, because that doesn’t show that the individual proof really accomplishes what we demand of it; I mean, because it doesn’t justify, doesn’t show the individual proof to be a proof of a theorem for all cardinal numbers. Rather, the recursive proof has to be its own justification. If we really want to justify our proof procedure as a proof of a generality of this kind, we do something different: we go through examples of a series, and then these examples and the law we recognize in them satisfy us, and we say: Yes, our proof really does accomplish what we wanted. But now we must recognize that by giving this series of examples we have only translated the notations B and C into another (notation). (For the series of examples is not an incomplete application of the general form, but another expression of the law.)⁵² And because word-language, in explaining the proof (i.e. what the proof proves), only translates it into another form of expression, we can just as well drop this explanation altogether. And if we do so, the mathematical relationships become much clearer, no longer blurred by the expressions of word-language with their multiple⁵³ meanings. For example, if I put B right beside A, without using the expression of word-language “for all cardinal numbers, etc.”,⁵⁴ then no false appearance of a proof of A by B can arise. We then see the sober (bare) relationships between A and B, and how far they extend.⁵⁵ Only in this way, unflustered by the all-levelling form of word-language, do we come to know the actual structure of that relationship and what it is all about.

Here we see first and foremost that we are interested in the tree of the structures B, C, etc., and that in it there is visible everywhere – a particular forking of the branches, as it were – the following form:

$$\begin{aligned}\phi(1) &= \psi(1) \\ \phi(n+1) &= F(\phi n) \\ \psi(n+1) &= F(\psi n)\end{aligned}$$

But we see that these patterns turn up in different arrangements and interconnections, and that they are not⁵⁶ elements of the construction in the same sense as are the paradigms in the proof of $a + (b + (c + 1)) = (a + (b + c)) + 1$, or $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. The purpose of the “recursive proofs” is of course to connect the algebraic calculus with the calculus of numbers. And the tree of the recursive proofs only “justifies” the algebraic calculus if that is supposed to mean that it connects it with the arithmetical one. It doesn’t justify it in the sense in which the list of paradigms justifies the algebraic calculus, i.e. the steps in it.

52 (V): of this form.)

53 (V): ambiguous

54 (V): without the word “all” coming in between,

55 (V): We then see quite soberly how far the relationships of B to A and to $a + b = b + a$ extend, and where they end.

56 (V): they do not form

Wenn man also die Paradigmen der Übergänge tabuliert, so hat das dort Sinn, wo das Interesse darin liegt, zu zeigen, daß die und die Transformationen alle bloß mit Hilfe jener – im übrigen willkürlich gewählten – Übergangsformen zustande gebracht sind. Nicht aber dort, wo sich die Rechnung in einem andern Sinne rechtfertigen soll, wo also das Anschauen der Rechnung – ganz abgesehen von dem Vergleich mit einer Tabelle vorher festgelegter Normen – uns lehren muß, ob wir sie zulassen sollen oder nicht. Skolem hätte uns also keinen Beweis des assoziativen und kommutativen Gesetzes versprechen brauchen,⁷² sondern einfach sagen können, er werde uns einen Zusammenhang der Paradigmen der Algebra mit den Rechnungsregeln der Arithmetik zeigen. Aber ist das nicht Wortklauberei? hat er denn nicht die Zahl der Paradigmen reduziert und uns z.B. statt jener beiden Gesetze eines, nämlich $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ gegeben? Nein. Wenn wir z.B. $(a + b)^4 = \text{etc. (r)}$ beweisen, so könnten wir dabei von dem vorher bewiesenen Satz $(a + b)^2 = \text{etc. (s)}$ Gebrauch machen. Aber in diesem Fall lassen sich die Übergänge in r, die durch s gerechtfertigt wurden, auch durch jene Regeln rechtfertigen, mit denen s bewiesen wurde. Und es verhält sich dann s zu jenen ersten Regeln, wie ein durch Definition eingeführtes Zeichen zu den primären Zeichen, mit deren Hilfe es definiert wurde. Man kann die Definition immer auch eliminieren und auf die primären Zeichen übergehen. Wenn wir aber in C einen Übergang machen, der durch B gerechtfertigt ist, so können wir diesen Übergang nun nicht auch mit α allein machen. Wir haben eben mit dem, was hier Beweis genannt wird, nicht einen Übergang⁷³ in Stufen zerlegt, sondern etwas ganz andres getan.

72 (V): sollen,

73 (V): Schritt

So tabulating the paradigms for the steps makes sense in the cases where we are interested in showing that such and such transformations are all brought about only by means of those transitional forms – ones that are, incidentally, arbitrarily chosen. But it doesn't make sense where the calculation is to justify itself in another sense, i.e. where merely looking at the calculation – leaving aside any comparison with a table of previously established norms – must show us whether we are to allow it or not. So Skolem wouldn't have had to promise us⁵⁷ a proof of the associative and commutative laws; he could simply have said he would show us a connection between the paradigms of algebra and the calculation rules of arithmetic. But isn't this hairsplitting? Didn't he, after all, reduce the number of paradigms and give us a single law, namely, $a + (b + 1) = (a + b) + 1$, instead of those two laws? No. In proving, for example, $(a + b)^4 = \text{etc.}$ (r) we can make use of the previously proved proposition $(a + b)^2 = \text{etc.}$ (s). But in that case the steps in (r) which were justified by (s) can also be justified by the rules used to prove (s). And then the relation of (s) to those first rules is the same as that of a sign introduced by definition to the primary signs used to define it: we can always eliminate the definitions and step back to the primary signs. But when we take a step in C that is justified by B, we can't take the same step with (α) alone. And this means: In what we're here calling “proof”, we haven't simply broken a transition⁵⁸ into smaller steps; we've done something quite different.

57 (V): Skolem shouldn't have promised us

58 (V): step

696 **Der rekursive Beweis reduziert die
Anzahl der Grundgesetze nicht.**

Wir haben also hier nicht den Fall, in welchem eine Gruppe von Grundgesetzen durch eine mit weniger Gliedern bewiesen wird, aber nun weiter in den Beweisen alles im Gleichen bleibt. (Wie auch in einem System von Grundbegriffen an der späteren Entwicklung dadurch nichts geändert wird, daß man die Anzahl der Grundbegriffe durch Definitionen reduziert.)

(Übrigens, welche verdächtige Analogie, zwischen „Grundgesetzen“ und „Grundbegriffen“!)

Es ist etwa¹ so: der Beweis eines alten Grundgesetzes setzt sonst das System der Beweise (einfach) nach rückwärts fort. Die Rekursionsbeweise aber setzen das System von algebraischen Beweisen (mit den alten Grundgesetzen) nicht nach rückwärts fort, sondern sind ein neues System, das mit dem ersten nur parallel zu laufen scheint.

697 Das ist eine seltsame Bemerkung, daß in den Induktionsbeweisen der Grundregeln nach wie vor ihre Unreduzierbarkeit (Unabhängigkeit) sich zeigen muß.² Was, wenn man das für den Fall von gewöhnlichen Beweisen (oder Definitionen) sagte, also für den Fall, wo die Grundregeln eben weiter reduziert werden, eine neue Verwandtschaft zwischen ihnen gefunden (oder konstruiert) wird.

Wenn ich darin Recht habe, daß durch die Rekursionsbeweise die Unreduzierbarkeit³ intakt bleibt, dann ist damit (wohl) alles gesagt, was ich gegen den Begriff vom Rekursions-„Beweis“ sagen⁴ wollte.⁵

Der induktive Beweis zerlegt den Übergang in A nicht. Ist es nicht das, was macht, daß ich mich dagegen sträube, ihn Beweis zu nennen? Warum ich versucht bin zu sagen, er kann auf keinen Fall – nämlich auch, wenn man A durch R und α konstruiert – mehr tun, als etwas *über* den Übergang zu zeigen.

Wenn man sich einen Mechanismus aus Zahnrädern und diese aus lauter gleichen keilförmigen Stücken und je einem Ring, der sie zu einem Rad zusammenhält, zusammengesetzt denkt, so blieben in einem gewissen Sinne die Einheiten des Mechanismus doch die Zahnräder.

Es ist so: Wenn ein Faß aus Dauben und Böden besteht, so halten doch nur alle diese in dieser (bestimmten) Verbindung (als Komplex) die Flüssigkeit und bilden als Behälter neue Einheiten.

1 (V): gleichsam

2 (V): (Unabhängigkeit) zu Tage treten muß.

3 (V): Unabhängigkeit

4 (V): vorbringen

5 (V): kann.

The Recursive Proof Doesn't Reduce the Number of Fundamental Laws.

So here we don't have a case where a group of fundamental laws is proved by a group with fewer terms while everything in the proofs remains the same. (Just as in a system of fundamental concepts, nothing is altered in the later development by using definitions to reduce the number of fundamental concepts.)

(And by the way, what a fishy analogy that, between "fundamental laws" and "fundamental concepts"!)

It is something like this:¹ Normally the proof of an old fundamental law (simply) continues the system of proofs backwards. But the recursive proofs don't continue the system of algebraic proofs (with their old fundamental laws) backwards; rather they are a new system, which only seems to run parallel to the first one.

It's a strange remark that in the inductive proofs of the fundamental rules their irreducibility (independence) must show itself,² the same as before. What if we were to say the same thing about normal proofs (or definitions), i.e. about the case where the fundamental rules *are* further reduced, and a new relationship between them is discovered (or constructed)?

If I am right in saying that the irreducibility³ remains untouched by the recursive proofs, then that (pretty well) sums up everything I wanted to say⁴ against the concept of recursive "proof".

The inductive proof doesn't break up the step in A. Isn't that what makes me balk at calling it a proof? Isn't that why I'm tempted to say that it can't possibly do more than show something *about* the step – not even if A is constructed by R and α ?

If we imagine a mechanism made of cogwheels, and each of these cogwheels were made of a number of identical wedge-shaped pieces plus a ring that holds them together to form a wheel, it would still be the cogwheels that remained, in a certain sense, the units of the mechanism.

It's like this: if a barrel consists of staves and bottoms, it is still only when they are taken as a whole, linked in this (particular) way (as a complex), that they hold liquid and that they serve as individual containers.

1 (V): It is like this, as it were:

2 (V): must become apparent,

3 (V): independence

4 (V): I can proffer

Denken wir uns eine Kette, sie besteht aus Gliedern und es ist möglich, (je) ein solches
698 Glied durch zwei kleinere zu ersetzen. Die Verbindung, die die Kette macht, kann dann,
statt durch die großen, ganz durch die kleinen⁶ Glieder gemacht werden. Man könnte sich
aber auch denken, daß jedes Glied der Kette aus – etwa – zwei halbringförmigen Teilen
bestünde, die zusammen das Glied bildeten, einzeln aber nicht als Glieder verwendet
werden könnten.

Es hätte nun ganz verschiedenen Sinn, einerseits, zu sagen: die Verbindung, die die großen
Glieder machen, kann durch lauter kleine Glieder gemacht werden; – und anderseits: diese
Verbindung kann durch lauter halbe große Glieder gemacht werden. Was ist der
Unterschied?

Der eine Beweis ersetzt eine großgliedrige Kette durch eine kleingliedrige, der andere zeigt,
wie man die (alten) großen Glieder aus mehreren Bestandteilen zusammensetzen kann.

Ähnlichkeit, sowie⁷ Verschiedenheit der beiden Fälle sind klar zu Tage liegend.⁸

Der Vergleich des Beweises mit der Kette ist natürlich ein *logischer* Vergleich und also
ein vollkommen exakter Ausdruck dessen, was er illustriert.

6 (V): kleineren

7 (V): und

8 (V): sind augenfällig.

Let's imagine a chain: it consists of links, and it's possible to replace each such link by two smaller ones. Then the connection that the chain makes can be made entirely by the small⁵ links instead of by the large ones. But we could also imagine every link in the chain consisting of, say, two parts, each shaped like half a ring, which together formed the link, but could not be used individually as links.

Now it would mean completely different things to say, on the one hand: The connection made by the large links can be made entirely by small links – and on the other: This connection can be made entirely by large half-links. What's the difference?

The one proof replaces a chain with large links by a chain with small links, the other shows how one can fabricate the (old) large links from more than one part.

The similarity, as well as the difference, between⁶ the two cases is clear to see.⁷

The comparison between the proof and the chain is, of course, a *logical* comparison, and therefore a completely exact expression of what it illustrates.

5 (V): smaller

7 (V): is obvious.

6 (V): similarity and the difference between

Periodizität.

$$1 : 3 = 0, \dot{3}.^1$$

Man faßt die Periodizität eines Bruches, z.B. $\frac{1}{3}$, so auf, als *bestünde*² sie darin, daß etwas, was man die Extension des unendlichen Dezimalbruchs nennt, nur aus³ Dreien besteht, und daß die Gleichheit des Restes dieser Division mit dem Dividenden nur das *Anzeichen* für diese Eigenschaft der unendlichen Extension sei. Oder aber man korrigiert diese Meinung dahin, daß nicht eine unendliche Extension diese Eigenschaft habe, sondern eine unendliche Reihe endlicher Extensionen; und hierfür sei wieder die Eigenschaft der Division ein Anzeichen.⁴ Man kann nun sagen: die Extension mit *einem* Glied sei 0,3, die mit 2 Gliedern 0,33, die mit dreien 0,333, u.s.w. Das ist eine *Regel* und das „u.s.w.“ bezieht sich auf die Regelmäßigkeit, und die Regel könnte auch geschrieben werden „[0,3, 0,ξ, 0,ξ3]“. Das, was aber durch die Division $\underline{1} : 3 = 0,3$ bewiesen ist, ist *diese* Regelmäßigkeit im Gegensatz zu

700 einer andern, nicht die Regelmäßigkeit im Gegensatz zur Unregelmäßigkeit. Die periodische Division, also $\underline{1} : 3 = 0,3$ (im Gegensatz zu $1 : 3 = 0,3$) beweist *eine* Periodizität der Quotienten,

$\underline{1} \qquad \qquad \qquad 1$
d.h. sie *bestimmt* die Regel (die Periode), legt sie fest, aber ist nicht ein Anzeichen dafür, daß eine Regelmäßigkeit „vorhanden ist“. *Wo* ist sie denn vorhanden? Etwa in den bestimmten Entwicklungen, die ich auf diesem Papier gebildet habe. Aber das sind doch nicht „die Entwicklungen“. (Hier werden wir irreführt von der Idee der nicht aufgeschriebenen, idealen Extensionen, die ein ähnliches Uding sind, wie die idealen, nicht gezogenen geometrischen Geraden, die wir gleichsam nur in der Wirklichkeit nachziehen, wenn wir sie zeichnen.) Wenn ich sagte „das ‚u.s.w.‘ bezieht sich auf die Regelmäßigkeit“, so unterschied ich es von dem „u.s.w.“ in „er las alle Buchstaben: a, b, c, u.s.w.“. Wenn ich sagte: „die Extensionen von $1 : 3$ sind 0,3, 0,33, 0,333, u.s.w.“, so gebe ich *drei* Extensionen und – eine Regel. Unendlich ist nur diese, und zwar in keiner andern Weise, als die Division $\underline{1} : 3 = 0,3$.

$\underline{1}$
Von dem Zeichen „0,3̇“ kann man sagen: *es ist keine Abkürzung*.

Und das Zeichen „[0,3, 0,ξ, 0,ξ3]“ ist kein Ersatz für eine Extension, sondern das vollwertige Zeichen selbst; und ebensogut ist „0,3̇“. Es sollte uns doch zu denken geben, daß ein Zeichen der Art „0,3̇“ *genügt*, um damit zu machen, was wir brauchen. Es ist kein Ersatz, und im Kalkül gibt es keinen Ersatz.

1 (O): 0,3. (E): geändert nach TS 212, S. 3 (V): nennt, aus lauter 1705. 4 (O): Anzeigen.

2 (V): bestehe

Periodicity.

$$1 \div 3 = 0.\dot{3}.$$
¹

We conceive of the periodicity of a fraction, for instance, of $1/3$, as if it *consisted* in the fact that something called the extension of the infinite decimal consists only of² threes; and we hold that the sameness of remainder and dividend in this division is merely a *symptom* of this property of infinite extension. Or we correct this view by saying that it isn't an infinite extension that has this property, but an infinite series of finite extensions; and it is of this that the property of the division is a symptom. Now we can say: the extension taken to *one* term is 0.3, to two terms 0.33, to three terms 0.333, and so on. That is a *rule* and the "and so on" refers to the regularity; and the rule could also be written " $|0.3, 0.\xi, 0.\xi3|$ " But what is proved by the division $\underline{1} \div 3 = 0.3$ is *this* regularity in contrast to another, not regularity

$\underline{1}$ in contrast to irregularity. The periodic division $\underline{1} \div 3 = 0.\dot{3}$ (in contrast to $1 \div 3 = 0.3$) proves *one* periodicity of the quotients, i.e. it *determines* the rule (the period), it lays it down; but it isn't a symptom that a regularity "is present". *Where* is it present anyway? Perhaps in the particular expansions that I have developed on this piece of paper. But they certainly aren't "the expansions". (Here we are misled by the idea of unwritten ideal extensions, which are a kind of absurdity similar to those ideal, undrawn, geometric straight lines that we are merely tracing, as it were, when we draw them in reality.) When I said "the 'and so on' refers to the regularity" I was distinguishing it from the "and so on" in "He read all the letters of the alphabet: a, b, c and so on". When I say "the extensions of $1 \div 3$ are 0.3, 0.33, 0.333 and so on" I'm giving *three* extensions and – a rule. Only the latter is infinite, and it is infinite in exactly the same way as the division $\underline{1} \div 3 = 0.3$.

One can say of the sign " $0.\dot{3}$ ": *it is not an abbreviation.*

And the sign " $|0.3, 0.\xi, 0.\xi3|$ " isn't a substitute for an extension, but the full-valued sign itself; and " $0.\dot{3}$ " is just as good. It should give us food for thought that a sign like " $0.\dot{3}$ " *suffices* to do what we need. It isn't a mere substitute, and in the calculus there are no substitutes.

1 (O): 0.3. (E) Changed following TS 212, 2 (V): consists of nothing but p. 1705.

Wenn man meint, die besondere Eigenschaft der Division $\frac{1}{3} : 3 = 0,3$ sei ein Anzeichen
 701 für die Periodizität des unendlichen Dezimalbruchs, oder *der* Dezimalbrüche der Entwicklung, so ist das ein Anzeichen dafür,⁵ daß etwas regelmäßig *ist*; aber was? Die Extensionen, die ich gebildet habe? Aber andere gibt es ja nicht. Am absurdesten würde die Redeweise, wenn man sagte: die Eigenschaft der Division sei ein Anzeichen dafür, daß das Resultat die Form $[0,a, 0,\xi, 0,\xi a]$ habe; das wäre so, als wollte man sagen: eine Division ist das Anzeichen dafür, daß eine Zahl herauskommt. Das Zeichen „0,3“ drückt seine Bedeutung nicht von einer größeren Entfernung aus, als „0,333 . . .“, denn dieses Zeichen gibt eine Extension von drei Gliedern und eine Regel; die Extension 0,333 ist für unsere Zwecke nebensächlich und so bleibt nur die Regel, die „[0,3, 0,\xi, 0,\xi 3]“ ebensogut gibt. Der Satz „die Division wird nach der ersten Stelle periodisch“ *heißt soviel* wie: „der erste Rest ist gleich dem Dividenten“. Oder auch: der Satz „die Division wird von der ersten Stelle an ins Unendliche die gleiche Ziffer erzeugen“ *heißt* „der erste Rest ist gleich dem Dividenten“; so wie der Satz „dieses Lineal hat einen unendlichen Radius“ heißt, es sei gerade.

Man könnte nun sagen: die Stellen eines⁶ Quotienten von $1 : 3$ sind *notwendig alle* 3, und das würde wieder nur heißen, daß der erste Rest gleich dem Dividenten ist und die erste Stelle des Quotienten 3. Die Verneinung des ersten Satzes ist daher gleich der Verneinung des zweiten. Es ist also dem „notwendig alle“ nichts entgegengesetzt, was man „zufällig alle“ nennen könnte; „notwendig alle“ ist sozusagen *ein* Wort. Ich brauche nur fragen: Was ist das Kriterium der notwendigen Allgemeinheit, und was wäre das, der zufälligen (das Kriterium dafür also, daß zufällig alle Zahlen die Eigenschaft ϵ haben)?

5 (V): so heißt das,

6 (V): des

If you think that the special property of the division $\frac{1}{3} \div 3 = 0\cdot\dot{3}$ is a symptom of the periodicity of the infinite decimal fraction, or of *the* decimal fractions of the expansion, then that is indeed a sign³ that something *is* regular; but what? The extensions I've constructed? But there are no others. Our way of speaking would become most absurd if we said that the property of the division was an indication that the result has the form “|0·a, 0·ξ, 0·ξa|”; that would be like saying that a division was an indication that the result was a number. The sign “0· $\dot{3}$ ” doesn't express its meaning from a greater distance than “0·333 . . .”, because this sign gives an extension of three terms and a rule; the extension 0·333 is irrelevant to our purposes, and so all that remains is the rule, which is given just as well by “|0·3, 0·ξ, 0·ξ3|”. The proposition “After the first place the division becomes periodic” *means* “The first remainder is the same as the dividend”. Or again: the proposition “Starting with the first place the division will produce the same number to infinity” *means* “The first remainder is the same as the dividend”, just as the proposition “This ruler has an infinite radius” means it is straight.

Now we could say: the places of a⁴ quotient of $1 \div 3$ are *necessarily all* threes, and all that would mean in turn would be that the first remainder is equal to the dividend and that the first place of the quotient is 3. The negation of the first proposition is therefore equivalent to the negation of the second. So there's nothing in contrast to “necessarily all” that could be called “accidentally all”; “necessarily all” is as it were *one* word. All I have to ask is: What is the criterion of the necessary generality, and what would be the criterion of the accidental generality (i.e. the criterion for all numbers accidentally having the property ε)?

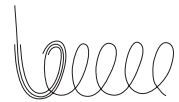
3 (V): then that means

4 (V): the

Der rekursive Beweis als Reihe von Beweisen.

Der „rekursive Beweis“ ist das allgemeine Glied einer Reihe von Beweisen. Er ist also ein Gesetz, nach dem man Beweise konstruieren kann. Wenn gefragt wird, wie es möglich ist, daß mir diese allgemeine Form den Beweis eines speziellen Satzes, z.B. $7 + (8 + 9) = (7 + 8) + 9$ ersparen kann, so ist die Antwort, daß sie nur alles zum Beweis dieses Satzes vorbereitet hat, ihn aber nicht beweist (er kommt ja in ihr nicht vor). Der Beweis besteht vielmehr aus der allgemeinen Form zusammen mit dem Satz.

Unsere gewöhnliche Ausdrucksweise trägt den Keim der Verwirrung in ihre Fundamente, indem sie das Wort „Reihe“ einerseits im Sinne von „Extension“, andererseits im Sinne von „Gesetz“ gebraucht. Das Verhältnis der beiden kann man sich an der Maschine klarmachen, die Schraubenfedern erzeugt. ¹Hier wird durch einen *schraubenförmig* gewundenen Gang ein Draht geschoben, der nun so viele Schraubenwindungen erzeugt, als man erzeugen will. Das, was man die unendliche Schraube nennt, ist nicht vielleicht etwas von der Art der endlichen Drahtstücke, oder etwas, dem sich diese nähern je länger sie werden, sondern das Gesetz der Schraube, wie es in dem kurzen Gangstück verkörpert ist. Der Ausdruck „unendliche Schraube“ oder „unendliche Reihe“ ist daher irreführend.



Wir können also den rekurrierenden Beweis immer auch als Reihenstück mit dem „u.s.w.“ anschreiben und er verliert dadurch nicht seine Strenge. Und zugleich zeigt diese Schreibweise klarer sein Verhältnis zur Gleichung A. Denn nun verliert der rekursive Beweis jeden Schein einer Rechtfertigung von A im Sinne eines algebraischen Beweises – etwa von $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Dieser Beweis mit Hilfe der algebraischen Rechnungsregeln ist vielmehr ganz analog einer Ziffernrechnung.

$$\begin{aligned}
 5 + (4 + 3) &= 5 + (4 + (2 + 1)) \\
 &= 5 + ((4 + 2) + 1) \\
 &= (5 + (4 + 2)) + 1 \\
 &= (5 + (4 + (1 + 1))) + 1 \\
 &= ((5 + 4) + 2) + 1 \\
 &= (5 + 4) + 3 \qquad \dots \quad \mathbf{L}
 \end{aligned}$$

Das ist einerseits der Beweis von $5 + (4 + 3) = (5 + 4) + 3$, andererseits kann man es als Beweis von $5 + (4 + 4) = (5 + 4) + 4$ etc. etc. gelten lassen, d.h. benützen.

Wenn ich nun sage: L ist der Beweis des Satzes $a + (b + c) = (a + b) + c$, so würde das Eigentümliche am² Übergang vom Beweis zum Satz viel auffälliger.

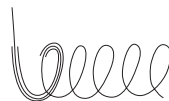
1 (F): MS 113, S. 121v.

2 (V): ~~mm~~

The Recursive Proof as a Series of Proofs.

A “recursive proof” is the general term of a series of proofs. So it is a law for the construction of proofs. To the question how this general form can save me the proof of a particular proposition, e.g. of $7 + (8 + 9) = (7 + 8) + 9$, the answer is that it merely has got everything ready for the proof of this proposition, but it doesn’t prove it (indeed the proposition doesn’t occur in it). The proof consists rather of the general form together with the proposition.

Our usual way of speaking carries the seeds of confusion right into its foundations, by using the word “series” in the sense of “extension” on the one hand, and in the sense of “law” on the other. The relationship between the two can be clarified by considering a machine for making coiled springs. ¹Here a wire is pushed through a *helically* shaped tube to make as many coils as desired. What is called an infinite helix is nothing like the finite pieces of wire, or something that they approach the longer they become; it is the law of the helix, as it is embodied in the short piece of tube. Therefore the expression “infinite helix” or “infinite series” is misleading.



So we can always write out the recursive proof as a limited series with “and so on” without its thereby losing its rigour. And at the same time this notation shows its relation to the equation A more clearly. For now the recursive proof loses all appearance of a justification of A in the sense of an algebraic proof – like the proof of $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Rather, this latter proof, with the help of algebraic calculation rules, is completely analogous to a calculation with numbers.

$$\begin{aligned}
 5 + (4 + 3) &= 5 + (4 + (2 + 1)) \\
 &= 5 + ((4 + 2) + 1) \\
 &= (5 + (4 + 2)) + 1 \\
 &= (5 + (4 + (1 + 1))) + 1 \\
 &= ((5 + 4) + 2) + 1 \\
 &= (5 + 4) + 3 \quad \dots \dots L
 \end{aligned}$$

On the one hand that is a proof of $5 + (4 + 3) = (5 + 4) + 3$, but on the other hand we can let it count, i.e. use it, as a proof of $5 + (4 + 4) = (5 + 4) + 4$, etc., etc.

If I now say that L is the proof of the proposition $a + (b + c) = (a + b) + c$, the peculiarity of the step from the proof to the proposition becomes much more noticeable.

1 (F): MS 113, p. 121v.

Definitionen führen nur praktische Abkürzungen ein, aber wir könnten auch ohne sie auskommen. Aber wie ist es mit den rekursiven Definitionen?

Anwendung der Regel $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ kann man zweierlei nennen: $4 + (2 + 1) = (4 + 2) + 1$ ist eine Anwendung in einem Sinne, im andern: $4 + (2 + 1) = ((4 + 1) + 1) + 1 = (4 + 2) + 1$.

704 Die rekursive Definition ist eine Regel zur Bildung von Ersetzungsregeln. Oder auch das allgemeine Glied einer Reihe von Definitionsreihen. Sie ist ein Wegweiser, der alle Ausdrücke einer bestimmten Form auf *einem* Wege heimweist.

Man könnte – wie gesagt – den Induktionsbeweis ganz ohne die Benützung von Buchstaben (mit voller Strenge) anschreiben. Die rekursive Definition $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ müßte dann als Definitionsreihe geschrieben werden. Diese Reihe verbirgt sich nämlich in der Erklärung ihres Gebrauchs. Man kann natürlich auch der Bequemlichkeit halber die Buchstaben in der Definition beibehalten, muß sich aber dann in der Erklärung auf ein Zeichen der Art „1, (1) + 1, ((1) + 1) + 1, u.s.w.“ beziehen; oder, was auf dasselbe hinausläuft, „[1, ξ , $\xi + 1$]“. Hier darf man aber nicht etwa glauben, daß dieses Zeichen eigentlich lauten sollte „(ξ).[1, ξ , $\xi + 1$]“! –

Der Witz unserer Darstellung ist ja, daß der Begriff „alle Zahlen“ nur durch eine Struktur der Art „[1, ξ , $\xi + 1$]“ gegeben ist. Die Allgemeinheit ist durch diese Struktur im Symbolismus *dargestellt* und kann nicht durch ein $(x).fx$ beschrieben werden.

Natürlich ist die sogenannte „rekursive Definition“ keine Definition im hergebrachten Sinne des Worts, weil keine Gleichung. Denn die Gleichung „ $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ “ ist nur ein Bestandteil von ihr. Noch ist sie das logische Produkt von Gleichungen. Sie ist vielmehr ein Gesetz, wonach Gleichungen gebildet werden; wie [1, ξ , $\xi + 1$] keine Zahl ist, sondern ein Gesetz etc. (Das Überraschende³ am Beweis von $a + (b + c) = (a + b) + c$ ist ja, daß er aus einer Definition allein hervorgehen soll. Aber α ist keine Definition, sondern eine allgemeine Additionsregel.)

705 Andererseits ist die Allgemeinheit dieser Regel keine andere, als die der periodischen Division $\underline{1} : 3 = 0,3$. D.h. es ist in der Regel nichts offen gelassen, ergänzungsbedürftig
 $\underline{1}$
 oder dergleichen.

Und vergessen wir nicht: Das Zeichen

„[1, ξ , $\xi + 1$]“ . . . N

interessiert uns nicht als ein suggestiver Ausdruck des allgemeinen Gliedes der Kardinalzahlenreihe, sondern nur, sofern es mit analog gebauten Zeichen in Gegensatz tritt: N *im Gegensatz zu*, etwa, [2, ξ , $\xi + 3$]; kurz als Zeichen, als Instrument, in einem Kalkül. Und das Gleiche gilt natürlich von $\underline{1} : 3 = 0,3$. (Offen gelassen wird in der Regel

$\underline{1}$

nur ihre Anwendung.)

$1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1, \quad 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1, \quad 3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1 \quad \dots \text{u.s.w.}$
 $1 + (2 + 1) = (1 + 2) + 1, \quad 2 + (2 + 1) = (2 + 2) + 1, \quad 3 + (2 + 1) = (3 + 2) + 1 \quad \dots \text{u.s.w.}$
 $1 + (3 + 1) = (1 + 3) + 1, \quad 2 + (3 + 1) = (2 + 3) + 1, \quad 3 + (3 + 1) = (3 + 3) + 1 \quad \dots \text{u.s.w.}$
u.s.w.

So könnte man die Regel „ $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ “ anschreiben.

3 (V): Verblüffende

Definitions merely introduce practical abbreviations, and so we could get along without them. But how about recursive definitions?

Two different things can be called applications of the rule $a + (b + 1) = (a + b) + 1$: in one sense $4 + (2 + 1) = (4 + 2) + 1$ is an application, in another sense $4 + (2 + 1) = ((4 + 1) + 1) + 1 = (4 + 2) + 1$ is.

A recursive definition is a rule for constructing replacement rules. But it's also the general term of a number of series of definitions. It's a signpost that shows all expressions of a certain form the *same* way home.

As we said, we could write the inductive proof without using letters at all (with no loss of rigour). Then the recursive definition $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ would have to be written as a series of definitions. For this series is concealed in the explanation of its use. Of course we can also keep the letters in the definition for the sake of convenience, but in that case we have to refer in the explanation to a sign like “1, (1) + 1, ((1) + 1) + 1 and so on”, or – what boils down to the same thing – “|1, ξ , $\xi + 1$ |”. But here we mustn't believe perchance that this sign should really be “(ξ).|1, ξ , $\xi + 1$ |”! –

The point of our formulation is of course that the concept “all numbers” has been given only by a structure like “|1, ξ , $\xi + 1$ |”. The generality has been *represented* by this structure in the symbolism and cannot be *described* by an (x).fx.

Of course the so-called “recursive definition” isn't a definition in the customary sense of the word, because it isn't an equation. For the equation “ $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ ” is only a part of it. Nor is it a logical product of equations. Rather, it is a law for the construction of equations; just as |1, ξ , $\xi + 1$ | isn't a number, but a law etc. (The amazing² thing about the proof of $a + (b + c) = (a + b) + c$ is that it's supposed to emerge from a definition alone. But α isn't a definition, but a general rule for addition.)

On the other hand the generality of this rule is none other than that of the periodic division $\underline{1} \div 3 = 0.3$. That means that nothing in the rule is left open or is in need of $\underline{1}$ completion or the like.

And let's not forget: the sign
 “|1, ξ , $\xi + 1$ |” N

doesn't interest us as a suggestive expression of the general term of the series of cardinal numbers, but only in so far as it is contrasted with signs that are similarly constructed: N *as opposed to*, say, |2, ξ , $\xi + 3$ |; in short, it interests us as a sign, an instrument, in a calculus. And of course the same holds for $\underline{1} \div 3 = 0.3$. (The only thing left open in the $\underline{1}$ rule is its application.)

$1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1$, $2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$, $3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1$. . . and so on
 $1 + (2 + 1) = (1 + 2) + 1$, $2 + (2 + 1) = (2 + 2) + 1$, $3 + (2 + 1) = (3 + 2) + 1$. . . and so on
 $1 + (3 + 1) = (1 + 3) + 1$, $2 + (3 + 1) = (2 + 3) + 1$, $3 + (3 + 1) = (3 + 3) + 1$. . . and so on
and so on.

That's the way we could write the rule “ $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ ”.

2 (V): astounding

$$\left[\begin{array}{ccc} a + (1 + 1) = (a + 1) + 1 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ a + (\xi + 1) & (a + \xi) + 1 & \\ a + ((\xi + 1) + 1) & ((a + \xi) + 1) + 1 & \end{array} \right] \dots R$$

⁴In der Anwendung der Regel R, deren Beschreibung ja zu der Regel selbst als ein Teil ihres Zeichens gehört, läuft a der Reihe [1, ξ, ξ + 1] entlang und das könnte natürlich durch ein beigefügtes Zeichen, etwa „a → N“ angegeben werden. (Die zweite und dritte Zeile der Regel R könnte man zusammen die Operation nennen, wie das zweite und dritte Glied des Zeichens N.) So ist auch die Erläuterung zum Gebrauch der rekursiven Definition α ein Teil dieser Regel selber; oder auch eine Wiederholung ebenderselben⁵ Regel in anderer Form: sowie „1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, u.s.w.“ das *gleiche* bedeutet, wie (d.h. übersetzbar ist in) „[1, ξ, ξ + 1]“. Die Übersetzung in die Wortsprache *erklärt* den Kalkül mit den neuen Zeichen, da wir den Kalkül mit den Zeichen der Wortsprache schon beherrschen.

706

Das Zeichen einer Regel ist ein Zeichen eines Kalküls wie jedes andere; seine Aufgabe ist nicht, suggestiv (auf eine Anwendung hin) zu wirken, sondern, im Kalkül nach einem System⁶ gebraucht zu werden. Daher ist die äußere Form, wie die eines Pfeiles → nebensächlich, wesentlich aber das System, worin das Regelzeichen verwendet wird. Das System von Gegensätzen – sozusagen – wovon⁷ das Zeichen sich unterscheidet, etc.

Das, was ich hier die Beschreibung der Anwendung nenne, enthält ja selbst ein „u.s.w.“, kann also nur eine Ergänzung oder ein Ersatz des Regelzeichens selbst sein.

Was ist nun der Gegensatz eines allgemeinen Satzes, wie $a + (b + (1 + 1)) = a + ((b + 1) + 1)$? Welches ist das System von Sätzen, innerhalb dessen dieser Satz⁸ verneint wird? Oder auch: wie, in welcher Form, kann dieser Satz mit andern in Widerspruch geraten? Oder: Welche Frage beantwortet er? Gewiß nicht⁹ die, ob $(n).fn$ oder $(\exists n).\sim fn$ der Fall ist, etc. Die Allgemeinheit einer Regel kann eo ipso nicht in Frage gestellt werden.¹⁰

707

Denken wir uns nun den allgemeinen Satz als Reihe geschrieben

- P₁₁, P₁₂, P₁₃,
- P₂₁, P₂₂, P₂₃,
- P₃₁, P₃₂, P₃₃,
-

und verneint. Wenn wir ihn als $(x).f(x)$ auffassen, so betrachten wir ihn als logisches Produkt¹¹ und sein Gegenteil ist die logische Summe der Verneinungen von p_{11} , p_{12} , etc. Diese Disjunktion (nun) ist mit jedem beliebigen Produkt $p_{11} \& p_{21} \& p_{22} \& p_{12} \dots p_{mn}$ vereinbar. (Gewiß, wenn man den Satz mit einem logischen Produkt vergleicht, so wird er unendlich vielsagend und sein Gegenteil nichtssagend.) (Bedenke aber: das „u.s.w.“ steht im Satz nach einem Beistrich, nicht nach einem „und“ („&“). Das „u.s.w.“ ist kein Zeichen ihrer *Unvollständigkeit*.)

Ist denn die Regel R unendlich vielsagend? wie ein ungeheuer langes logisches Produkt?

Daß man die Zahlenreihe durch die Regel laufen läßt, ist eine gegebene Form; darüber wird nichts behauptet und kann nichts verneint werden.

4 (F): MS 113, S. 139r.

5 (V): der

6 (V): nach Gesetzen

7 (V): – sozusagen – von denen // worin

8 (V): dessen diese Regel

9 (V): er? Nicht

10 (V): Oder: welche Frage kann er beantworten, zwischen welchen Alternativen entscheiden? –

Nicht zwischen einer „(n)fn“ und einer „(∃n)~fn“; denn die Allgemeinheit ist dem Satz von der Regel R zugebracht. Sie kann ebensowenig in Frage gestellt // gezogen // werden, wie das System der Kardinalzahlen.

11 (V): so ist er ein logisches Produkt

706

707

$$\left[\begin{array}{ccc} a + (1 + 1) & = & (a + 1) + 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ a + (\xi + 1) & & (a + \xi) + 1 \\ a + ((\xi + 1) + 1) & & ((a + \xi) + 1) + 1 \end{array} \right] \dots R$$

³In the application of the rule R (whose description is, of course, an inherent part of the rule itself, since it is a part of its sign), a ranges over the series |1, ξ, ξ + 1|; and of course that could be expressly indicated with an additional sign, say “a → N”. (We might call the second and third lines of the rule R taken together “the operation”, like the second and third terms of the sign N.) Thus the elucidation of the use of the recursive definition α is also a part of that rule itself; or, if you like, a repetition of the very same rule⁴ in another form; just as “1, 1 + 1, 1 + 1 + 1 and so on” means the *same thing* as (i.e. is translatable into) “|1, ξ, ξ + 1|”. The translation into word-language *explains* the calculus with the new signs, because we have already mastered the calculus with the signs of word-language.

The sign of a rule is a sign of a calculus, like any other sign; its job isn't to suggest (a particular application), but to be used in the calculus according to a system.⁵ Therefore the exterior form, like that of an arrow →, is unimportant. What is essential, though, is the system in which the sign for the rule is employed. The system of contraries – so to speak – from⁶ which the sign is distinguished, etc.

What I am here calling the description of the application contains an “and so on” itself, and so it can be no more than a supplement to, or substitute for, the sign for the rule itself.

So what is the contradictory of a general proposition like a + (b + (1 + 1)) = a + ((b + 1) + 1)? What is the system of propositions within which this proposition⁷ is negated? Or again, how, in what form, can this proposition come into contradiction with others? Or: What question does it answer? Certainly not⁸ the question whether (n).fn or (∃n).~fn is the case, etc. The generality of a rule is *eo ipso* incapable of being called into question.⁹

Now let's imagine the general proposition written as a series:

- P₁₁, P₁₂, P₁₃,
- P₂₁, P₂₂, P₂₃,
- P₃₁, P₃₂, P₃₃,
-

and then negated. If we understand it as (x).fx, then we are treating it as a¹⁰ logical product, and its opposite is the logical sum of the negations of p₁₁, p₁₂ etc. (Now) this disjunction is consistent with any random product p₁₁ & p₂₁ & p₂₂ & p₁₂ . . . p_{mn}. (Certainly if you compare the proposition with a logical product, it becomes infinitely significant and its opposite void of significance.) (But consider this: the “and so on” in the proposition comes after a comma, not after an “and” (“&”). The “and so on” is not a sign of their *incompleteness*.)

Is the rule R really infinitely significant? Like an enormously long logical product?

That you can let the number series run through the rule is a form that is given; nothing is affirmed about this and nothing can be denied.

3 (F): MS 113, p. 139r.

4 (V): the rule

5 (V): calculus according to laws.

6 (V): within

7 (V): rule

8 (V): answer? Not

9 (V): others? Or: which question can it answer? Between which alternatives can it decide? – Not between “(n)fn” or “(∃n)~fn”; for generality is given to the proposition by the rule R. It can no more be called into question than the system of cardinal numbers.

10 (V): then it is a

Das Durchleiten des Zahlenstromes ist ja nichts, wovon ich sagen kann, ich könne es beweisen. Beweisen kann ich nur etwas über die Form, den Model, durch den ich den Zahlenstrom leite.

Kann man nun nicht sagen, daß die allgemeine Zahlenregel

$$a + (b + c) = (a + b) + c \dots A$$

708 eben die Allgemeinheit hat wie $a + (1 + 1) = (a + 1) + 1$ (indem diese für jede Kardinalzahl, jene für jedes Kardinalzahlentripel gilt); und daß der Induktionsbeweis¹² von A die Regel A *rechtfertigt*? Daß wir also die Regel A geben dürfen, weil der Beweis zeigt, daß sie immer stimmt?

Rechtfertigt $\frac{1}{1} : 3 = 0,3$ die Regel

$$\frac{1}{1} : 3 = 0,3, \quad \frac{1}{1} : 3 = 0,33, \quad \frac{1}{1} : 3 = 0,333, \quad \text{u.s.w.} \dots P$$

A ist eine vollkommen verständliche Regel; so wie die Ersetzungsregel P. Eine solche Regel kann ich aber darum nicht geben, weil ich die einzelnen Fälle von A schon durch eine andere Regel berechnen kann, wie ich P nicht als Regel geben kann, wenn ich eine Regel gegeben habe, mit der ich $\frac{1}{1} : 3 = 0,3$, etc. *berechnen* kann.

Wie wäre es, wenn man außer den Multiplikationsregeln noch „ $25 \times 25 = 625$ “ als Regel festsetzen wollte? (Ich sage nicht „ $25 \times 25 = 624$!“!) – $25 \times 25 = 625$ hat nur Sinn, wenn die Art der Rechnung¹³ bekannt ist, die zu dieser Gleichung gehört, und hat nur Sinn in Bezug auf diese Rechnung. A hat nur Sinn mit Bezug auf die Art der Ausrechnung von A. Denn die erste Frage wäre hier eben: ist das eine Festsetzung,¹⁴ oder ein errechneter Satz? Denn ist $25 \times 25 = 625$ eine Festsetzung (Grundregel), dann bedeutet das Multiplikationszeichen etwas anderes, als es z.B. in Wirklichkeit bedeutet. (D.h. wir haben es mit einer andern Rechnungsart zu tun.) Und ist A eine Festsetzung, dann definiert das die Addition anders, als wenn es ein errechneter Satz ist. Denn die Festsetzung ist ja dann eine Erklärung des Additionszeichens und die Rechenregeln,¹⁵ die A auszurechnen erlauben, eine andere Erklärung desselben Zeichens. Ich darf hier nicht vergessen, daß α, β, γ nicht der Beweis von A ist, sondern nur die Form des Beweises, oder des Bewiesenen ist; α, β, γ definiert also A.

709 Darum kann ich nur sagen „ $25 \times 25 = 625$ wird bewiesen“, wenn die Beweismethode fixiert ist, unabhängig von dem speziellen Beweis. Denn diese Methode bestimmt erst die Bedeutung von „ $\xi \cdot \eta$ “, also, *was* bewiesen wird. Insofern gehört also die Form $\frac{a}{a} : b = c$ zur Beweismethode, die den Sinn von c erklärt. Etwas anderes ist dann die Frage, ob ich richtig gerechnet habe. – Und so gehört α, β, γ zur Beweismethode, die den Sinn des Satzes A erklärt.

Die Arithmetik ist ohne eine Regel A vollständig, es fehlt ihr nichts. Der Satz A wird (nun) mit Entdeckung einer Periodizität, mit der Konstruktion eines *neuen* Kalküls, in die Arithmetik eingeführt. Die Frage nach der Richtigkeit dieses Satzes hätte vor dieser Entdeckung (oder Konstruktion) so wenig Sinn, wie die Frage nach der Richtigkeit von „ $\frac{1}{1} : 3 = 0,3, \quad \frac{1}{1} : 3 = 0,33, \quad \dots$ ad inf.“.

12 (V): der rekursive Beweis

13 (V): Ausrechnung

14 (V): Bestimmung,

15 (V): Rechenregel,

After all, running the stream of numbers through is not something I can say I can prove. I can only prove something about the form, the pattern, through which I run that stream.

Now can't we say that the general number rule

$$a + (b + c) = (a + b) + c \dots A$$

has the very same generality as $a + (1 + 1) = (a + 1) + 1$ (in that the latter holds for every cardinal number and the former for every triple of cardinal numbers); and that the inductive¹¹ proof of A justifies the rule A? Can't we say that we are thus allowed to give the rule A, because the proof shows that it is always right?

Does $\underline{1} \div 3 = 0.3$ justify the rule

$$\underline{1} \\ \text{"}1 \overset{1}{\div} 3 = 0.3, 1 \overset{2}{\div} 3 = 0.33, 1 \overset{3}{\div} 3 = 0.333, \text{ and so on"}? \dots P$$

A is a completely intelligible rule; just like the replacement rule P. But I can't give such a rule, because I can already calculate the particular instances of A using another rule; just as I cannot give P as a rule if I have given a rule with which I can calculate $1 \overset{1}{\div} 3 = 0.3$, etc.

What would it be like if someone wanted to lay down " $25 \times 25 = 625$ " as a rule in addition to the multiplication rules? (I'm not saying " $25 \times 25 = 624$ "!) – $25 \times 25 = 625$ only makes sense if the kind of calculation that belongs to this equation is already known, and it only makes sense with reference to that calculation. A only makes sense with reference to how A is figured out. For the first question here would be: Is that a stipulation, or a proposition that's been calculated? For if $25 \times 25 = 625$ is a stipulation (foundational rule), then the multiplication sign means something different than it does, for example, in reality. (That is, we are dealing with a different kind of calculation.) And if A is a stipulation, then that defines addition differently than if it is a proposition that has been calculated. For in that case the stipulation is of course a definition of the addition sign, and the rules of calculation that allow¹² A to be figured out are a different definition of the same sign. Here I mustn't forget that α, β, γ isn't the proof of A, but only the form of the proof, or of what has been proved; so α, β, γ is a definition of A.

Therefore I can only say " $25 \times 25 = 625$ is proved" if the method of proof is fixed independently of the specific proof. For it is this method that determines the meaning of " $\xi \cdot \eta$ ", i.e. determines *what* is proved. So to that extent the form $\underline{a} \div b = c$ belongs to the method of proof that explains the sense of \dot{c} . It's another question whether I've calculated correctly. – And thus α, β, γ belong to the method of proof that explains the sense of the proposition A.

Arithmetic is complete without a rule like A; without it it doesn't lack anything. The proposition A is introduced into arithmetic with the discovery of periodicity and the construction of a *new* calculus. Before this discovery (or construction) a question about the correctness of that proposition would have had as little sense as a question about the correctness of " $1 \overset{1}{\div} 3 = 0.3, 1 \overset{2}{\div} 3 = 0.33, \dots ad inf.$ ".

11 (V): recursive

12 (V): the rule of calculation that allows

Nun ist die Festsetzung P verschieden vom Satz „ $1 : 3 = 0,3$ “ und in diesem Sinne ist „ $a + (b + c) = (a + b) + c$ “ verschieden von einer Regel (Festsetzung) A. Die beiden gehören andern Kalkülen an. Der Beweis, die Rechtfertigung, einer Regel A ist der Beweis von α , β , γ ¹⁶ *nur* insofern,¹⁷ als er die allgemeine Form der Beweise arithmetischer Sätze von der Form A ist.

Die Periodizität ist nicht das Anzeichen (Symptom) dafür, daß es so weitergeht, aber der Ausdruck „so geht es immer weiter“ ist nur eine Übersetzung in eine andere Ausdrucksweise des periodischen Zeichens.¹⁸ (Gäbe es außer dem periodischen Zeichen noch etwas, wofür die Periodizität nur ein Symptom ist, so müßte dieses Etwas einen spezifischen Ausdruck haben, der nichts anderes wäre, als der vollständige Ausdruck dieses Etwas.)

16 (V): γ ~~ist~~

17 (V): Der Beweis, die Rechtfertigung, einer Ersetzungsregel A ist der rekursive Beweis *nur* insofern,

18 (V): Ausdrucksweise der Periodizität des Zeichens.

The stipulation of P is different from the proposition $1 \div 3 = 0.\dot{3}$, and in that sense “ $a + (b + \dot{c}) = (a + b) + \dot{c}$ ” is different from a rule (stipulation) such as A. The two belong to different calculi. The proof, the justification of a rule like A, is the proof of α, β, γ ¹³ *only* in so far as it is the general form of the proofs of arithmetical propositions of the form A.

Periodicity is not an indication (symptom) that it goes on and on like that; rather, the expression “it goes on like that forever” is only a translation of the sign for periodicity¹⁴ into another form of expression. (If there were something other than the periodic sign of which periodicity was only a symptom, that something would have to have a specific expression, which would be nothing less than the complete expression of that something.)

13 (V): justification of a substitution proof A is a recursive proof 14 (V): translation of the periodicity of the sign

710

Ein Zeichen auf bestimmte Weise sehen, auffassen. Entdecken eines Aspekts eines mathematischen Ausdrucks. „Den Ausdruck in bestimmter Weise *sehen*“. Hervorhebungen.

Ich sprach früher von Verbindungsstrichen, Unterstreichungen, etc. um die korrespondierenden, homologen, Teile der Gleichungen eines Rekursionsbeweises zu zeigen. Im Beweis

$$\begin{cases} a + (b + \overset{\gamma}{1}) = (a + b) + \overset{\alpha}{1} \\ a + (b + (\overset{\delta}{c + 1})) = (a + (b + c)) + \overset{\beta}{1} \\ (a + b) + (\overset{\xi}{c + 1}) = ((a + b) + c) + \overset{\epsilon}{1} \end{cases}$$

¹entspricht z.B. die Eins α nicht der β sondern dem c der nächsten Gleichung; β aber entspricht nicht δ , sondern dem ϵ ; und γ nicht dem δ sondern dem $c + \delta$, etc.

Oder in:

$$\begin{aligned} \overset{\alpha}{\underbrace{\chi \quad \lambda}} + \overset{\beta}{1} &= \overset{\iota}{\underbrace{\quad \quad}} \overset{\epsilon}{\underbrace{\quad \quad}} \overset{\zeta}{\underbrace{\quad \quad}} \\ (a + 1) + 1 &= (a + 1) + 1 \\ \overset{\gamma}{1} + \overset{\delta}{\underbrace{\quad \quad}} &= \overset{\mu}{\underbrace{\quad \quad}} \overset{\eta}{\underbrace{\quad \quad}} \overset{\theta}{\underbrace{\quad \quad}} \\ 1 + (a + 1) &= (1 + a) + 1 \end{aligned}$$

711 ²entspricht nicht ι dem κ und ϵ dem λ , sondern ι dem α und ϵ dem β ; und nicht β dem ζ , aber ζ dem θ und α dem δ und β dem γ und γ dem μ , aber nicht dem θ , u.s.w.

Wie verhält es sich mit einer Rechnung wie:

$$(5+3)^2 = (5+3)(5+3) = 5(5+3) + 3(5+3) = 5 \times 5 + 5 \times 3 + 3 \times 5 + 3 \times 3 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2 \dots \mathbf{R}$$

1 (F): MS 112, S. 10r.

2 (F): MS 112, S. 10r.

Seeing and Understanding a Sign
in a Particular Way.
Discovering an Aspect of
a Mathematical Expression.
“*Seeing* an Expression
in a Particular Way.”
Marks of Emphasis.

Earlier I spoke of the use of connecting lines, underlinings, etc. to show the corresponding, homologous, parts of the equations of a recursive proof. In the proof

$$\left\{ \begin{array}{l} a + (b + \overset{\gamma}{1}) = (a + b) + \overset{\alpha}{1} \\ a + (b + (\underbrace{c + 1}_{\delta})) = (a + (b + c)) + \overset{\beta}{1} \\ (a + b) + (\underbrace{c + 1}_{\epsilon}) = ((a + b) + c) + \overset{\epsilon}{1} \end{array} \right.$$

¹the 1 marked α , for example, doesn't correspond to the 1 marked β but to c in the next equation; and β corresponds not to δ but to ϵ ; and γ not to δ but to $c + \delta$, etc.

Or in

$$\begin{array}{l} \overset{\alpha}{\underbrace{\chi \quad \lambda}} \quad \beta \quad \iota \quad \epsilon \quad \zeta \\ (a + 1) + 1 = (a + 1) + 1 \\ \gamma \quad \underbrace{\delta} \quad \mu \quad \eta \quad \theta \\ 1 + (a + 1) = (1 + a) + 1 \end{array}$$

²doesn't correspond to κ and ϵ doesn't correspond to λ ; rather, ι corresponds to α and ϵ to β ; and β doesn't correspond to ζ , but ζ corresponds to θ , and α to δ and β to γ and γ to μ , not to θ , and so on.

What about a calculation like:

$$(5+3)^2 = (5+3)(5+3) = 5(5+3) + 3(5+3) = 5 \times 5 + 5 \times 3 + 3 \times 5 + 3 \times 3 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2 \dots R$$

1 (F): MS 112, p. 10r.

2 (F): MS 112, p. 10r.

aus welcher wir auch eine allgemeine Regel des Quadrierens eines Binoms herauslesen können?

Wir können diese Rechnung sozusagen arithmetisch und algebraisch auffassen.³

Und dieser Unterschied in der Auffassung träte⁴ z.B. zu Tage, wenn das Beispiel gelautet hätte $(5 + 2)^2 = 5^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 2^2$ ⁵ und wir nun in der algebraischen Auffassung die 2 an den Stellen β einerseits, und an der Stelle α andererseits unterscheiden mußten, während sie in der arithmetischen Auffassung nicht zu unterscheiden wären. Wir betreiben eben – glaube ich – beide Male einen andern Kalkül.

Nach der einen Auffassung wäre z.B. die vorige⁶ Rechnung ein Beweis von $(7+8)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 8 + 8^2$, nach der anderen nicht.

Wir könnten ein Beispiel rechnen, um uns zu vergewissern, daß $(a + b)^2$ gleich $a^2 + b^2 + 2ab$ und nicht $a^2 + b^2 + 3ab$ ist – wenn wir es etwa vergessen hätten; aber wir könnten nicht in diesem Sinn kontrollieren, ob die Formel *allgemein* gilt. Auch *diese* Kontrolle gibt es natürlich und ich könnte in der Rechnung

$$(5 + 3)^2 = \dots = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$$

nachsehen, ob die 2 im zweiten Glied ein allgemeiner Zug der Gleichung ist oder einer, der von den speziellen Zahlen des Beispiels abhängt.

712 Ich mache $(5 + 2)^2 = 5^2 + 2 \times 2 \times 5 + 2^2$ zu einem andern Zeichen, indem ich schreibe:

$$(5 + 2)^2 = 5^{\alpha} + \bar{2} \cdot 2 \cdot 5 + 2^{\beta}$$

und dadurch „andeute, welche Züge der rechten Seite von den besonderen Zahlen der linken herrühren“, etc.

(Ich erkenne jetzt die Wichtigkeit dieses Prozesses der Zuordnung. Er ist der Ausdruck einer neuen Betrachtung der Rechnung und daher der⁷ Betrachtung einer neuen Rechnung.)

Ich muß, um „A zu beweisen“, erst – wie man sagen würde – die Aufmerksamkeit auf ganz bestimmte Züge von⁸ B lenken.⁹ (Wie in der Division $1,0 : 3 = 0,3$.)

1

(Und von dem, was ich dann sehe, hatte das α sozusagen noch gar keine Ahnung.)

Es verhält sich hier zwischen Allgemeinheit und Beweis der Allgemeinheit, wie zwischen Existenz und Existenzbeweis.

Wenn α , β , γ bewiesen sind, muß der allgemeine Kalkül erst erfunden werden.

713 Es kommt uns ganz selbstverständlich vor, auf die Induktionsreihe hin „ $a + (b + c) = (a + b) + c$ “ zu schreiben; weil wir nicht sehen, daß wir damit einen ganz neuen Kalkül beginnen. (Ein Kind, das gerade rechnen lernt, würde in dieser Beziehung klarer sehen als wir.)

3 (V): ansehen.

4 (O): träge

5 (F): MS 112, S. 25r.

6 (V): obige

7 (V): die

8 (V): in

9 (V): auf etwas ganz Bestimmtes richten.

Can we also infer a general rule for the squaring of a binomial from this?

We can understand³ this calculation as it were arithmetically or algebraically.

And this difference between the two ways of looking at it would come out, for example, if the example had been $(5 + 2)^2 = 5^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 2^2$.⁴ And in the algebraic way of looking at it we'd have to distinguish the 2's in the positions marked β , on the one hand, from the 2 in the position marked α , on the other, whereas in the arithmetical way they needn't be distinguished. We are – I believe – simply employing a different calculus in each case.

According to the one, but not the other, way of looking at it, the previous calculation⁵ would for instance be a proof of $(7+8)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 8 + 8^2$.

We could work out an example to make sure that $(a + b)^2$ is equal to $a^2 + b^2 + 2ab$, not to $a^2 + b^2 + 3ab$ – if we had forgotten it, for instance; but we couldn't check in that sense whether the formula holds *generally*. Of course there is *that sort of* check too, and in the calculation

$$(5 + 3)^2 = \dots = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$$

I could check whether the 2 in the second term is a general feature of the equation or something that depends on the particular numbers occurring in this example.

I turn $(5 + 2)^2 = 5^2 + 2 \times 2 \times 5 + 2^2$ into a different sign by writing

$$(5 + 2)^2 = 5^2 + \overset{\alpha}{2} \cdot \overset{\beta}{2} \cdot 5 + \overset{\beta}{2}^2$$

and thus “indicating which features of the right-hand side originate from the particular numbers on the left”, etc.

(Now I recognize the importance of this process of coordination. It expresses a new way of looking at the calculation and therefore a way of looking⁶ at a new calculation.)

In order to “prove A” I must first of all – as we would say – direct attention to very particular features of⁷ B.⁸ (As in the division $1 \cdot 0 \div 3 = 0 \cdot \dot{3}$.)

1

(And α had absolutely no inkling, so to speak, of what I see when I do.)

Here the relationship between generality and proof of generality is like the relationship between existence and proof of existence.

When α , β , γ have been proved, the general calculus still has to be invented.

Writing “ $a + (b + c) = (a + b) + c$ ” in the induction series seems to us a completely obvious thing to do, because we fail to see that in doing so we are starting a totally new calculus. (A child just learning to calculate would see more clearly than we do in this respect.)

3 (V): can look at

4 (F): MS 112, p. 25r.

5 (V): the calculation above

6 (V): therefore is the looking

7 (V): in

8 (V): attention to something quite specific.

Die Hervorhebungen geschehen durch das Schema R und könnten so ausschauen:

$$\left. \begin{array}{l} \overbrace{a + (b + 1)}^{f_1 \quad (1)} = \overbrace{(a + b) + 1}^{f_2 \quad (1)} \\ \overbrace{a + (b + (c + 1))}^{f_1 \quad (c + 1)} = \overbrace{|a + (b + c)| + 1}^{f_1 \quad (c + 1)} \\ \overbrace{(a + b) + (c + 1)}^{f_2 \quad (c + 1)} = \overbrace{|(a + b) + c| + 1}^{f_2 \quad (c + 1)} \end{array} \right\}$$

¹⁰Es hätte aber natürlich auch genügt (d.h. wäre ein Symbol derselben Multiplizität gewesen) B anzuschreiben und dazu:

$$f_1 \xi = a + (b + \xi), \quad f_2 \xi = (a + b) + \xi.$$

(Und dabei ist wieder zu bedenken,¹¹ daß *jedes* Symbol – wie explizit auch immer – mißverstanden werden *kann*. –)

Wer etwa zuerst darauf aufmerksam macht, daß B so gesehen werden kann, der führt ein neues Zeichen ein; ob er nun die Hervorhebungen mit B verbindet oder auch das Schema R daneben schreibt. Denn dann ist eben R das neue Zeichen. Oder, wenn man will, auch B zusammen mit R. Die Weise, wie er darauf aufmerksam gemacht hat, gibt das neue Zeichen.

Man könnte etwa sagen: Hier wurde die untere Gleichung als $a + b = b + a$ gebraucht; und analog: hier wurde B als A gebraucht, wobei B aber gleichsam der Quere nach gelesen wurde. Oder: B wurde als A gebraucht, aber das neue Zeichen¹² wird aus α & β & γ so zusammengestellt, daß, indem man nun A aus B herausliest, α & β & γ nicht in jener Art von Verkürzung erscheint,¹³ in der man die Prämisse im Folgesatz vor sich hat.¹⁴

Was heißt es nun: „ich mache Dich drauf aufmerksam, daß hier in beiden Funktionszeichen das gleiche Zeichen¹⁵ steht (vielleicht hast Du es nicht bemerkt)“? Heißt das, daß er den Satz nicht verstanden hatte? – Und doch hat er etwas nicht bemerkt, was wesentlich zum Satz gehörte; nicht etwa (so), als hätte er eine externe Eigenschaft des Satzes nicht bemerkt. (Hier sieht man wieder, welcher Art das ist, was man „verstehen eines Satzes“ nennt.)

Der Vergleich vom längs und quer Durchlaufen ist wieder ein *logisches* Bild und darum nicht als unverbindliches Gleichnis über die Achsel anzusehen,¹⁶ sondern ein korrekter Ausdruck einer grammatischen Tatsache.¹⁷

Wenn ich sagte, das neue Zeichen mit den Hervorhebungen müsse ja doch aus dem alten ohne die Hervorhebungen abgeleitet sein,¹⁸ so heißt das nichts, weil ich ja das Zeichen mit den Hervorhebungen abgesehen von seiner Entstehung betrachten kann. Es stellt sich mir dann (Frege) dar, als drei Gleichungen, d.h., als die Figur dreier Gleichungen mit gewissen Unterstreichungen etc.

10 (F): MS 112, S. 41r.

11 (V): anzumerken,

714 12 (V): aber die neue Gleichung // der neue Satz

13 (V): so zusammengestellt, daß, indem man nun A aus B herausliest, man nicht α & β & γ in jener Art von Verkürzung liest,

14 (V): im Folgesatz liest.

15 (V): Argument

16 (V): und darum nicht ein unverbindliches Gleichnis,

17 (V₁): Ausdruck eines grammatischen Verhältnisses. (V₂): Das Bild vom längs und quer Durchlaufen ist natürlich wieder ein *logisches* Bild und darum ein ganz exakter Ausdruck eines grammatischen Verhältnisses. Es ist also nicht davon zu sagen: „das ist ein bloßes Gleichnis, wer weiß, wie es sich in der Wirklichkeit verhält“.

18 (V): Hervorhebungen entstehen,

Emphases are brought out by the schema R, and they might look like this:

$$\left. \begin{aligned} \overbrace{a + (b + 1)}^{f_1} &= \overbrace{(a + b) + 1}^{f_2} \\ \overbrace{a + (b + (c + 1))}^{f_1} &= \overbrace{|a + (b + c)| + 1}^{f_1} \\ \overbrace{(a + b) + (c + 1)}^{f_2} &= \overbrace{|(a + b) + c| + 1}^{f_2} \end{aligned} \right\}$$

⁹Of course it would also have been enough (i.e. it would have been a symbol of the same multiplicity) if we had written B and added

$$f_1\xi = a + (b + \xi), \quad f_2\xi = (a + b) + \xi.$$

(And here again we must bear in mind¹⁰ that *every* symbol – however explicit – *can* be misunderstood. –)

Whoever first draws attention to the fact that B can be seen in that way introduces a new sign, whether he attaches the marks of emphasis to B or writes the schema R beside it. For then it is simply R that is the new sign. Or, if you prefer, B together with R. It is the way in which he has drawn attention to this that produces the new sign.

We could say, for instance, that here the lower equation was used as $a + b = b + a$; and analogously that here B – being read crosswise as it were – was used as A. Or that B was used as A, but the new sign¹¹ was put together from α & β & γ , in such a way that in now reading A out of B, α & β & γ doesn't appear in the sort of abbreviation in which the premiss turns up in the conclusion.¹²

What does it mean to say: “I am drawing your attention to the fact that the same sign¹³ occurs here in both function signs (perhaps you didn't notice it)”? Does that mean that he hadn't understood the proposition? – For what he failed to notice was an essential part of the proposition; (so) it's *not* as if he just hadn't noticed some external property of the proposition. (Here again we see what kind of thing it is that is called “understanding a proposition”).

The simile of reading a sign lengthways and sideways is once again a *logical* image, and for that reason it must not be looked down upon as an arbitrary comparison; rather¹⁴, it's a correct expression of a grammatical fact.¹⁵

When I said that the new sign with the marks of emphasis had to be derived¹⁶ from the old one without the marks, that means nothing, because of course I can think about the sign with the marks without regard to its origin. In that case it presents itself to me as three equations (Frege), that is, in the form of three equations with certain underlinings, etc.

9 (F): MS 112, p. 41r.

10 (V): must note

11 (V): the new equation // the new proposition

12 (V): in now reading A out of B, one doesn't read α & β & γ in the sort of abbreviation in which one finds // reads // the premiss in the conclusion.

13 (V): argument

14 (V): image, and therefore not an arbitrary comparison, but

15 (V₁): of a grammatical relationship. (V₂):

The simile of reading a sign lengthways and sideways is once again a *logical* image, and for that reason is a completely exact expression of a grammatical relationship. Therefore one cannot say of it: “That is a mere simile, who knows how things are in reality?”

16 (V): had to arise

Daß diese Figur ganz analog der der drei Gleichungen ohne den Unterstreichungen ist, ist allerdings bedeutsam, wie es ja auch bedeutsam ist, daß die Kardinalzahl 1 und die Rationalzahl 1 analogen Regeln unterworfen sind, aber es hindert nicht, daß wir hier ein neues¹⁹ Zeichen haben.

Ich treibe jetzt etwas ganz Neues mit diesem Zeichen.

Verhält es sich hier nicht so, wie in dem Fall, den ich einmal annahm, daß der Kalkül der Wahrheitsfunktionen von Frege und Russell mit der Kombination $\sim p \ \& \ \sim q$ der Zeichen „ \sim “ und „ $\&$ “ betrieben worden wäre, ohne daß man das gemerkt hätte, und daß nun Sheffer,²⁰ statt eine neue Definition zu geben, nur auf eine Eigentümlichkeit der bereits benützten Zeichen aufmerksam gemacht hätte.

Man hätte immer dividieren²¹ können, ohne je auf die Periodizität aufmerksam zu werden. Hat man sie gesehen, so hat man etwas Neues gesehen.

Könnte man das aber dann nicht ausdehnen und sagen: ich hätte Zahlen miteinander multiplizieren können, ohne je auf den Spezialfall aufmerksam zu werden, in dem ich eine Zahl mit sich selbst multipliziere, und also ist x^2 nicht einfach $x \cdot x$. Die Schaffung des Zeichens „ x^2 “ könnte man den Ausdruck dafür nennen, daß man auf diesen Spezialfall aufmerksam geworden ist. Oder, man hätte (immer) a mit b multiplizieren und durch c dividieren können, ohne darauf aufmerksam zu werden, daß man „ $\frac{a \cdot b}{c}$ “ auch „ $a \cdot \frac{b}{c}$ “ schreiben kann und daß das analog $a \cdot b$ ist. Und weiter: das ist doch der Fall des Wilden, der die Analogie zwischen $||||$ und $|||||$ noch nicht sieht,²² oder die, zwischen $||$ und $|||||$.

716 $[(a + (b + 1)) \overset{\alpha}{=} (a + b) + 1] \ \& \ [a + (b + (c + 1)) \overset{\beta}{=} (a + (b + c)) + 1] \ \& \ [(a + b) + (c + 1) \overset{\gamma}{=} ((a + b) + c) + 1] \ .\underline{\text{Def.}} \ (a + (b + c)) \ .\mathfrak{S} \ .((a + b) + c) \ . . . \ \text{U}$
und allgemein:

$$[f_1(1) \overset{\rho}{=} f_2(1)] \ \& \ [f_1(c + 1) \overset{\beta}{=} f_1(c) + 1] \ \& \ [f_2(c + 1) \overset{\gamma}{=} f_2(c) + 1] \ .\underline{\text{Def.}} \\ f_1(c) \ .\mathfrak{S} \ .f_2(c) \ . . . \ \text{V}.$$

²³Man könnte die Definition U sehen, ohne zu wissen, *warum* ich so abkürze.²⁴

Man könnte die Definition sehen, ohne ihren Witz zu verstehen. – Aber dieser Witz ist eben etwas Neues, das in ihr als spezieller Ersetzungsregel noch nicht liegt.

Auch ist „ \mathfrak{S} “ natürlich kein Gleichheitszeichen, in dem Sinn wie sie in α , β und γ stehen.

Aber man kann leicht zeigen, daß \mathfrak{S} gewisse formale Eigenschaften mit $=$ gemeinsam hat.

Es wäre – nach den angenommenen Regeln – falsch, das Gleichheitszeichen *so* zu gebrauchen:

$$[(a + b)^2 = a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b) = . . . \\ = a^2 + 2ab + b^2] \ .\text{=} \ [(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2] \ \ \Delta$$

wenn damit gemeint sein soll, daß die linke Seite der Beweis der rechten ist.

Könnte man sich aber nicht diese Gleichung als Definition aufgefaßt denken? Wenn es z.B. immer Gebrauch gewesen wäre, statt der rechten Seite die ganze Kette hinzuschreiben,²⁵ und man nun die Abkürzung einführt.

717

19 (V): anderes

20 (O): Scheffer,

21 (O): Dividieren

22 (V): sieht, ~~aber~~

23 (F): MS 112, S. 45r.

24 (V): definiere.

25 (V): anzuschreiben,

It is indeed significant that this form is completely analogous to that of the three equations without the underlinings; as it is also significant that the cardinal number 1 and the rational number 1 are governed by analogous rules; but that doesn't stand in the way of the fact that here we have a new¹⁷ sign.

I am now doing something completely new with this sign.

Isn't this like the supposition I once made that the Frege–Russell calculus of truth-functions might have been operated with the signs “~” and “&” combined into “~p & ~q” without anyone noticing, and that then Sheffer, instead of giving a new definition, would merely have drawn attention to a peculiarity of the signs already in use?

We could have gone on dividing without ever becoming aware of periodicity. Once we've seen it, we've seen something new.

But couldn't we extend that and say “I could have multiplied numbers by each other without ever noticing the special case in which I multiply a number by itself; and that means that x^2 is not simply $x \cdot x$ ”? We could call the creation of the sign “ x^2 ” the expression of our having become aware of that special case. Or, we could have gone on multiplying a by b and dividing it by c without noticing that we could also write “ $\frac{a \cdot b}{c}$ ” as “ $a \cdot \frac{b}{c}$ ”, and that the latter is analogous to $a \cdot b$. Or again: this *is* what happens to a savage who doesn't yet see the analogy between |||| and |||||, or between || and |||||.

$$[(a + (b + 1)) \overset{\alpha}{=} (a + b) + 1] \& [a + (b + (c + 1)) \overset{\beta}{=} (a + (b + c)) + 1] \& [(a + b) + (c + 1) \overset{\gamma}{=} ((a + b) + c) + 1] \overset{\text{Def.}}{=} (a + (b + c)) \overset{\mathfrak{S}}{=} ((a + b) + c) \dots \text{U}$$

and in general:

$$[f_1(1) \overset{\rho}{=} f_2(1)] \& [f_1(c + 1) \overset{\beta}{=} f_1(c) + 1] \& [f_2(c + 1) \overset{\gamma}{=} f_2(c) + 1] \overset{\text{Def.}}{=} f_1(c) \overset{\mathfrak{S}}{=} f_2(c) \dots \text{V.}$$

¹⁸You could see the definition U without knowing *why* I'm abbreviating¹⁹ things in this way.

You could see the definition without understanding its point. – But its point is something *new*, something that is not yet contained in the definition as a specific replacement rule.

Of course, “ \mathfrak{S} ” isn't an equals sign either, in the same sense as the ones occurring in α , β , and γ .

But we can easily show that \mathfrak{S} has certain formal properties in common with =.

It would be incorrect – according to the usual rules – to use the equals sign like *this*:

$[(a+b)^2 = a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b) = \dots = a^2 + 2ab + b^2] \overset{.}{=} [(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2] \dots \Delta$
if that is supposed to mean that the left-hand side is the proof of the right.

But couldn't we imagine that this equation were understood as a definition? For instance, if it had always been the custom to write down the whole chain instead of the right-hand side, and we now introduced the abbreviation.

17 (V): different

18 (F): MS 112, p. 45r.

19 (V): defining

Freilich *kann*²⁶ Δ als Definition aufgefaßt werden! Denn das linke Zeichen wird tatsächlich gebraucht, und warum sollte man es dann nicht²⁷ nach dieser Übereinkunft abkürzen.²⁸ Nur gebraucht man dann das rechte oder linke Zeichen anders, als es jetzt üblich ist.²⁹

Es ist nie genügend hervorgehoben worden, daß *ganz verschiedene* Arten von Zeichenregeln in der Form der Gleichung geschrieben werden.

Die „Definition“ $x \cdot x = x^2$ könnte³⁰ so aufgefaßt werden, daß sie nur erlaubt, statt des Zeichens „ $x \cdot x$ “ das Zeichen „ x^2 “ zu setzen, also analog der Definition $1 + 1 = 2$; aber auch so (und so wird sie tatsächlich aufgefaßt), daß sie erlaubt, a^2 statt $a \cdot a$, und $(a + b)^2$ statt $(a + b) \cdot (a + b)$ zu setzen; auch so, daß für das x jede beliebige Zahl eintreten kann.

Wer entdeckt, daß ein Satz p aus einem von der Form $q \supset p$ & q folgt, der konstruiert ein neues Zeichen, das Zeichen dieser Regel. (Ich nehme dabei an, ein Kalkül mit p , q , \supset , &, sei schon früher gebraucht worden, und nun träte diese Regel hinzu und schaffe damit einen neuen Kalkül.)

- 718 In der Notation „ x^2 “ verschwindet ja wirklich die Möglichkeit, den einen der Faktoren x ³¹ durch eine andere Zahl zu ersetzen. Ja, es wären zwei Stadien der Entdeckung (oder Konstruktion) von x^2 denkbar. Daß man etwa zuerst statt „ x^2 “ „ x^x “ setzt, ehe es Einem nämlich auffällt, daß es das System $x \cdot x$, $x \cdot x \cdot x$, etc. gibt, und daß man dann erst hierauf kommt. Ähnliches ist in der Mathematik unzählige Male vorgekommen. (Liebig bezeichnete ein Oxyd noch nicht so, daß der Sauerstoff in der Notation³² als Element wie das oxydierte³³ auftrat. Und, so seltsam das klingt, man könnte auch mit allen uns heute bekannten Daten dem Sauerstoff durch eine ungeheuer³⁴ künstliche Interpretation – d.h. grammatische Konstruktion – eine solche Ausnahmestellung verschaffen; natürlich nur in der *Form der Darstellung*.)

Mit den Definitionen $x \cdot x = x^2$, $x \cdot x \cdot x = x^3$ kommen nur die Zeichen „ x^2 “ und „ x^3 “ zur Welt (und so weit war es noch nicht nötig, Ziffern als Exponenten zu schreiben).

|Der Prozeß der Verallgemeinerung³⁵ schafft ein neues Zeichensystem. |

- 719 Sheffers³⁶ Entdeckung ist natürlich nicht die der Definition $\sim p$ & $\sim q = p | q$. Diese Definition hätte Russell sehr wohl haben können, ohne doch damit das Sheffer'sche³⁷ System zu besitzen, und andererseits hätte Sheffer³⁸ auch ohne diese Definition sein System begründen können. Sein System ist ganz in dem Zeichen „ $\sim p$ & $\sim q$ “ für „ $\sim p$ “ und „ $\sim(\sim p$ & $\sim q)$ “ & $\sim(\sim p$ & $\sim q)$ “ für „ $p \vee q$ “ enthalten und „ $p | q$ “ gestattet nur eine *Abkürzung*. Ja, man kann sagen, daß einer sehr wohl hätte das Zeichen „ $\sim(\sim p$ & $\sim q)$ “ & $\sim(\sim p$ & $\sim q)$ “ für „ $p \vee q$ “ kennen können, ohne das System $(p | q) | (p | q)$ in ihm zu erkennen.

Machen wir die Sache noch klarer durch die Annahme der beiden Frege'schen Urzeichen „ \sim “ und „&“, so bleibt hier die Entdeckung bestehen, wenn auch die Definitionen

26 (V): ~~kann~~

27 (V): es nicht

28 (V): nicht durch das rechte ersetzen.

29 (V₁): als wir es jetzt gebrauchen. (V₂): Nur gebraucht man dann dieses oder jenes anders, als es jetzt üblich ist.

30 (V): kann

31 (V): Möglichkeit, das eine der x

32 (V): Sauerstoff darin

33 (V): als gleichwertes Element mit dem oxydierten

34 (O): ungeheuer

35 (V): Generalisation

36 (O): Sheffers

37 (O): Sheffer'sche

38 (O): Sheffer

Of course Δ *can*²⁰ be regarded as a definition! For the sign on the left-hand side is in fact used, and why shouldn't we then abbreviate²¹ it according to this convention?²² It's just that in that case either the sign on the right or the sign on the left²³ is used in a different way from the usual one.²⁴

It has never been sufficiently emphasized that *totally different* kinds of rules for signs get written in the form of an equation.

The "definition" $x \cdot x = x^2$ could²⁵ be understood as merely allowing us to replace the sign " $x \cdot x$ " by the sign " x^2 ", i.e. in analogy to the definition " $1 + 1 = 2$ "; but it could also be understood (and in fact is understood) as allowing us to replace $a \cdot a$ with a^2 , and $(a + b) \cdot (a + b)$ with $(a + b)^2$; and it could also be understood in such a way that any arbitrary number could be substituted for the x .

Whoever discovers that a proposition p follows from one of the form $q \supset p \ \& \ q$ constructs a new sign, the sign for that rule. (Here I'm assuming that a calculus with p , q , \supset , $\&$, has already been in use, and that this rule is now added to create a new calculus.)

In the notation " x^2 " the possibility of replacing one of the factors x ²⁶ by another number really does vanish. Indeed, we could imagine two stages in the discovery (or construction) of x^2 . Perhaps at first people write " $x^=$ " instead of " x^2 ", i.e. before they notice that there is the system $x \cdot x$, $x \cdot x \cdot x$, etc.; and only then do they hit upon the latter notation. Similar things have occurred in mathematics countless times. (When Liebig designated an oxide, oxygen did not appear in his notation as an element in the same way as²⁷ what was oxidized. And, odd as it sounds, even with all the data known to us today, we could – via an incredibly artificial interpretation, that is to say, grammatical construction – give oxygen such a privileged position; only, of course, in the *form of its representation*.)

All that the definitions $x \cdot x = x^2$, $x \cdot x \cdot x = x^3$ bring into the world are the signs " x^2 " and " x^3 " (and until they did it wasn't necessary to write numbers as exponents).

| The process of generalization creates a new system of signs. |

Of course Sheffer's discovery is not the discovery of the definition $\sim p \ \& \ \sim q = p \ | \ q$. Russell could very well have had that definition without thereby being in possession of Sheffer's system, and on the other hand Sheffer could have established his system even without this definition. His system is completely contained in the use of the signs " $\sim p \ \& \ \sim p$ " for " $\sim p$ " and " $\sim(\sim p \ \& \ \sim q) \ \& \ \sim(\sim p \ \& \ \sim q)$ " for " $p \ \vee \ q$ ", and all " $p \ | \ q$ " does is to permit an *abbreviation*. Indeed, we can say that someone could very well have been acquainted with the use of the sign " $\sim(\sim p \ \& \ \sim q) \ \& \ \sim(\sim p \ \& \ \sim q)$ " for " $p \ \vee \ q$ " without recognizing the system $(p \ | \ q) \ | \ (p \ | \ q)$ in it.

If we make matters clearer still by adopting Frege's two primitive signs " \sim " and " $\&$ ", then the discovery still stands, even if the definitions are written $\sim p \ \& \ \sim p = \sim p$ and

20 (V): ~~can~~

21 (V): we abbreviate

22 (V): we then replace it with the one on the right?

23 (V): either the latter or the former

24 (V): from the way we use it now.

25 (V): can

26 (V): one of the x 's

27 (V): appear there as an element equivalent to

geschrieben werden, $\sim p \ \& \ \sim p = \sim p$ und $\sim(\sim p \ \& \ \sim p) \ \& \ \sim(\sim q \ \& \ \sim q) = p \ \& \ q$. Hier hat sich an den Urzeichen scheinbar gar nichts geändert.

Man könnte sich auch denken, daß jemand die ganze Frege'sche oder Russell'sche Logik schon in diesem System hingeschrieben hätte und doch, wie Frege, „ \sim “ und „ $\&$ “ seine Urzeichen nannte, weil er das andere System in seinen Sätzen nicht sähe.

Es ist klar, daß die Entdeckung des Sheffer'schen³⁹ Systems in $\sim p \ \& \ \sim p = \sim p$ und $\sim(\sim p \ \& \ \sim p) \ \& \ \sim(\sim q \ \& \ \sim q) = p \ \& \ q$ der Entdeckung entspricht, daß $x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ ein Spezialfall von $a^2 + 2ab + b^2$ ist.

Daß etwas so angesehen werden kann, sieht man erst, wenn es so angesehen ist.

Daß ein Aspekt möglich ist, sieht man erst, wenn er da ist.

Das klingt, als könnte die Sheffer'sche⁴⁰ Entdeckung gar nicht in Zeichen dargestellt werden (periodische Division).⁴¹ Aber das liegt daran, daß man die *Anwendung*⁴² des Zeichens in seiner Einführung nicht vorausnehmen⁴³ kann (die Regel ist und bleibt ein Zeichen und von ihrer Anwendung getrennt).

Die allgemeine Regel für den Induktionsbeweis kann ich natürlich nur dann anwenden, wenn ich die Substitution entdecke, durch die sie anwendbar wird. So wäre es möglich, daß einer die Gleichungen

$$(a + 1) + 1 = (a + 1) + 1$$

$$1 + (a + 1) = (1 + a) + 1$$

sähe, ohne auf die Substitution

$$a = x, \underbrace{F_1(x) = x + 1}, \underbrace{F_1(x + 1) = (x + 1) + 1}, \underbrace{F_2(x + 1) = 1 + (x + 1)}, \underbrace{F_2(x) = 1 + x}$$

⁴⁴zu kommen.

Wenn ich übrigens sage, ich *verstehe* die Gleichungen als besondern Fall jener Regel, so muß doch das Verständnis das sein, was sich in der Erklärung der Beziehung zwischen der Regel und den Gleichungen zeigt, also, was wir durch die Substitutionen ausdrücken. Sehe ich diese nicht als einen Ausdruck dessen an, was ich verstehe, dann gibt es keinen; aber dann hat es auch keinen Sinn, von einem Verständnis zu reden, zu sagen, ich verstehe etwas Bestimmtes. Denn nur dort hat es Sinn, vom Verstehen zu reden, wo wir *eines* verstehen, im Gegensatz zu etwas anderem. Und diesen Gegensatz⁴⁵ drücken eben Zeichen aus.

Ja, das Sehen der internen Beziehung kann nur wieder das Sehen von etwas sein, das sich beschreiben läßt, wovon man sagen kann, „ich sehe, daß es sich so verhält“, also wirklich etwas von der Natur der Zuordnungszeichen⁴⁶ (wie Verbindungsstriche, Klammern, Substitutionen, etc.). Und alles andere kann nur in der Anwendung des Zeichens der allgemeinen Regel in einem besonderen Fall liegen.

721 Es ist, als entdeckten wir an gewissen Körpern, die vor uns liegen, Flächen, mit denen sie aneinandergereiht werden können. Oder vielmehr, als entdeckten wir, daß sie mit den

39 (O): Scheffer'schen

40 (O): Scheffer'sche

41 (O): werden. (periodische Division)

42 (V): Verwendung

43 (O): voraus nehmen

44 (F): MS 111, S. 148.

45 (V): Und dies

46 (V): von der Natur der Zeichen der Zuordnung

$\sim(\sim p \ \& \ \sim p) \ \& \ \sim(\sim q \ \& \ \sim q) = p \ \& \ q$. Here apparently nothing at all has changed in the primitive signs.

We could also imagine that someone had already written the whole Fregean or Russellian logic in this system, and yet, like Frege, called “ \sim ” and “ $\&$ ” his primitive signs, because he didn’t see the other system in his propositions.

It’s clear that the discovery of Sheffer’s system in $\sim p \ \& \ \sim p = \sim p$ and $\sim(\sim p \ \& \ \sim p) \ \& \ \sim(\sim q \ \& \ \sim q) = p \ \& \ q$ corresponds to the discovery that $x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ is a special case of $a^2 + 2ab + b^2$.

We don’t see that something can be looked at in a certain way until it has been so looked at.

We don’t see that an aspect is possible until it is there.

That sounds as if Sheffer’s discovery couldn’t even be represented in signs (periodic division). But that’s because we can’t anticipate the *use*²⁸ of the sign in its introduction (the rule is and remains a sign, separated from its application).

Of course I can only apply the general rule for the induction proof if I discover the substitution that makes it applicable. So it would be possible for someone to see the equations

$$(a + 1) + 1 = (a + 1) + 1$$

$$1 + (a + 1) = (1 + a) + 1$$

without arriving at the substitution²⁹

$$a = x, \underbrace{F_1(x)} = x + 1, \underbrace{F_1(x + 1)} = (x + 1) + 1, \underbrace{F_2(x + 1)} = 1 + (x + 1), \underbrace{F_2(x)} = 1 + x$$

Incidentally, when I say that I *understand* the equations as particular cases of that rule, my understanding has to be an understanding that shows itself in the explanation of the relation between the rule and the equations, i.e. what we express by the substitutions. If I don’t regard that as an expression of what I understand, then there is no such expression; but then neither does it make any sense to speak of understanding, to say that I understand something specific. For it only makes sense to speak of understanding in cases where we understand *one* thing, as opposed to something else. And it is this contrast that³⁰ signs express.

Indeed, seeing the internal relation can in its turn only be seeing something that can be described, something of which one can say: “I see that this is the way things are”; so really it can only be something like the signs for correlations (such as connecting lines, brackets, substitutions, etc.). And everything else has to be contained in the application of the sign for the general rule in a particular case.

It’s as if there were certain solid objects lying in front of us, and we discovered surfaces on them which enabled us to place them in a continuous row. Or rather, as if we discovered

28 (V): application

30 (V): this that

29 (F): MS 111, p. 148.

und den Flächen, die wir auch schon früher gesehen⁴⁷ hatten, aneinandergereiht werden können. Es ist das die Art der Lösung vieler Spiele oder Rätselfragen.

Der, welcher⁴⁸ die Periodizität entdeckt, erfindet einen neuen Kalkül. Die Frage ist, wie unterscheidet sich der Kalkül mit der periodischen Division von dem Kalkül, der die Periodizität nicht kennt?

(Wir hätten einen Kalkül mit Würfeln betreiben können, ohne je auf die Idee zu kommen, sie zu Prismen aneinanderzureihen.)

47 (V): gekannt

48 (V): der

that by using certain surfaces, which we had seen³¹ before, we could place them in a continuous row. That's the way many games or puzzles are solved.

The person who discovers periodicity invents a new calculus. The question is, how does the calculus with periodic division differ from the calculus in which periodicity is unknown?

(We could have operated a calculus with cubes without ever hitting upon the idea of combining them to make prisms.)

31 (V): known

Der Induktionsbeweis, Arithmetik und Algebra.

Wozu brauchen wir denn das kommutative Gesetz? Doch nicht, um die Gleichung $4 + 6 = 6 + 4$ anschreiben zu können, denn diese Gleichung wird durch ihren besonderen Beweis gerechtfertigt. Und es kann freilich auch der Beweis des kommutativen Gesetzes als ihr Beweis verwendet werden, aber dann ist er eben jetzt¹ ein spezieller (arithmetischer) Beweis. Ich brauche das Gesetz also, um danach mit Buchstaben zu operieren.

Und diese Berechtigung kann mir der Induktionsbeweis nicht geben.

Aber eines ist klar: Wenn uns der Rekursionsbeweis das Recht gibt, algebraisch zu rechnen, dann gibt uns auch der arithmetische Beweis L dieses Recht.²

Auch so: Der Rekursionsbeweis hat es – natürlich³ – wesentlich mit Zahlen zu tun. Aber was gehen mich die an, wenn ich rein algebraisch operieren will. Oder: Der Rekursionsbeweis ist nur dann zu benützen,⁴ wenn ich durch ihn einen⁵ Übergang in einer Zahlenrechnung rechtfertigen will.

723 Man könnte nun aber fragen: Also brauchen wir (*beide*): *sowohl* den Induktionsbeweis *als auch* das assoziative Gesetz, da ja dieses Übergänge der Zahlenrechnung nicht begründen kann, und jener nicht Transformationen in der Algebra?

Ja, hat man (denn) vor den Skolem'schen Beweisen das assoziative Gesetz – z.B. – hingenommen, ohne den entsprechenden Übergang in einer Zahlenrechnung durch Rechnung ausführen⁶ zu können? D.h.: konnte man vorher $5 + (4 + 3) = (5 + 4) + 3$ nicht ausrechnen, sondern hat es als Axiom betrachtet?

Wenn ich sage, die periodische Zahlenrechnung beweist den Satz, der mich zu jenen Übergängen berechtigt, wie hätte dieser Satz gelautet, wenn man ihn als Axiom angenommen und nicht bewiesen hätte?

Wie hätte der Satz gelautet, nach welchem ich $5 + (7 + 9) = (5 + 7) + 9$ gesetzt hätte, ohne es beweisen zu können? Es ist doch offenbar, daß es so einen Satz nie gegeben hat.

Könnte man auch so sagen: In der Arithmetik wird das assoziative Gesetz überhaupt nicht gebraucht, sondern da arbeiten wir (nur) mit besonderen Zahlenrechnungen.

Und die Algebra, auch wenn sie sich der arithmetischen Notation bedient, ist ein ganz anderer Kalkül, und nicht aus dem arithmetischen abzuleiten.

1 (V): (hier)

2 (V): dann auch der arithmetische Beweis L.

3 (V): offenbar

4 (V): gebrauchen,

5 (V): ich mit ihm den

6 (V): begründen

Proof by Induction, Arithmetic and Algebra.

What do we need the commutative law for, anyway? Surely not so as to be able to write the equation $4 + 6 = 6 + 4$, because that equation is justified by its own particular proof. And to be sure, the proof of the commutative law can also be used to prove it, but in that case it¹ is simply a particular (arithmetical) proof. So the reason I need the law is to apply it to operations with letters.

And it is this justification that the inductive proof cannot give me.

But one thing is clear: if the recursive proof gives us the right to calculate algebraically, then the arithmetical proof L gives us this right too.²

Again: Of course³ the recursive proof deals essentially with numbers. But of what concern are they to me if I want to operate purely algebraically? Or again: The recursive proof is only to be used if I want to justify a step in a number-calculation with it.

But now someone could ask: So we need *both*, don't we? The inductive proof *as well as* the associative law, since the latter can't justify steps in numerical calculations, and the former can't justify transformations in algebra.

But before Skolem developed his proofs, did we really just accept the associative law, for example, without anyone's being able to figure out⁴ the corresponding step in a numerical calculation? That is, were we previously unable to figure out $5 + (4 + 3) = (5 + 4) + 3$, and did we view it instead as an axiom?

If I say that the periodic calculation proves the proposition that justifies me in those steps, then how would this proposition have read if it had been accepted as an axiom, and hadn't been proved?

How would the proposition have read, following which I would have postulated $5 + (7 + 9) = (5 + 7) + 9$ without being able to prove it? It's quite obvious that there has never been such a proposition.

Could we also put it like this: In arithmetic the associative law isn't used at all; there we work (only) with particular number calculations?

And even when algebra uses arithmetical notation, it's a totally different calculus, and it can't be derived from the arithmetical one.

1 (V): case (here) it

2 (V): then so does the arithmetical proof L.

3 (V): Again: obviously

4 (V): to justify

724 Auf die Frage „ist $5 \times 4 = 20$?“ könnte man antworten: „sehen wir nach, ob es mit den Grundregeln der Arithmetik übereinstimmt“; und entsprechend könnte ich sagen: sehen wir nach, ob A mit den Grundregeln übereinstimmt. Aber mit welchen? Nun, wohl mit α .

Aber zwischen α und A liegt eben die Notwendigkeit einer Festsetzung darüber, was wir hier „Übereinstimmung“ nennen wollen.

D.h. zwischen α und A liegt die Kluft von⁷ Arithmetik und⁸ Algebra, und wenn B als Beweis von A gelten soll, so muß diese (Kluft) durch eine Bestimmung überbrückt werden.

Nun ist ganz klar, daß wir Gebrauch von so einer Idee der Übereinstimmung machen, wenn wir uns nur z.B. rasch ein Zahlenbeispiel ausrechnen, um dadurch die Richtigkeit eines algebraischen Satzes zu kontrollieren.

Und in diesem Sinne könnte ich z.B. rechnen $\frac{25}{25} \times 16$ $\frac{16}{32} \times 25$
 $\frac{150}{400}$ $\frac{80}{400}$

und sagen: „ja, ja, es stimmt, $a \times b$ ist gleich $b \times a$ “ – wenn ich mir vorstelle, daß ich das vergessen hätte.

725 A, als Regel für das algebraische Rechnen, kann nicht rekursiv bewiesen werden; das würde man besonders klar sehen, wenn man den „rekursiven Beweis“ als eine Reihe arithmetischer Ausdrücke hinschriebe. Denkt man sie sich hingeschrieben (d.h. ein Reihenstück mit dem „u.s.w.“), aber ohne die Absicht irgend etwas zu „beweisen“, und nun fragte Einer: „beweist dies $a + (b + c) = (a + b) + c$?“, so würden wir erstaunt zurückfragen: „wie kann es denn so was beweisen? in der Reihe kommen doch nur Ziffern und keine Buchstaben vor!“ – Wohl aber könnte man nun sagen: Wenn ich für das Buchstabenrechnen die Regel A einführe, so kommt dieser Kalkül dadurch in einem bestimmten Sinn in Einklang mit dem Kalkül der Kardinalzahlen, wie ich ihn durch das Gesetz der Additionsregeln (rekursive Definition $a + (b + 1) = (a + b) + 1$) festgelegt habe.

7 (V): von der

8 (V): zur

If you were asked “Is $5 \times 4 = 20$ ”?, you could answer: “Let’s check whether this agrees with the basic rules of arithmetic”, and in the same way I could say: “Let’s check whether A agrees with the basic rules”. But with which basic rules? Well, presumably with α .

But in the case of the relation between α and A we do need to define what we want to call “agreement”.

That means that between α and A there lies the gulf between arithmetic and algebra, and if B is to count as a proof of A, this (gulf) has to be bridged by a definition.

Now it’s quite clear that we do use such an idea of agreement when, for instance, we proceed quickly to work out a numerical example in order to check the correctness of an algebraic proposition.

$$\begin{array}{r} \text{And in this sense I could calculate, for example } 25 \times 16 \quad 16 \times 25 \\ \underline{25} \qquad \qquad \underline{32} \\ \underline{150} \qquad \qquad \underline{80} \\ 400 \qquad \qquad 400 \end{array}$$

and say: “Oh yes, that’s right, $a \times b$ is equal to $b \times a$ ” – supposing I had forgotten that.

As a rule for algebraic calculation, A cannot be proved recursively. We would see that especially clearly if we wrote down the “recursive proof” as a series of arithmetical expressions. Imagine them written down (i.e. a fragment of the series, plus “and so on”) but without the intention of “proving” anything, and now suppose someone asks: “Does this prove $a + (b + c) = (a + b) + c$?”. We would respond in astonishment: “How *can* it prove anything of the kind? After all, the series contains only numbers, and no letters!”. But no doubt we would then say: If I introduce A as a rule for calculation with letters, in a certain sense that brings this calculus into unison with the calculus of the cardinal numbers, the calculus I established by the law for the rules of addition (the recursive definition $a + (b + 1) = (a + b) + 1$).

**Das Unendliche
in der Mathematik.
Extensive Auffassung.**

The Infinite in Mathematics. The Extensional Viewpoint.

Allgemeinheit in der Arithmetik.

„Welchen Sinn hat ein Satz der Art $(\exists n).3 + n = 7$?“ Man ist hier in einer seltsamen Schwierigkeit: einerseits empfindet man es als Problem, daß der Satz die Wahl zwischen unendlich vielen Werten von n hat, andererseits scheint uns der Sinn des Satzes in sich gesichert und nur für uns (etwa) noch zu erforschen, da wir doch „wissen, was $(\exists x).\phi x$ “ bedeutet“. Wenn Einer sagte, er wisse nicht, welchen Sinn „ $(\exists n).3 + n = 7$ “ habe,¹ so würde man ihm antworten: „aber Du weißt doch, was dieser Satz sagt: $3 + 0 = 7$. \vee . $3 + 1 = 7$. \vee . $3 + 2 = 7$ und so weiter!“ Aber darauf kann man antworten: „Ganz richtig – der Satz ist also keine logische Summe, denn die² endet nicht mit ‚und so weiter‘ und das, worüber ich nicht klar bin, ist eben diese Satzform $\phi(0) \vee \phi(1) \vee \phi(2) \vee$ u.s.w.“ – und Du hast mir nur statt der ersten unverständlichen Satzform³ eine zweite gegeben und zwar mit dem Schein, als gäbest Du mir etwas altbekanntes, nämlich eine Disjunktion.“

728 Wenn wir nämlich meinen, daß wir doch unbedingt „ $(\exists n)$ etc.“ verstehen, so denken wir zur Rechtfertigung an andre Fälle des Gebrauchs der Notation „ $(\exists \dots)$. . .“, beziehungsweise der Ausdrucksform „es gibt . . .“ unserer Wortsprache. Darauf kann man aber nur sagen: Du *vergleichst* also den Satz „ $(\exists n)$. . .“ mit jenem Satz „es gibt ein Haus in dieser Stadt, welches . . .“, oder „es gibt zwei Fremdwörter auf dieser Seite“. Aber mit dem Vorkommen der Worte „es gibt“ in diesen Sätzen ist ja die Grammatik dieser Allgemeinheit noch nicht bestimmt. Und dieses Vorkommen weist auf nichts andres hin, als eine gewisse Analogie in den Regeln.⁴ Wir werden also die Grammatik der Allgemeinheit „ $(\exists n)$ etc.“ ohne vorgefaßtes Urteil untersuchen können,⁵ d.h., ohne⁶ uns von der Bedeutung, die „ $(\exists \dots)$. . .“ in andern Fällen hat,⁷ stören zu lassen.

„Alle Zahlen haben vielleicht die Eigenschaft ε .“ Wieder ist die Frage: was ist die Grammatik dieses allgemeinen Satzes? Denn damit ist uns nicht gedient, daß wir die Verwendung des Ausdrucks „alle . . .“ in andern grammatischen Systemen kennen. Sagt man: „Du weißt doch, was es heißt! es heißt: $\varepsilon(0)$ & $\varepsilon(1)$ & $\varepsilon(2)$ u.s.w.“, so ist damit wieder nichts erklärt; außer, daß der Satz *kein* logisches Produkt ist. Und man wird, um die Grammatik des Satzes verstehen zu lernen, fragen: Wie gebraucht⁸ man diesen Satz? Was sieht man als Kriterium seiner Wahrheit an? Was ist seine Verifikation? – Wenn keine Methode vorgesehen ist, um zu entscheiden, ob der Satz wahr oder falsch ist, ist er ja zwecklos und d.h. sinnlos. Aber hier kommen wir nun zur Illusion, daß allerdings eine solche Methode der Verifikation vorgesehen ist, die sich nur einer menschlichen Schwäche wegen nicht durchführen läßt.

1 (V): nicht, was „ $(\exists n).3 + n = 7$ “ bedeute,

2 (V): sie

3 (V): Satzart

4 (V): in Regeln.

5 (V): Wir werden also ruhig diese Regeln von vorne untersuchen können,

6 (V): können, ohne

7 (V): Bedeutung von „ $(\exists \dots)$. . .“ in andern Fällen

8 (O): gebrauchst

Generality in Arithmetic.

“What is the sense of such a proposition as ‘ $(\exists n).3 + n = 7$ ’?” Here we are in a strange quandary: on the one hand we feel it to be a problem that the proposition has the choice between infinitely many values of n , and on the other hand the sense of the proposition seems inherently guaranteed, something that only remains for us to explore, because after all we “know what ‘ $(\exists x).\phi x$ ’ means”. If someone said he didn’t know what the sense of “ $(\exists n).3 + n = 7$ ” was,¹ he would get the answer “But you do know what this proposition says: $3 + 0 = 7 \vee 3 + 1 = 7 \vee 3 + 2 = 7$, and so on!” But to that one can reply “Quite right – so the proposition isn’t a logical sum, because a logical sum doesn’t end with ‘and so on’; and what I am not clear about is precisely this propositional form ‘ $\phi(0) \vee \phi(1) \vee \phi(2) \vee$ and so on’ – and all you have done is to substitute a second unintelligible form² of proposition for the first one, all the while seeming to give me something familiar, namely a disjunction.”

For if we believe that we definitely do understand “ $(\exists n)$ etc.”, we justify this by thinking of other cases where we use the notation “ $(\exists \dots) \dots$ ”, or of the expression “There is \dots ” in our word-language. But to that one can only say: So you’re *comparing* the proposition “ $(\exists n) \dots$ ” with the proposition “There is a house in this city which \dots ” or “There are two foreign words on this page”. But the occurrence of the words “there is” in those sentences doesn’t suffice to determine the grammar of this generalization; all it does is to indicate a certain analogy in the rules. And so we can investigate the grammar of the generalization “ $(\exists n)$ etc.” without a preconceived judgement, that is, without letting the meaning of “ $(\exists \dots) \dots$ ” in other cases bother us.³

“Perhaps all numbers have the property ε .” Again the question is: What is the grammar of this general proposition? For our being acquainted with the use of the expression “all \dots ” in other grammatical systems doesn’t help us. If we say “But you know what it means: it means $\varepsilon(0)$ & $\varepsilon(1)$ & $\varepsilon(2)$ and so on”, again this explains nothing; except that the proposition is *not* a logical product. And in order to understand the grammar of the proposition, we should ask: How is this proposition used? What is regarded as the criterion of its truth? What is its verification? – If no method is provided for deciding whether the proposition is true or false, then it is pointless, i.e. senseless. But it is here that we arrive at the illusion that such a method of verification has indeed been provided, a method that is

1 (V): what “ $(\exists n).3 + n = 7$ ” meant,

2 (V): kind

3 (V): Therefore we can go ahead and examine these rules from the beginning, without letting

the meaning of “ $(\exists \dots) \dots$ ” // the meaning that “ $(\exists \dots) \dots$ ” has // in other cases bother us.

729 Diese Verifikation besteht darin, daß man alle (unendlich vielen) Glieder des Produktes $\varepsilon(0) \ \& \ \varepsilon(1) \ \& \ \varepsilon(2) \ \dots$ auf ihre Richtigkeit prüft. Hier wird das, was man „logische Unmöglichkeit“ nennt, mit physischer Unmöglichkeit verwechselt.⁹ Denn dem Ausdruck „alle Glieder des unendlichen Produktes auf ihre Richtigkeit prüfen“ glaubt man Sinn gegeben zu haben, weil man das Wort „unendlich viele“ für die Bezeichnung einer riesig großen Zahl hält. Und bei der „Unmöglichkeit, die unendliche Zahl von Sätzen zu prüfen“ schwebt uns die Unmöglichkeit vor, eine sehr große Anzahl von Sätzen zu prüfen, wenn wir etwa nicht die nötige Zeit haben.

Erinnere Dich daran, daß, in dem Sinn, in welchem es unmöglich ist, eine unendliche Anzahl von Sätzen zu prüfen, es auch unmöglich ist, das¹⁰ zu versuchen. – Wenn wir uns mit den Worten „Du weißt doch, was ‚alle . . .‘ heißt“ auf die Fälle berufen, in welchen diese Redeweise gebraucht wird, so kann es uns doch nicht gleichgültig sein, wenn wir einen Unterschied zwischen diesen Fällen und dem Fall sehen, für welchen der Gebrauch der Worte erklärt¹¹ werden sollte. – (Gewiß), wir wissen, was es heißt, „eine Anzahl von Sätzen auf ihre Richtigkeit prüfen“ und gerade auf dieses Verständnis berufen wir uns ja, wenn wir verlangen, man solle nun auch den Ausdruck „unendlich viele Sätze . . .“ verstehen. Aber hängt denn der Sinn des ersten Ausdrucks nicht von den spezifischen Erfahrungen ab, die ihm entsprechen?¹² Und gerade diese Erfahrungen fehlen ja in der Verwendung (dem Kalkül) des zweiten Ausdrucks; es sei denn, daß ihm solche Erfahrungen zugeordnet werden, die von den ersten grundverschieden sind.

Ramsey schlug einst vor, den Satz, daß unendlich viele Gegenstände eine Funktion $f(\xi)$ befriedigen, durch die Verneinung sämtlicher Sätze

$$\begin{aligned} &\sim(\exists x).fx \\ &(\exists x).fx \ \& \ \sim(\exists x, y).fx \ \& \ fy \\ &(\exists x, y).fx \ \& \ fy \ \& \ \sim(\exists x, y, z).fx \ \& \ fy \ \& \ fz \\ &u.s.w. \end{aligned}$$

730 auszudrücken. – Aber diese Verneinung ergäbe die Reihe

$$\begin{aligned} &(\exists x).fx \\ &(\exists x, y).fx \ \& \ fy \\ &(\exists x, y, z) \text{ etc. etc.} \end{aligned}$$

Aber diese Reihe ist wieder ganz überflüssig: denn erstens enthält ja der zuletzt angeschriebene Satz alle vorhergehenden und zweitens nützt uns dieser auch nichts, da er ja nicht von einer unendlichen Anzahl von Gegenständen handelt. Die Reihe kommt also in Wirklichkeit auf einen Satz hinaus:

$$\text{„}(\exists x, y, z \dots \text{ ad inf.})fx \ \& \ fy \ \& \ fz \dots \text{ ad inf.} \text{“}$$

Und mit diesem Zeichen können wir gar nichts anfangen, wenn wir nicht seine Grammatik kennen. Eines aber ist klar: wir haben es nicht mit einem Zeichen von der Form „ $(\exists x, y, z).fx \ \& \ fy \ \& \ fz$ “ zu tun; wohl aber mit einem Zeichen, dessen Ähnlichkeit mit diesem dazu gemacht scheint, uns irrezuführen.

728 9 (V): Hier wird logische mit physischer Möglichkeit verwechselt. 12 (V): Aber ist denn der Sinn des ersten Ausdrucks von der Erfahrung // den Erfahrungen //, die mit ihm verknüpft ist // sind //, unabhängig?

10 (V): es

11 (V): gerechtfertigt

kept from being carried out only because of a human weakness. This verification consists in checking the correctness of all the (infinitely many) terms of the product $\epsilon(0) \& \epsilon(1) \& \epsilon(2) \dots$. Here what is called “logical impossibility” is being confused with physical impossibility.⁴ For we think we have given a sense to the expression “checking the correctness of all the terms of the infinite product” because we take the expression “infinitely many” as designating an enormously large number. And when we hear of “the impossibility of checking an infinite number of propositions” we have in mind the impossibility of checking a very large number of propositions, say when we don’t have enough time.

Remember that in the sense in which it is impossible to check an infinite number of propositions it is also impossible to try to do so. – If we say “But you do know what ‘all . . .’ means”, and cite as our authority the cases in which this mode of speech is used, then it certainly can’t be a matter of indifference to us whether we see a distinction between these cases and the case for which the use of the words needs to be explained.⁵ – (To be sure), we know what is meant by “checking a number of propositions for correctness”, and it is precisely this understanding that we are appealing to when we demand that one should also understand the expression “infinitely many propositions . . .”. But doesn’t the sense of the first expression depend on the specific experiences that correspond to it?⁶ And it’s precisely these experiences that are lacking in the use (in the calculus) of the second expression; unless experiences are correlated with it that are fundamentally different in kind from the first ones.

Ramsey once proposed to express the proposition that infinitely many objects satisfy a function $f(\xi)$ by negating all propositions like:

$\sim(\exists x).fx$
 $(\exists x).fx \& \sim(\exists x, y).fx \& fy$
 $(\exists x, y).fx \& fy \& \sim(\exists x, y, z).fx \& fy \& fz$
and so on.

– But such a negation would yield the series

$(\exists x).fx$
 $(\exists x, y).fx \& fy$
 $(\exists x, y, z) \text{ etc., etc.}$

But this series too is completely superfluous: for in the first place the last proposition at any point surely contains all the previous ones, and secondly even it is of no use to us, because of course it isn’t about an infinite number of objects. So in reality the series boils down to one proposition:

“($\exists x, y, z \dots ad inf.$). $fx \& fy \& fz \dots ad inf.$ ”.

And we can’t do anything with that sign unless we know its grammar. But one thing is clear: we are not dealing with a sign of the form “ $(\exists x, y, z).fx \& fy \& fz$ ”, but with a sign whose similarity to that sign seems to be made to mislead us.

4 (V): Here logical possibility is being confused with physical possibility.

5 (V): justified.

6 (V): But is the sense of the first expression independent of the experience // experiences // that is // are // connected with it?

„ $m > n$ “ kann ich allerdings definieren als $(\exists x).m - n = x$, aber dadurch habe ich es in keiner Weise analysiert. Man denkt nämlich, daß durch die Verwendung des Symbolismus „ $(\exists \dots)$. . .“ eine Verbindung hergestellt sei¹³ zwischen „ $m > n$ “ und andern Sätzen von der Form „es gibt . . .“, vergißt aber, daß damit zwar eine gewisse Analogie betont ist, aber nicht mehr; da das Zeichen „ $(\exists \dots)$. . .“ in unzählig vielen verschiedenen „Spielen“ gebraucht wird. (Wie es eine „Dame“ im Schach- und im Damespiel gibt.) Wir müssen also erst die Regeln wissen, nach denen¹⁴ es *hier* verwendet wird. Und da wird sofort klar, daß diese Regeln hier mit den Regeln für die Subtraktion zusammenhängen. Denn, wenn wir – wie gewöhnlich – fragen: „wie weiß ich – d.h. woraus geht es hervor –, daß es eine Zahl x gibt, die der Bedingung $m - n = x$ genügt“, so kommen darauf die Regeln für die Subtraktion zur Antwort. Und nun sehen wir, daß wir mit unserer Definition nicht viel gewonnen haben. Ja, wir hätten gleich als Erklärung von „ $m > n$ “ die Regeln angeben können, nach welchen man so einen Satz – z.B. im Falle „ $32 > 17$ “ – überprüft.

731

Wenn ich sage: „für jedes n gibt es ein δ , das die Funktion kleiner macht als n “, so muß ich mich auf ein allgemeines arithmetisches Kriterium beziehen, das anzeigt, wann $F(\delta) < n$.

Wenn ich wesentlich keine Zahl hinschreiben kann, ohne ein Zahlensystem, so muß sich das auch in der allgemeinen Behandlung der Zahl widerspiegeln. Das Zahlensystem ist nicht etwas Minderwertiges – wie eine Russische Rechenmaschine – das nur für Volksschüler Interesse hat, während die höhere, allgemeine Betrachtung davon absehen kann.

Es geht auch nichts von der Allgemeinheit der Betrachtung verloren, wenn ich die Regeln, die die Richtigkeit und Falschheit von „ $m > n$ “ (also seinen Sinn) bestimmen, etwa für das¹⁵ Dezimalsystem gebe. *Ein* System brauche ich ja doch und die Allgemeinheit ist dadurch gewahrt, daß man die Regeln gibt, nach denen von einem System in ein anderes übersetzt wird.

Ein Beweis in der Mathematik ist allgemein, wenn er allgemein anwendbar ist. Eine andere Allgemeinheit kann nicht im Namen der Strenge gefordert werden. *Jeder* Beweis stützt sich auf *bestimmte* Zeichen, auf eine bestimmte Zeichengebung. Es kann nur die eine Art der Allgemeinheit eleganter erscheinen, als die andere. ((Dazu die Verwendung des Dezimalsystems in Beweisen über δ und η .)

732

„Streng“ heißt: klar.¹⁶

„Den mathematischen Satz kann man sich vorstellen als ein Lebewesen, das selbst weiß, ob es wahr oder falsch ist. (Zum Unterschied von den Sätzen der Empirie.)¹⁷

733

Der mathematische Satz weiß selbst, daß er wahr, oder daß er falsch ist. Wenn er von allen Zahlen handelt, so muß er auch schon alle Zahlen übersehen. Wie der Sinn, so muß auch seine Wahrheit oder Falschheit in ihm liegen.“

„Es ist, als wäre die Allgemeinheit eines Satzes ‚ $(n) \cdot \varepsilon(n)$ ‘ nur eine Anweisung auf die eigentliche, wirkliche, mathematische Allgemeinheit eines Satzes. Gleichsam nur eine

13 (V): ist

14 (V): wissen, wie

15 (V): etwa im

16 (E): In TS 212, S. 1776 notiert sich Wittgenstein zu dieser Bemerkung: „[Gegen

Hardy + zu der Verteidigung des Dezimalsystems in Beweisen, etc.]“

17 (V): den empirischen Sätzen.)

I certainly can define “ $m > n$ ” as $(\exists x).m - n = x$, but in doing so I haven’t in any way analysed it. For you think that by using the symbolism “ $(\exists \dots) \dots$ ” you’ve established a connection between “ $m > n$ ” and other propositions of the form “there is . . .”; but you forget that in doing this you’ve stressed a certain analogy – and nothing more – because the sign “ $(\exists \dots) \dots$ ” is used in countless different “games”. (Just as there is a “king” in chess and draughts.) So first we have to know the rules governing its use *here*; and then it immediately becomes clear that these rules are connected with the rules for subtraction. For if we ask the usual question “How do I know – i.e. from what does it follow – that there is a number x that satisfies the condition $m - n = x$?”, then it is the rules for subtraction that come as the answer. And then we see that we haven’t gained much by our definition. Indeed, as an explanation of “ $m > n$ ” we could have straightaway given the rules for checking such a proposition – for example, in the case of “ $32 > 17$ ”.

If I say: “For any n there is a δ that makes the function smaller than n ”, I have to be referring to a general arithmetical criterion that indicates when $F(\delta) < n$.

If in the nature of the case I cannot write down a number independently of a number system, this must also be reflected in the general treatment of number. A number system is not something inferior – like a Russian abacus – that is only of interest to elementary school pupils, whereas a higher-level general consideration can afford to disregard it.

Neither do I lose anything of the generality of my examination if I give the rules that determine the correctness and incorrectness (and thus the sense) of “ $m > n$ ” for⁷, say, the decimal system. After all I do need *a* system, and the generality is preserved by giving the rules according to which translation takes place from one system into another.

A proof in mathematics is general if it is generally applicable. You can’t demand some other kind of generality in the name of rigour. *Every* proof rests on *particular* signs, on a particular assignment of signs. All that can happen is that one type of generality may appear more elegant than another. ((Cf. the use of the decimal system in proofs concerning δ and η .)

“Rigorous” means: clear.⁸

“We can imagine a mathematical proposition as a living being that knows on its own whether it is true or false. (As opposed to empirical propositions.)

A mathematical proposition knows on its own that it is true or that it is false. If it is about all numbers, it must also have an overview of all the numbers. As its sense must be contained in it, so too must its truth or falsity.”

“It’s as though the generality of a proposition ‘ $(n) \cdot \varepsilon(n)$ ’ only gave directions to the actual, real mathematical generality of a proposition. As though it were only a description

7 (V): within

8 (E): At this point in the predecessor typescript (TS 212, p. 1776), Wittgenstein has written next

to the remark: “[*Contra* Hardy, and in defence of the decimal system in proofs, etc.]”.

Beschreibung der Allgemeinheit, nicht diese selbst. Als bilde der Satz nur auf rein äußerliche Weise ein Zeichen, dem erst von innen Sinn gegeben werden muß.“

„Wir fühlen: Die Allgemeinheit, die die mathematische Behauptung hat, ist anders als die Allgemeinheit des Satzes, der bewiesen ist.“

„Man könnte sagen: ein mathematischer Satz ist der Hinweis auf einen Beweis.“

Wie wäre es, wenn ein Satz seinen Sinn selber nicht ganz erfaßte. Wenn er sich quasi selber zu hoch wäre? – Und das nehmen eigentlich die Logiker an.

Den Satz, der von allen Zahlen handelt, kann man sich nicht durch ein endloses Schreiten verifiziert denken, denn, wenn das Schreiten endlos ist, so führt es ja eben nicht zu einem Ziel.

Denken wir uns eine unendlich lange Baumreihe, und ihr entlang, damit wir sie inspizieren können, einen Weg. Sehr gut, so muß dieser Weg endlos sein. Aber wenn er endlos ist, so heißt das, daß man ihn nicht zu Ende gehen kann. D.h., er bringt mich *nicht* dazu, die Reihe zu übersehen. Der endlose Weg hat nämlich nicht ein „unendlich fernes“ Ende, sondern kein Ende.

Man kann auch nicht sagen: „Der Satz kann alle Zahlen nicht successive erfassen, so muß er sie durch den Begriff fassen“, – als ob das faute de mieux so wäre: „Weil er es *so* nicht kann, muß er es auf *andre* Weise tun“. Aber ein successives Erfassen ist schon möglich, nur führt es eben nicht zur Gesamtheit. Diese liegt: *nicht* auf dem Weg, den wir schrittweise gehen, – und nicht: am unendlich fernen Ende dieses Weges. (Das alles heißt nur „ $\varepsilon(0)$ & $\varepsilon(1)$ & $\varepsilon(2)$ & u.s.w.“ ist nicht das Zeichen eines logischen Produkts.)

„Alle Zahlen können nicht *zufällig* eine Eigenschaft ε besitzen; sondern nur ihrem Wesen nach.“¹⁸ – Der Satz „die Menschen, welche rote Nasen haben, sind gutmütig“ hat auch dann nicht denselben Sinn wie der Satz „die Menschen, welche Wein trinken, sind gutmütig“, wenn die Menschen, welche rote Nasen haben, eben die sind, die Wein trinken. Dagegen: wenn die Zahlen m , n , o der Umfang eines mathematischen Begriffs sind, so daß also f_m & f_n & f_o der Fall ist, dann hat¹⁹ der Satz, welcher sagt, daß die Zahlen, die f befriedigen, die Eigenschaft ε haben, den gleichen Sinn wie „ $\varepsilon(m)$ & $\varepsilon(n)$ & $\varepsilon(o)$ “. Denn die beiden Sätze „ $f(m)$ & $f(n)$ & $f(o)$ “ und „ $\varepsilon(m)$ & $\varepsilon(n)$ & $\varepsilon(o)$ “ lassen sich, ohne daß wir dabei den Bereich der Grammatik verlassen, in einander umformen.

Sehen wir uns nun den Satz an: „alle n Zahlen, welche der Bedingung $F(\xi)$ genügen, haben zufälligerweise die Eigenschaft ε “. Da kommt es drauf an, ob die Bedingung $F(\xi)$ eine mathematische ist. Ist sie das, nun dann kann ich ja aus $F(x)$ $\varepsilon(x)$ ableiten, wenn auch über die Disjunktion der n Werte von $F(\xi)$. (Denn hier gibt es eben eine Disjunktion.) Hier werde ich also nicht von einem Zufall reden. – Ist die Bedingung eine nicht-mathematische, so wird man dagegen vom Zufall reden können. Z.B. wenn ich sage: alle Zahlen, die ich heute auf den Omnibussen gelesen habe, waren zufällig Primzahlen. (Dagegen kann man natürlich nicht sagen: „die Zahlen 17, 3, 5, 31, sind zufällig Primzahlen“, ebensowenig wie: „die Zahl 3 ist zufällig eine Primzahl.“) „Zufällig“ ist wohl der Gegensatz von „allgemein ableitbar“; aber man kann sagen: der Satz „17, 3, 5, 31 sind Primzahlen“ ist allgemein ableitbar – so sonderbar das klingt –, wie auch der Satz $2 + 3 = 5$.

Sehen wir nun zu unserm ersten Satz zurück, so fragen wir wieder: Wie soll denn der Satz „alle Zahlen haben die Eigenschaft ε “ gemeint sein? wie soll man ihn denn wissen können? denn diese Festsetzung gehört ja zur Festsetzung seines Sinnes! Das Wort

18 (V): Wesen (als Zahlen) nach.“

19 (V): sagt

of the generality, as it were, and not the generality itself. As if the proposition formed a sign only in a purely external way, a sign that still needed to be given sense from within.”

“We feel: the generality of a mathematical assertion is different from the generality of the proposition proved.”

“We could say: a mathematical proposition is a pointer to a proof.”

What would it be like if a proposition didn’t quite grasp its own sense? If its sense were, so to speak, over its head? – And that really is what logicians assume.

A proposition about all numbers can’t be thought of as verified by an endless succession of steps, for if a succession is endless, it doesn’t lead to any goal.

Let’s imagine an infinitely long row of trees, and a path alongside it so that we can inspect them. Excellent: so this path must be endless. But if it’s endless that means you can’t walk to the end of it. That is, it does *not* put me in a position to survey the row. For the endless path does not have an end that’s “infinitely distant” – it has no end.

Nor can you say: “A proposition can’t grasp all the numbers one by one, so it has to grasp them through a concept”, as if this were so for lack of a better alternative: “Because it can’t do it like *this*, it has to do it another way.” But grasping the numbers one by one *is* possible; it’s just that it doesn’t lead to the totality. That lies: *not* on the path on which we go step by step – nor at the infinitely distant end of that path. (All of this only means that “ $\varepsilon(0) \ \& \ \varepsilon(1) \ \& \ \varepsilon(2)$ and so on” is not the sign for a logical product.)

“No number can possess a property ε *accidentally*; it can do so only essentially.”⁹ – The proposition “People who have red noses are good-natured” does not have the same sense as the proposition “People who drink wine are good-natured”, even if the people who have red noses are the very same people who drink wine. On the other hand, if the numbers m, n, o are the extension of a mathematical concept, such that it is the case that $f_m \ \& \ f_n \ \& \ f_o$, then the proposition that the numbers that satisfy f have the property ε has the same sense as “ $\varepsilon(m) \ \& \ \varepsilon(n) \ \& \ \varepsilon(o)$ ”. For the two propositions “ $f(m) \ \& \ f(n) \ \& \ f(o)$ ” and “ $\varepsilon(m) \ \& \ \varepsilon(n) \ \& \ \varepsilon(o)$ ” can be transformed into each other without thereby leaving the realm of grammar.

Now let’s look at the proposition: “All the n numbers that satisfy the condition $F(\xi)$ just happen to have the property ε ”. What matters here is whether the condition $F(\xi)$ is a mathematical one. If it is, then I *can* derive $\varepsilon(x)$ from $F(x)$, if only through the disjunction of the n values of $F(\xi)$. (For here there is in fact a disjunction.) So here I won’t talk about coincidence. – On the other hand, if the condition is a non-mathematical one we can speak of coincidence. For example, if I say: “All the numbers I saw today on buses happened to be prime numbers”. (But of course we can’t say: “The numbers 17, 3, 5, 31 happen to be prime numbers”, any more than “The number 3 happens to be a prime number”.) “Coincidental” *is* the opposite of “derivable through a general rule”; but one can say that the proposition “17, 3, 5, 31 are prime numbers” is derivable through a general rule – however odd this sounds – just like the proposition $2 + 3 = 5$.

If we now look back at our first proposition, we ask again: How *is* the proposition “All numbers have the property ε ” supposed to be meant? How *is* one supposed to be able to know it? For to establish this is of course part of establishing its sense! After all, the word

9 (V): essentially (as a number)”.

„zufällig“ deutet doch auf eine Verifikation durch successive Versuche und dem widerspricht, daß wir nicht von einer endlichen Zahlenreihe reden.

In der Mathematik sind Beschreibung und Gegenstand äquivalent. „Die²⁰ fünfte Zahl der Zahlenreihe hat diese Eigenschaften“ sagt *dasselbe* wie „5 hat diese Eigenschaften“. Die Eigenschaften eines Hauses *folgen* nicht aus seiner Stellung in einer Häuserreihe; dagegen sind die Eigenschaften einer Zahl die Eigenschaften einer Stellung.

Man kann sagen, daß die Eigenschaften einer bestimmten Zahl nicht vorauszusehen sind. Man sieht sie erst, wenn man zu ihr kommt.

Das Allgemeine ist die Wiederholung einer Operation. Jedes Stadium dieser Wiederholung hat seine Individualität. Nun ist es nicht etwa so, daß ich durch die Operation von einer Individualität zur andern fortschreite. So daß die Operation das Mittel wäre, um von einer zur andern zu kommen. Gleichsam das Vehikel, das bei jeder Zahl anhält, die man nun betrachten kann. Sondern die dreimal iterierte²¹ Operation + 1 erzeugt und *ist* die Zahl drei.

(Im Kalkül sind Prozeß und Resultat einander äquivalent.)

Ehe ich aber nun von „allen diesen Individualitäten“, oder „der Gesamtheit dieser Individualitäten“ sprechen wollte, müßte ich mir *gut* überlegen, welche Bestimmungen ich in diesem Falle für den Gebrauch der Worte „alle“ und „Gesamtheit“ gelten lassen will.

Es ist schwer, sich von der extensiven Auffassung ganz frei zu machen: So denkt man: „Ja, aber es muß doch eine innere Beziehung zwischen $x^3 + y^3$ und z^3 bestehen, da doch (zum mindesten) die Extensionen dieser Ausdrücke, wenn ich sie nur kennte, das Resultat einer solchen Beziehung darstellen müßten“. Etwa: „Es müssen doch entweder *wesentlich alle* Zahlen die Eigenschaft ϵ haben, oder nicht; da doch *alle* Zahlen die Eigenschaften haben, oder nicht; wenn ich auch nicht wissen kann, welches der Fall ist.“²²

„Wenn ich die Zahlenreihe durchlaufe, so komme ich entweder einmal zu einer Zahl von der Eigenschaft ϵ , oder niemals.“ Der Ausdruck „die Zahlenreihe durchlaufen“ ist Unsinn; außer es wird ihm ein Sinn *gegeben*, der aber die vermutete Analogie mit dem „durchlaufen der Zahlen von 1 bis 100“ aufhebt.

Wenn Brouwer die Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik bekämpft, so hat er Recht, soweit er sich gegen ein Vorgehen richtet, das den Beweisen empirischer Sätze analog ist. Man kann in der Mathematik nie etwas auf *die* Art beweisen: Ich habe 2 Äpfel auf dem Tisch liegen gesehen; jetzt ist nur *einer* da; also hat A einen Apfel gegessen. – Man kann nämlich nicht durch Ausschließung gewisser Möglichkeiten eine neue beweisen, die nicht, durch die von uns gegebenen Regeln, schon in jener Ausschließung liegt. Insofern gibt es in der Mathematik keine echten Alternativen. Wäre die Mathematik die Untersuchung von erfahrungsmäßig gegebenen Aggregaten, so könnte man durch die Ausschließung eines Teils das Nichtausgeschlossene beschreiben, und hier wäre der nicht ausgeschlossene Teil der Ausschließung des andern nicht äquivalent.

Die Betrachtungsweise: daß ein logisches Gesetz, weil es für ein Gebiet der Mathematik gilt, nicht notwendig auch für ein anderes gelten müsse, ist in der Mathematik gar nicht am Platz, ihrem Wesen ganz entgegen. Obwohl²³ manche Autoren gerade das für besonders subtil halten, und entgegen den Vorurteilen.

20 (O): „die
21 (V): die dreimalige

22 (V): wenn ich das auch nicht wissen kann.“
23 (V): Obwohl *es*

“coincidental” suggests a verification by successive tests, and that is contradicted by the fact that we are not speaking of a finite series of numbers.

In mathematics description and object are equivalent. “The fifth number of the number series has these properties” says *the same* as “5 has these properties”. The properties of a house do not *follow* from its position in a row of houses; but the properties of a number are the properties of a position.

You might say that the properties of a particular number can’t be foreseen. You don’t see them until you’ve got there.

What is general is the repetition of an operation. Each stage of this repetition has its own individuality. But it isn’t as if I use the operation to move from one individual to the next, so that the operation would be the means for getting from one to the other – the vehicle, as it were, that stops at every number so we can study it. Rather, the operation $+1$ repeated three times produces¹⁰ and *is* the number 3.

(In the calculus, process and result are equivalent to each other.)

But before deciding to speak of “all these individualities” or “the totality of these individualities” I would have to consider *carefully* what stipulations I wanted to allow for the use of the words “all” and “totality”.

It’s difficult to extricate yourself completely from the extensional viewpoint: And so you keep thinking “Yes, but still, there *must* be an internal relation between $x^3 + y^3$ and z^3 , since (at least) the extensions of these expressions, if only I knew them, would have to show the result of such a relation”. Or perhaps: “It must surely be *essential* to *all* numbers either to have the property ϵ or not to have it; since after all, *all* numbers have their properties or don’t have them; even if I can’t know which is the case.”¹¹

“If I run through the number series, either I eventually come to a number with the property ϵ , or I never do.” The expression “to run through the number series” is nonsense; unless a sense is *given* to it which eliminates the assumed analogy with “running through the numbers from 1 to 100”.

When Brouwer battles against the application of the law of the excluded middle in mathematics, he is right in so far as he is directing his attack against a *process* that is analogous to the proofs of empirical propositions. In mathematics you can never prove anything *this* way: I saw two apples lying on the table, and now there is only *one* there, so A has eaten an apple. – For you can’t by excluding certain possibilities prove a new one which isn’t already contained in that exclusion by virtue of the rules we have laid down. To that extent there are no genuine alternatives in mathematics. If mathematics were the investigation of empirically given aggregates, one could use the exclusion of one part to describe what was not excluded, and in that case the non-excluded part wouldn’t be equivalent to the exclusion of the other.

This way of looking at things: that a logical law, just because it is valid for one area of mathematics, doesn’t necessarily have to be valid for another area as well – is completely out of place in mathematics, completely contrary to its essence. Although some authors hold just this approach to be particularly subtle and to be an antidote to prejudices.

10 (V): the triple operation $+ 1$ produces

11 (V): know that.”

Wie es sich nun mit derjenigen Allgemeinheit, mit den Sätzen der Mathematik verhält, die nicht von „allen Kardinalzahlen“, sondern z.B. von „allen reellen Zahlen“ handeln,²⁴ kann man nur erkennen, indem²⁵ man diese Sätze und ihre Beweise untersucht.

Wie ein Satz verifiziert wird,²⁶ das sagt er. Vergleiche die Allgemeinheit in der Arithmetik mit der Allgemeinheit von nicht arithmetischen Sätzen. Sie wird anders verifiziert und ist darum eine andere. Die Verifikation ist nicht bloß ein²⁷ Anzeichen der Wahrheit, sondern sie bestimmt den Sinn des Satzes. (Einstein: wie eine Größe gemessen wird, das ist sie.)

-
- | | |
|---|--|
| <p>24 (V): Wie es sich nun mit derjenigen
Allgemeinheit in der Mathematik verhält,
deren Sätze nicht //, die nicht // von „allen
Kardinalzahlen“, sondern z.B. von „allen
reellen Zahlen“ handeln, // spricht</p> | <p>25 (V): wenn
26 (V): ist,
27 (V): nicht ein bloßes</p> |
|---|--|

We can only come to know about that generality, about those propositions of mathematics that are not about “all cardinal numbers”,¹² but, say, about “all real numbers”, by investigating¹³ those propositions and their proofs.

How a proposition is verified¹⁴ is what it says. Compare generality in arithmetic with the generality of non-arithmetical propositions. It is verified differently and so is of a different kind. The verification is not merely an indication¹⁵ of the truth, but determines the sense of the proposition. (Einstein: how a magnitude is measured is what it is.)

12 (V): We can only come to know about that generality in mathematics whose propositions are // which is // not about // does not speak about // “all cardinal numbers”,

13 (V): numbers”, if one investigates

14 (V): proposition ~~has been~~ verified

15 (V): not a mere indication

Zur Mengenlehre.

738

| „Die rationalen Punkte liegen auf der Zahlengeraden nahe beisammen¹“: irreführendes Bild. |

Ist ein Raum denkbar, der nur alle rationalen Punkte, aber nicht die irrationalen enthält? Wäre etwa diese Struktur für unsern Raum zu grob?² Weil wir die irrationalen Punkte dann nur annäherungsweise erreichen könnten?³ Unser Netz wäre also nicht fein genug? Nein. Die Gesetze gingen uns ab, nicht die Extensionen.

Ist ein Raum denkbar, der nur alle rationalen aber nicht die irrationalen Punkte enthält? Und das heißt nur: Sind die irrationalen Zahlen nicht in den rationalen präjudiziert?

So wenig, wie das Schachspiel im Damespiel.

Die irrationalen Zahlen füllen keine Lücke aus, die die rationalen offen lassen.

739

Man wundert sich darüber, daß „zwischen den überall dicht liegenden rationalen Punkten“ noch die irrationalen Platz haben. (Welche Verdummung!) Was zeigt eine Konstruktion, wie die des Punktes $\sqrt{2}$? Zeigt sie diesen Punkt, wie er doch noch zwischen den rationalen Punkten Platz hat? Sie zeigt, daß der durch die Konstruktion *erzeugte* Punkt, nämlich als Punkt *dieser* Konstruktion, *nicht rational* ist. – Und was entspricht dieser Konstruktion in der Arithmetik? Etwa eine Zahl, die sich *doch* noch zwischen die rationalen Zahlen hineinzwängt? Ein Gesetz, das nicht vom Wesen der rationalen Zahl ist.

Die Erklärung des Dedekind'schen Schnittes gibt vor, anschaulich zu sein,⁴ wenn sie sagt:⁵ Es gibt 3 Fälle: entweder hat die Klasse R ein erstes Glied und L kein letztes, etc. In Wahrheit lassen sich 2 dieser 3 Fälle gar nicht vorstellen. Außer, wenn die Wörter „Klasse“, „erstes Glied“, „letztes Glied“ gänzlich ihre vorgeblich⁶ beibehaltenen alltäglichen Bedeutungen wechseln. Wenn man nämlich – starr darüber, daß Einer von einer Klasse von Punkten redet, die rechts von einem gegebenen Punkt liegt und keinen Anfang hat – sagt: gib uns doch ein Beispiel so einer Klasse, – so zieht er das von den rationalen Zahlen hervor! Aber hier ist ja gar keine Klasse von Punkten im ursprünglichen⁷ Sinn!

Der Schnittpunkt zweier Kurven ist nicht das gemeinsame Glied zweier Klassen von Punkten, sondern der Durchschnitt zweier Gesetze. Es sei denn, daß man die erste Ausdrucksweise, sehr irreführend, durch die zweite definiert.

740

Es mag nach dem Vielen, was ich schon darüber gesagt habe, trivial klingen, wenn ich jetzt sage, daß der Fehler in der mengentheoretischen Betrachtungsweise immer wieder

1 (V): nahe bei einander

2 (V): ungenau?

3 (V): Weil wir zu den irrationalen Punkten dann (immer) nur annäherungsweise gelangen könnten?

4 (V): gibt vor, sie wäre anschaulich,

5 (V): wenn gesagt wird:

6 (V): anscheinend

7 (V): alltäglichen

On Set Theory.

| “The rational points lie close together¹ on the number line”: a misleading picture. |

Is a space conceivable that contains only all the rational points, but not the irrational ones? Would this structure perhaps be too coarse² for our space? Since then we could only reach³ the irrational points approximately? Would this mean that our net wasn’t fine enough? No. What we would lack would be the laws, not the extensions.

Is a space conceivable that contains only all rational points but not the irrational points? And that only means: Aren’t the irrational numbers prejudged in the rational ones? No more than chess is prejudged in draughts. The irrational numbers do not fill a gap that the rational ones leave open.

We are surprised that “between the ubiquitously and densely distributed rational points”, there is still room for the irrationals. (What stupidity!) What does a construction like that of the point $\sqrt{2}$ show? Does it show how this point, in spite of everything, still finds room between the rational points? It shows that the point *produced* by the construction, that is produced as a point by *this* construction, is *not rational*. – And what corresponds to this construction in arithmetic? Perhaps a number that manages *after all* to squeeze in between the rational numbers? A law that does not have the nature of a rational number.

The explanation of the Dedekind cut pretends to be clear when it says⁴: There are three cases: either the class R has a first member and L no last member, etc. In fact two of these three cases cannot even be imagined, unless the words “class”, “first member”, “last member”, completely change the everyday meanings they supposedly⁵ have retained. For if we’re dumbfounded by someone’s talk of a class of points that lies to the right of a given point and has no beginning, and we say: Do give us an example of such a class – then he trots out the example of the rational numbers! But here there *is* no class of points, in the original⁶ sense!

The point of intersection of two curves isn’t the common member of two classes of points; it’s the intersection of two laws. Unless, quite misleadingly, we use the second form of expression to define the first.

After the many things I have already said about this, it may sound trivial if I now say that the mistake in the set-theoretical approach consists time and again in viewing laws and

1 (V): close to each other

2 (V): inaccurate

3 (V): only (ever) get to

4 (V): it is said

5 (V): apparently

6 (V): everyday

darin liegt, Gesetze und Aufzählungen (Listen) als wesentlich Eins zu betrachten und sie aneinander zu reihen; da, wo das eine nicht ausreicht, das Andere seinen Platz ausfüllt.

Das Symbol für eine Klasse ist eine Liste.

Die Schwierigkeit liegt auch hier wieder in der Bildung mathematischer Scheinbegriffe. Wenn man z.B. sagt: Man kann die Kardinalzahlen ihrer Größe nach in eine Folge ordnen, aber nicht die rationalen Zahlen, so ist darin unbewußt die Voraussetzung enthalten, als hätte der Begriff des Ordnen der Größe nach für *die rationalen Zahlen* doch einen Sinn, und als erwiese sich dieses Ordnen nun beim Versuch als unmöglich (was voraussetzt, daß der *Versuch* denkbar ist). – So denkt man, ist es möglich zu versuchen, *die reellen Zahlen* (als wäre es ein Begriff wie etwa „Äpfel auf diesem Tisch“) in eine Reihe zu ordnen, und es erwiese sich nun als undurchführbar.

Wenn der Mengenkalkül sich in seiner Ausdrucksweise soviel als möglich an die Ausdrucksweise des Kalküls der Kardinalzahlen anlehnt, so ist das wohl in mancher Hinsicht belehrend, weil es auf gewisse formale Ähnlichkeiten hinweist, aber auch irreführend, wenn er gleichsam noch etwas ein Messer nennt, das weder Griff noch Klinge mehr hat. (Lichtenberg.)

(Die Eleganz eines mathematischen Beweises kann nur den einen Sinn haben, gewisse Analogien besonders stark zu Tage treten zu lassen, wenn das gerade erwünscht ist, sonst entspringt sie dem Stumpsinn und hat nur die eine Wirkung, das zu verhüllen, was klar und offenbar sein sollte. Das stumpfsinnige Streben nach Eleganz ist eine Hauptursache, warum die Mathematiker ihre eigenen Operationen nicht verstehen, oder es entspringt die Verständnislosigkeit und jenes Streben einer gemeinsamen Quelle.)

741 Die Menschen sind im Netz der Sprache verstrickt⁸ und wissen es nicht.

„Es gibt einen Punkt, in dem die beiden Kurven einander schneiden.“ Wie weißt Du das? Wenn Du es mir sagst, werde ich wissen, was der Satz „es gibt . . .“ für einen Sinn hat.

Wenn man wissen will, was der Ausdruck „das Maximum einer Kurve“ bedeutet, so frage man sich: wie findet man es? – Was anders gefunden wird, ist etwas anderes. Man definiert es als den Punkt der Kurve, der höher liegt als alle andern, und hat dabei wieder die Idee, daß es nur unsere menschliche Schwäche ist, die uns verhindert, alle Punkte der Kurve einzeln durchzugehen und den höchsten unter ihnen auszuwählen. Und dies führt zu der Meinung, daß der höchste Punkt unter einer endlichen Anzahl von Punkten wesentlich dasselbe ist, wie der höchste Punkt einer Kurve, und daß man hier eben auf zwei verschiedene Methoden das Gleiche findet, wie man auf verschiedene Weise feststellt, daß jemand im Nebenzimmer ist: anders etwa, wenn die Tür geschlossen ist und wir zu schwach sind, sie zu öffnen, und anders, wenn wir hinein können. Aber, wie gesagt, menschliche Schwäche liegt dort nicht vor, wo die scheinbare Beschreibung der Handlung „die wir nicht ausführen können“ sinnlos ist. Es würde freilich nichts schaden, ja sehr interessant sein, die Analogie zwischen dem Maximum einer Kurve und dem Maximum (in anderm Sinne) einer Klasse von Punkten zu sehen, so lange uns die Analogie nicht das Vorurteil eingibt, es liege im Grunde beide Male dasselbe vor.

742 Es ist der gleiche Fehler unserer Syntax, der den geometrischen Satz „die Strecke läßt sich durch einen Punkt in zwei Teile teilen“ als die gleiche Form darstellt, wie den

8 (V): gefangen

enumerations (lists) as essentially the same kind of thing and placing them on a line next to each other, the one filling in the gaps left by the other.

The symbol for a class is a list.

Here again, the difficulty lies in the formation of mathematical pseudo-concepts. For instance, if we say that we can arrange the cardinal numbers, but not the rational numbers, in a sequence according to their size, we are unconsciously presupposing that the concept of an ordering by size does make sense for *the rational numbers*, but that when we try it, it turns out that this ordering is impossible (which presupposes that the *attempt* is conceivable). – Thus we think that it is possible to attempt to arrange *the real numbers* (as if that were a concept like “apples on this table”) in a series, and that now it turns out to be impracticable.

When the calculus of sets has its form of expression follow as much as possible the form of expression of the calculus of cardinal numbers, this is in some ways instructive. For it points to certain formal similarities. But it's also misleading when it still, so to speak, calls something a knife that no longer has either handle or blade. (Lichtenberg.)

(The only sense there can be to elegance in a mathematical proof is to allow certain analogies to come out in particularly clear profile, when that is what's wanted; otherwise elegance is a product of mindlessness, and all it does is to obscure what ought to be clear and manifest. The mindless pursuit of elegance is a principal reason for mathematicians not understanding their own operations. Or perhaps the lack of understanding and that pursuit of elegance have a common origin.)

Humans are entangled⁷ in the net of language without knowing it.

“There is a point at which the two curves intersect.” How do you know that? When you tell me I will know what sort of sense the proposition “There is . . .” has.

If you want to know what the expression “the maximum of a curve” means, ask yourself: How does one find it? – What is found in a different way is a different thing. We define the maximum as the point on the curve that's higher than all the others, and in so doing we again have the idea that it is only our human weakness that prevents us from sifting through all the points of the curve one by one and selecting the highest among them. And this leads to the idea that the highest point among a finite number of points is essentially the same thing as the highest point of a curve, and that here we are simply finding out the same thing by two different methods, just as we ascertain in different ways that someone is in the next room – in one way if the door is shut and we aren't strong enough to open it, and in another way if we can get inside. But as I said, it isn't a matter of human weakness, where what appears to be the description of an action “we cannot carry out” is senseless. To be sure it wouldn't hurt, indeed it would be very interesting, to see the analogy between the maximum of a curve and the maximum (in another sense) of a class of points, so long as the analogy doesn't instil in us the prejudice that in both cases we have fundamentally the same thing.

It's the same defect as the one in our syntax that represents the proposition in geometry “a line can be divided by a point into two parts”, as a proposition of the same form as “a

7 (V): caught

Satz: „die Strecke ist unbegrenzt teilbar“; so daß man scheinbar in beiden Fällen sagen kann: „nehmen wir an, die mögliche Teilung sei vollzogen⁹“. „In zwei Teile teilbar“ und „unbegrenzt teilbar“ haben eine gänzlich verschiedene Grammatik. Man operiert fälschlich mit dem Worte „unendlich“, wie mit einem Zahlwort; weil beide in der Umgangssprache auf die Frage „wieviele . . .“ zur Antwort kommen.

„Das Maximum ist doch aber höher, als jeder beliebige andre Punkt der Kurve.“ Aber die Kurve besteht ja nicht aus Punkten, sondern ist ein Gesetz, dem Punkte gehorchen. Oder auch: ein Gesetz, nach dem Punkte konstruiert werden können. Wenn man nun fragt: „welche Punkte“, – so kann ich nur sagen: „nun, z.B., die Punkte P, Q, R, etc.“. Und es ist einerseits so, daß keine Anzahl von Punkten gegeben werden kann, von denen man sagen könnte, sie seien alle Punkte, die auf der Kurve liegen, daß man andererseits auch nicht von einer solchen Gesamtheit von Punkten reden kann, die nur wir Menschen nicht aufzählen können, die sich aber beschreiben läßt und die man die Gesamtheit aller Punkte der Kurve nennen könnte, – eine Gesamtheit, die für uns Menschen zu groß wäre. Es gibt ein Gesetz einerseits und Punkte auf der Kurve andererseits – aber nicht „alle Punkte der Kurve“. Das Maximum liegt höher als irgend welche Punkte der Kurve, die man etwa konstruiert, aber nicht höher als eine Gesamtheit von Punkten; es sei denn, daß das Kriterium hiervon, und also der Sinn dieser Aussage, wieder nur die Konstruktion aus dem Gesetz der Kurve ist.

743 Das Gewebe der Irrtümer auf diesem Gebiet ist natürlich ein sehr kompliziertes. Es tritt z.B. noch die Verwechslung zweier verschiedener Bedeutungen des Wortes „Art“ hinzu. Man gibt nämlich zu, daß die unendlichen Zahlen eine andre *Art* Zahlen sind, als die endlichen, aber man mißversteht nun, worin hier der Unterschied verschiedener Arten besteht. Daß es sich nämlich hier nicht um die Unterscheidung von Gegenständen nach ihren Eigenschaften handelt, wie wenn man rote Äpfel von gelben unterscheidet,¹⁰ sondern um verschiedene logische Formen. – So versucht Dedekind eine unendliche Klasse zu *beschreiben*; indem er sagt, es sei eine, die einer echten Teilklasse ihrer selbst ähnlich ist. Hierdurch hat er scheinbar eine Eigenschaft angegeben, die die Klasse haben muß, um unter den Begriff „unendliche Klasse“ zu fallen. (Frege.) Denken wir uns nun die Anwendung dieser¹¹ Definition. Ich soll also in einem bestimmten Fall untersuchen, ob eine Klasse endlich ist oder nicht, etwa ob eine bestimmte Baumreihe endlich oder endlos ist. Ich nehme also, der Definition folgend, eine Teilklasse dieser Baumreihe und untersuche, ob sie der ganzen Klasse ähnlich (d.h. 1–1 koordinierbar) ist! (Hier fängt gleichsam schon Alles an zu lachen.) Das heißt ja gar nichts: denn, nehme ich eine „endliche Klasse“ als Teilklasse, so muß ja der Versuch, sie der ganzen Klasse 1 zu 1 zuzuordnen eo ipso mißlingen; und mache ich den Versuch an einer unendlichen Teilklasse, – aber das heißt ja schon erst recht nichts, denn, wenn sie unendlich ist, kann ich den Versuch dieser Zuordnung gar nicht machen. – Das, was man im Fall einer endlichen Klasse „Zuordnung aller ihrer Glieder mit andern“ nennt, ist etwas ganz anderes, als das, was man z.B. eine Zuordnung aller Kardinalzahlen mit allen Rationalzahlen nennt. Die beiden Zuordnungen, oder, was man in den zwei Fällen mit diesem Wort bezeichnet, gehören verschiedenen logischen Typen¹² an. Und es ist nicht die „unendliche Klasse“ eine Klasse, die mehr Glieder im gewöhnlichen Sinn des Wortes „mehr“ enthält, als die endlichen. Und wenn man sagt, daß eine unendliche Zahl größer ist, als eine endliche, so macht das die beiden nicht vergleichbar, weil in dieser Aussage das Wort „größer“ *eine andere Bedeutung hat*, als etwa im Satz „5 größer als 4“.

9 (V): ausgeführt
10 (O): unterscheidet,

11 (V): der
12 (V): Kathegorien

line can be divided infinitely”; so that it looks as if in both cases we can say “Let’s suppose we’ve completed⁸ the possible division”. “Divisible into two parts” and “infinitely divisible” have completely different grammars. We wrongly use the word “infinite” like a number word because in everyday speech both are given as answers to the question “How many . . . ?”.

“But after all, the maximum is higher than any other arbitrary point of the curve.” But the curve doesn’t consist of points; it’s a law that points obey, or again, a law according to which points can be constructed. If you now ask: “Which points?” – I can only say, “Well, for instance, the points P, Q, R, etc.” On the one hand we can’t give a number of points that could be said to be all the points that lie on the curve, and on the other hand we can’t speak of a totality of points that are just not countable by us humans, but can be described and could be called the totality of all points of the curve – a totality too large for us human beings. On the one hand there is a law, and on the other there are points on the curve – but there is no such thing as “*all* the points of the curve”. The maximum is higher than any points of the curve that we happen to construct, but it isn’t higher than a totality of points, unless the criterion for that, and thus the sense of that statement, is once again simply the construction according to the law of the curve.

Of course the web of errors in this area is very complicated. For example, the confusion between two different meanings of the word “kind” adds to the complexity. For we admit that the infinite numbers are a different *kind* of number from the finite ones, but then here we misunderstand what the difference between different kinds consists of. We don’t realize, that is, that here it’s not a matter of distinguishing between objects according to their properties, as when we distinguish between red and yellow apples, but a matter of different logical forms. – Thus Dedekind tries to *describe* an infinite class by saying that it is a class that is similar to a proper subclass of itself. In this way he appears to have stated a property that a class must have in order to fall under the concept “infinite class” (Frege). Now let’s imagine applying this⁹ definition. Suppose I am to investigate in a particular case whether a class is finite or not, say whether a certain row of trees is finite or infinite. So, in accordance with the definition, I take a subclass of this row of trees and investigate whether it is similar (i.e. can be coordinated one-to-one) to the whole class! (Here everybody is already beginning to laugh, as it were.) This clearly doesn’t mean anything at all; for if I take a “finite class” as a subclass, the attempt to correlate it one-to-one with the whole class must *eo ipso* fail; and if I make the attempt with an infinite subclass – but that is even more of a piece of nonsense, for if it is infinite, then I can’t even attempt this correlation. – What we call a “correlation of all the members of a class with others” in the case of a finite class is something quite different from what we call a correlation of all cardinal numbers with all rational numbers, for instance. The two correlations, or what one refers to with this word in the two cases, belong to different logical types.¹⁰ And an “infinite class” is not a class that contains more members than a finite one, in the ordinary sense of the word “more”. And if we say that an infinite number is greater than a finite one, that doesn’t make the two comparable, because in that statement the word “greater” *has a different meaning* than it has, say, in the proposition “5 is greater than 4”.

8 (V): we’ve carried out

9 (V): the

10 (V): categories.

744 Die Definition gibt nämlich vor, daß aus dem Gelingen oder Mißlingen des Versuchs, eine wirkliche Teilklasse der ganzen Klasse zuzuordnen, hervorgeht, daß sie unendlich bzw. endlich ist. Während es einen solchen entscheidenden Versuch gar nicht gibt. – „Unendliche Klasse“ und „endliche Klasse“ sind verschiedene logische Kategorien;¹³ was von der einen Kategorie¹⁴ sinnvoll ausgesagt werden kann, kann es nicht von der andern.

Der Satz, daß eine Klasse einer ihrer Subklassen nicht ähnlich ist, ist für endliche Klassen nicht wahr, sondern eine Tautologie. Die grammatischen Regeln über die Allgemeinheit jener¹⁵ generellen Implikation im Satz „k ist eine Subklasse von K“¹⁶ enthalten das, was der Satz, K sei eine unendliche¹⁷ Klasse, sagt.

[Ein Satz (wie) „es gibt keine letzte Kardinalzahl“ verletzt den naiven – und rechten – Sinn. Wenn ich frage „wer war der letzte Mann der Prozession“ und die Antwort lautet „es gibt keinen letzten“, so verwirrt sich mir das Denken; was heißt das „es gibt keinen letzten“? ja, wenn die Frage geheißen hätte „wer war der Fahnenträger“, so hätte ich die Antwort verstanden „es gibt keinen Fahnenträger“. Und nach einer solchen Antwort ist ja jene verwirrende¹⁸ gebildet. Wir fühlen nämlich mit Recht: wo von einem Letzten die Rede sein kann, da kann nicht „kein Letzter“ sein. Das heißt aber natürlich: Der Satz „es gibt keine letzte“ müßte richtig lauten: es hat keinen Sinn, von einer „letzten Kardinalzahl“ zu reden, dieser Ausdruck ist unrechtmäßig gebildet. |

745 „Hat die Prozession ein Ende“ könnte auch heißen: ist sie eine in sich geschlossene Prozession. Und nun höre ich die Mathematiker sagen¹⁹ „da siehst Du ja, daß Du Dir sehr wohl einen solchen Fall vorstellen kannst, daß etwas kein Ende hat; warum soll es dann nicht auch andere solche Fälle²⁰ geben können?“ – Aber die Antwort ist: Die „Fälle“ in diesem Sinn des Wortes sind grammatische Fälle und sie bestimmen erst den Sinn der Frage. Die Frage „warum soll es nicht auch andere Fälle geben können“ ist *der* analog gebildet: „Warum soll es nicht noch andere Fälle von Mineralien²¹ geben können, die im Dunkeln leuchten“, aber hier handelt es sich um Fälle der Wahrheit einer Aussage, dort um Fälle, die den Sinn bestimmen.²²

Die Ausdrucksweise: $m = 2n$ ordne eine Klasse einer ihrer echten Subklassen²³ zu, kleidet einen trivialen²⁴ Sinn durch Heranziehung einer irreführenden Analogie in eine paradoxe Form. (Und statt sich dieser paradoxen Form als etwas Lächerlichem zu schämen, brüstet man sich eines Sieges über alle Vorurteile des Verstandes.) Es ist genau so, als stieße man die Regeln des Schach um und sagte, es habe sich gezeigt, daß man Schach auch ganz anders spielen könne. So verwechselt man erst das Wort „Zahl“ mit einem Begriffswort wie „Äpfel“, spricht dann von einer „Anzahl der Anzahlen“ und sieht nicht, daß man in diesem Ausdruck nicht beidemal das gleiche Wort „Anzahl“ gebrauchen sollte; und endlich hält man es für eine Entdeckung, daß die Anzahl der geraden Zahlen die gleiche ist wie die der geraden und ungeraden.

13 (O): Kategorien;

14 (O): Kategorie

15 (V): der

16 (V): Die grammatischen Regeln über die Allgemeinheit der generellen Implikation in dem Satz „k ist eine Subklasse von K“

17 (V): endliche

18 (V): sinnlose

19 (V): Und nun könnte man sagen

20 (V): nicht auch einen andern solchen Fall

21 (V): nicht noch andere Mineralien

22 (V): dort um Fälle, die den Sinn eines Satzes bestimmen.

23 (V): Teilklassen

24 (V): einfachen

That is to say, the definition pretends that what follows from the success or failure of the attempt to correlate a proper subclass with the whole class is that the class is infinite or finite, respectively. Whereas there just isn't any such decisive test. – “Infinite class” and “finite class” are different logical categories; what can be meaningfully asserted of the one category cannot be meaningfully asserted of the other.

With regard to finite classes the proposition that a class is not similar to one of its subclasses is not a truth, but a tautology. The grammatical rules for the generality of that¹¹ general implication in the proposition “*k* is a subclass of *K*” contain what is said by the proposition that *K* is an infinite¹² class.

[A proposition (like) “There is no last cardinal number” is an affront to naive – and correct – common sense. If I ask “Who was the last person in the procession?” and am told “There isn't any last person”, my thinking goes topsy-turvy; what does “There isn't any last person” mean? To be sure, if the question had been “Who was the standard bearer?” I would have understood the answer “There isn't any standard bearer”; and of course that bewildering¹³ answer above is modelled on an answer of the latter kind. For we feel, correctly, that where we can speak of a last one at all, it's impossible for there to be “no last one”. But of course that means: The proposition “There is no last cardinal number” should read, correctly: “It makes no sense to speak of a ‘last cardinal number’ – that expression has been unlawfully formed”.]

“Does the procession have an end?” could also mean: Is it a self-contained procession? And now I hear the mathematicians saying¹⁴: “See, you *can* perfectly well imagine such a case of something not having an end; so why shouldn't it be possible that there are other such cases¹⁵ as well?” – But the answer is: The “cases” in this sense of the word are grammatical cases, and it is they that determine the meaning of the question. The question “Why shouldn't other such cases be possible as well?” is formed in analogy to *this*: “Why shouldn't other such cases of minerals¹⁶ that shine in the dark be possible?”; but the latter is about instances of the truth of a statement, the former about cases that determine the sense.¹⁷

The form of expression “ $m = 2n$ correlates a class with one of its proper subclasses” recruits a misleading analogy to clothe a trivial¹⁸ sense in a paradoxical form. (And instead of being ashamed of this paradoxical form as something ridiculous, people boast about a victory over all prejudices of the intellect.) It's exactly as if one overturned the rules of chess and said it had been shown that chess could also be played quite differently. Thus one first confuses the word “number” with a concept word like “apples”, then one talks about a “number of numbers” and doesn't see that in this expression one shouldn't use the same word “number” both times; and finally one deems it a discovery that the number of the even numbers is equal to the number of the even and odd numbers.

11 (V): the

12 (V): is a finite

13 (V): senseless

14 (V): now one could say

15 (V): that there's another such case

16 (V): other minerals

17 (V): cases that determine the sense of a proposition.

18 (V): simple

Weniger irreführend ist es, zu sagen, „ $m = 2n$ gibt die Möglichkeit der Zuordnung jeder Zahl mit einer andern“, als „ $m = 2n$ ordnet alle Zahlen anderen zu“. Aber auch hier muß erst die Grammatik die Bedeutung des Ausdrucks „Möglichkeit der Zuordnung“ lehren.

- 746 (Es ist beinahe unglaublich, wie ein Problem durch die irreführenden Ausdrucksweisen, die Generation auf Generation rundherum stellt, gänzlich, auf Meilen, blockiert wird, so daß es beinahe unmöglich wird, dazuzukommen.)

Wenn zwei²⁵ Pfeile in derselben Richtung zeigen, ist es dann nicht absurd, diese Richtungen „gleich lang“ zu nennen, weil, was in der Richtung des einen Pfeiles liegt, auch in der des andern liegt? – Die Allgemeinheit von $m = 2n$ ist ein Pfeil, der der Operationsreihe entlang weist. Und zwar kann man sagen, der Pfeil weist in's Unendliche; aber heißt das, daß es ein Etwas, das Unendliche, gibt, auf das er – wie auf ein Ding – hinweist? – Der Pfeil bezeichnet gleichsam die Möglichkeit der Lage von Dingen in seiner Richtung. Das Wort „Möglichkeit“ ist aber irreführend, denn, was möglich ist, wird man sagen, soll eben nun wirklich werden. Auch denkt man dabei immer an zeitliche Prozesse und schließt *daraus*, daß die Mathematik nichts mit der Zeit zu tun hat, daß die Möglichkeit in ihr bereits Wirklichkeit ist.

Die „unendliche Reihe der Kardinalzahlen“ oder „der Begriff der Kardinalzahl“ ist nur so eine Möglichkeit, – wie aus dem Symbol „ $[0, \xi, \xi + 1]$ “ klar hervorgeht. Dieses Symbol selbst ist ein Pfeil, dessen Feder die „0“, dessen Spitze „ $\xi + 1$ “ ist. Es ist möglich, von Dingen zu reden, die in der Richtung des Pfeils liegen, aber irreführend oder absurd, von allen möglichen Lagen der Dinge in der Pfeilrichtung als einem Äquivalent dieser Richtung selbst zu reden. Wenn ein Scheinwerfer Licht in den unendlichen Raum wirft, so beleuchtet er allerdings alles, was in der Richtung seiner Strahlen liegt, aber man soll nicht sagen, er beleuchtet die Unendlichkeit.

- 747 Es ist immer mit Recht höchst verdächtig,²⁶ wenn Beweise in der Mathematik allgemeiner geführt werden, als es der bekannten Anwendung des Beweises entspricht. Es liegt hier immer der Fehler vor, der in der Mathematik allgemeine Begriffe und besondere Fälle sieht. In der Mengenlehre treffen wir auf Schritt und Tritt diese verdächtige Allgemeinheit.

Man möchte immer sagen: „Kommen wir zur Sache!“

Jene allgemeinen Betrachtungen haben stets nur Sinn, wenn man einen bestimmten Anwendungsbereich im Auge hat.

Es gibt eben in der Mathematik keine Allgemeinheit, deren Anwendung auf spezielle Fälle sich noch nicht voraussehen ließe.

Man empfindet darum die allgemeinen Betrachtungen der Mengenlehre (wenn man sie nicht als Kalkül ansieht) immer als Geschwätz und ist ganz erstaunt, wenn einem eine²⁷ Anwendung dieser Betrachtungen gezeigt wird. Man empfindet, es geht da etwas nicht ganz mit rechten Dingen zu.

Der Unterschied zwischen etwas Allgemeinem, das man wissen könne und dem Besonderen, das man aber nicht wisse; oder zwischen der Beschreibung des Gegenstandes, die man kenne, und dem Gegenstand, den man nicht gesehen hat, ist auch ein Stück, das man von der physikalischen Beschreibung der Welt in die Logik hinüber genommen hat. Daß unsere Vernunft Fragen erkennen kann, aber deren Antworten nicht, gehört auch hierher.

25 (V): 2

26 (O): verdächtig,

27 (V): ~~die~~

It is less misleading to say “ $m = 2n$ allows the possibility of correlating every number with another” than to say “ $m = 2n$ correlates all numbers with others”. But here again we don’t know the meaning of the expression “possibility of correlation” until grammar has taught it to us.

(It’s almost unbelievable how a problem gets completely barricaded for miles by the misleading formulations of it that generation upon generation throw up around it, so that it becomes virtually impossible to get to it.)

When two arrows are pointing in the same direction, isn’t it absurd to call these directions “equally *long*”, because whatever lies in the direction of the one arrow, also lies in that of the other? – The generality of $m = 2n$ is an arrow that points along the series generated by the operation. And in fact you can say that the arrow points into the infinite; but does that mean that there is a something, the infinite, that it points to – as to a thing? – The arrow designates the possibility of things lying in its direction, as it were. But the word “possibility” is misleading for, as someone will say, what is possible might now become actual. Furthermore, we always think of temporal processes in this context, and infer *from the fact* that mathematics has nothing to do with time, that in it possibility is already actuality.

The “infinite series of cardinal numbers” or “the concept of cardinal number” is a possibility only in this way – as emerges clearly from the symbol “ $|0, \xi, \xi + 1|$ ”. This symbol is itself an arrow, with the “0” as its tail and the “ $\xi + 1$ ” as its tip. It’s possible to speak of things which lie in the direction of the arrow, but it’s misleading or absurd to speak of all possible positions of things lying in the direction of the arrow as an equivalent for this direction itself. If a searchlight sends light out into infinite space it does indeed illuminate everything lying in the direction of its rays, but you shouldn’t say it illuminates infinity.

It is always right to be extremely suspicious when proofs in mathematics are carried out in a more general fashion than is warranted by the known application of the proof. These are always instances of the mistake that sees general concepts and particular cases in mathematics. In set theory we meet this suspect generality at every step.

One always feels like saying “Let’s get down to the matter at hand”.

In all cases these general considerations only make sense when we have a particular area of application in mind.

In mathematics there just isn’t any such thing as a generalization whose application to particular cases is still unforeseeable.

That’s why the general discussions of set theory (if they aren’t viewed as calculi) always strike us as blather, and why we are greatly astounded when we are shown an application for them. We feel that something is going on here that isn’t quite right.

The distinction between something general, which one can know, and the particular, which one doesn’t know, or between the “known” description of the object, and the object that one hasn’t seen, is another piece that has been carried over from the physical description of the world into logic. That our reason can discover questions but not their answers also belongs in this context.

Die Mengenlehre sucht das Unendliche auf eine allgemeinere Art zu fassen, als es die Untersuchung der Gesetze der reellen Zahlen kann. Sie sagt, daß das wirklich
748 Unendliche mit dem mathematischen Symbolismus überhaupt nicht zu fassen ist, und daß es also nur beschrieben und nicht dargestellt werden kann. Die Beschreibung würde es etwa so erfassen, wie man eine Menge von Dingen, die man nicht alle in der Hand halten kann, in einer Kiste verpackt trägt. Sie sind dann unsichtbar, und doch wissen wir, daß wir sie tragen (gleichsam indirekt). Man könnte von dieser Theorie sagen, sie kaufe die Katze im Sack. Soll sich's das Unendliche in seiner Kiste einrichten, wie es will.

Darauf beruht auch die Idee, daß man logische Formen *beschreiben* kann. In so einer Beschreibung werden uns die Strukturen in einer Verpackung gezeigt, die ihre Form unkenntlich macht²⁸ und so sieht es aus, als könne man von einer Struktur reden, ohne sie in der Sprache selber wiederzugeben. So verpackte Begriffe dürfen wir allerdings verwenden, aber unsere Zeichen haben ihre Bedeutung dann über Definitionen, die eben die Strukturen²⁹ so verhüllt haben; und gehen wir diesen Definitionen nach, so werden die Strukturen wieder enthüllt. (Vergl. Russells Definition von „R*“.)

Es geht, sozusagen, die Logik nichts an, wieviele Äpfel vorhanden sind, wenn von „allen Äpfeln“ geredet wird; dagegen ist es anders mit den Zahlen: für die ist sie einzeln verantwortlich.

Die Mathematik besteht ganz aus³⁰ Rechnungen.

In der Mathematik ist *alles* Algorithmus,³¹ *nichts* Bedeutung; auch dort, wo es *so* scheint,
749 ³²weil wir mit *Worten über* die mathematischen Dinge zu sprechen scheinen. Vielmehr bilden wir dann eben mit diesen Worten einen Algorithmus.³³

In der Mengenlehre müßte man das, was Kalkül ist, trennen von dem, was *Lehre* sein will (und natürlich nicht sein kann). Man muß also die Spielregeln von unwesentlichen Aussagen über die Schachfiguren trennen.

Wie Frege in Cantor's angebliche Definition von „größer“, „kleiner“, „+“, „-“, etc. statt dieser Zeichen neue Wörter einsetzte, um zu zeigen, daß keine wirkliche Definition vorliege, ebenso könnte man in der ganzen Mathematik statt der geläufigen Wörter, insbesondere statt des Wortes „unendlich“ und seiner Verwandten ganz neue, bisher bedeutungslose Ausdrücke setzen, um zu sehen, was der Kalkül mit diesen Zeichen wirklich leistet und was er nicht leistet. Wenn die Meinung verbreitet wäre, daß das Schachspiel uns einen Aufschluß über Könige und Türme gäbe, so würde ich vorschlagen, den Figuren neue Formen und andere Namen zu geben, um zu demonstrieren,³⁴ daß alles zum Schachspiel Gehörige in seinen³⁵ Regeln liegen muß.

Was ein geometrischer Satz bedeutet, was für eine Art der Allgemeinheit³⁶ er hat, das muß sich alles zeigen, wenn wir sehen, wie er angewendet wird. Denn, wenn Einer auch etwas

28 (V): werden die Strukturen und etwa zuordnende Relationen in verpacktem Zustand präsentiert // gezeigt //

29 (V): Begriffe

30 (V): besteht aus

31 (O): Algorithmus,

32 (V): scheint, ~~als~~

33 (O): Algorithmus. // Algorithmus.

34 (V): um die Einsicht zu erleichtern,

35 (V): den

36 (V): bedeutet, welche Allgemeinheit

Set theory attempts to grasp the infinite in a more general way than the investigation of the laws of the real numbers can. It says that you can't grasp the actual infinite through mathematical symbolism at all, and that therefore it can only be described and not represented. The description would encompass it in something like the way in which you carry with you a quantity of things too numerous to be held in your hand by packing them in a box. They're then invisible, but still we know that we're carrying them (so to speak, indirectly). One could say of this theory that it buys a pig in a poke. Let the infinite accommodate itself in its box as it likes.

This is also the basis for the idea that we can *describe* logical forms. In a description of this sort the structures are shown to us in wrapping that makes their shape unrecognizable,¹⁹ and so it looks as if one could speak of a structure without reproducing it in language itself. Concepts that are packed up like this may, to be sure, be used, but then our signs will derive their meaning from the very definitions that have covered up the structures²⁰ in this way; and if we pursue these definitions, the structures are uncovered again. (Cf. Russell's definition of "R*".)

It's none of logic's business, so to speak, how many apples there are when we speak of "all apples". With numbers it is different, though; logic is responsible for each and every one of them.

Mathematics consists entirely of²¹ calculations.

In mathematics *everything* is algorithm, *nothing* meaning; even when it seems there's meaning, because we appear to be speaking *about* mathematical things in *words*. What we're really doing in that case is simply constructing an algorithm with those words.

In set theory what is calculus ought to be separated from what claims to be (and of course cannot be) *theory*. The rules of the game have thus to be separated from inessential statements about the chessmen.

Frege replaced those signs in Cantor's alleged definitions of "greater", "smaller", "+", "-", etc., with new words, to show that here there wasn't any real definition. In the same way, in all of mathematics one could replace the usual words, especially the word "infinite" and its cognates, with entirely new and hitherto meaningless expressions, in order to see what the calculus with these signs really achieves and what it doesn't achieve. If the idea were widespread that chess gave us information about kings and castles, I would propose giving the pieces new shapes and different names, in order to demonstrate²² that everything belonging to chess has to be contained in its²³ rules.

What a geometrical proposition means, what kind of generality²⁴ it has – all of this must show itself when we see how it is applied. For even if someone *were to mean* something

19 (V): structures and possible coordinate relationships are presented // shown // in a wrapped-up state,

20 (V): concepts

21 (V): consists of

22 (V): to facilitate the insight

23 (V): the

24 (V): means, which generality

Unerreichbares³⁷ mit ihm *meinte*,³⁸ so hilft ihm das nicht, da er ihn ja doch nur ganz offen,³⁹ und jedem verständlich, anwenden⁴⁰ kann.

Wenn sich etwa jemand unter dem Schachkönig auch etwas Mystisches vorstellt, so kümmert uns das nicht, weil er ja doch mit ihm nur auf den 8×8 Feldern des Schachbretts ziehen kann.

750 Es gibt ein Gefühl: „In der Mathematik kann es nicht Wirklichkeit und Möglichkeit geben. Alles ist auf *einer* Stufe. Und zwar in gewissem Sinne *wirklich*“. – Und das ist richtig. Denn Mathematik ist ein Kalkül; und der Kalkül sagt von keinem Zeichen, daß es nur *möglich* wäre, sondern er hat es nur mit den Zeichen zu tun, mit denen er *wirklich* operiert. (Vergleiche die Begründung der Mengenlehre mit der Annahme eines möglichen Kalküls mit unendlichen Zeichen.)

Die Mengenlehre, wenn sie sich auf die menschliche Unmöglichkeit eines direkten Symbolismus des Unendlichen beruft, führt dadurch die denkbar krasseste Mißdeutung ihres eigenen Kalküls ein. Es ist freilich eben diese Mißdeutung, die für die Erfindung dieses Kalküls verantwortlich ist. Aber der Kalkül an sich ist natürlich dadurch nicht als etwas Falsches erwiesen (höchstens als etwas Uninteressantes), und es ist sonderbar, zu glauben, daß dieser Teil der Mathematik durch irgendwelche philosophische (oder mathematische) Untersuchungen gefährdet ist. (Ebenso könnte das Schachspiel durch die Entdeckung gefährdet werden, daß sich Kriege zwischen zwei Armeen nicht so abspielen, wie der Kampf auf dem Schachbrett.) Was der Mengenlehre verloren gehen muß, ist vielmehr die Atmosphäre von Gedankennebeln, die den bloßen Kalkül umgibt. Also die Hinweise auf einen, der Mengenlehre zugrunde liegenden, fiktiven Symbolismus, der nicht zu ihrem Kalkül verwendet wird, und dessen scheinbare Beschreibung in Wirklichkeit Unsinn ist. (In der Mathematik dürfen⁴¹ wir alles fingieren, nur nicht einen Teil unseres Kalküls.)

37 (V): Unfaßbares

38 (V): mit ihm meinen könnte,

39 (V): offenbar,

40 (O): anwenden

41 (V): können

inaccessible by it²⁵ it wouldn't help him, because he can only apply it in a way that's completely open²⁶ and intelligible to every one.

Even if someone imagines the chess king as something mystical, that doesn't concern us, because all he can do is make moves with it on the 8×8 squares of the chess board.

There is a feeling: "There can't be actuality and possibility in mathematics. Everything is on *one* level. And in fact, is in a certain sense *actual*". – And that's correct. For mathematics is a calculus; and a calculus does not say of any sign that it is merely *possible*; rather, a calculus is concerned only with the signs with which it *actually* operates. (Cf. justifying set theory by assuming a possible calculus that uses infinite signs.)

When set theory appeals to the human impossibility of a direct symbolization of the infinite it thereby introduces the crudest imaginable misinterpretation of its own calculus. To be sure, it is this very misinterpretation that is responsible for the invention of that calculus. But of course that doesn't show the calculus to be something inherently incorrect (at most it shows it to be something uninteresting), and it's odd to believe that this part of mathematics is imperilled by any kind of philosophical (or mathematical) investigations. (With equal justification chess might be imperilled by the discovery that wars between two armies do not follow the same course as the battle on the chess board.) What set theory has to lose is rather the atmosphere of thought-fog surrounding the bare calculus, that is to say, the references to a fictional symbolism underlying set theory, a symbolism that isn't employed in its calculus, and the apparent description of which is really nonsense. (In mathematics we're allowed²⁷ to make up everything, except for a part of our calculus.)

25 (V): someone succeeded in meaning something
incomprehensible by it

26 (V): obvious

27 (V): able

Extensive Auffassung der reellen Zahlen.

|Das Rätselhafte am Kontinuum ist, wie das Rätselhafte der Zeit für Augustinus, dadurch bedingt, daß wir durch die Sprache verleitet werden, ein Bild auf es¹ anzuwenden, das nicht paßt. Die Mengenlehre behält das unpassende Bild des Diskontinuierlichen bei, aber sagt diesem Bilde Widersprechendes von ihm aus, mit der Idee, mit Vorurteilen zu brechen. Während in Wirklichkeit darauf hingewiesen werden sollte, daß dieses Bild eben nicht paßt und daß man es allerdings nicht strecken kann, ohne es zu zerreißen,² aber ein neues und in ³gewissem Sinne dem alten ähnliches brauchen kann. |

|Der Wirrwarr in der Auffassung des „wirklich Unendlichen“ kommt von dem unklaren Begriff der irrationalen Zahl her. D.h. davon, daß die logisch verschiedensten Gebilde, ohne klare Begrenzung des Begriffs, „irrationale Zahl“ genannt werden. Die Täuschung, als hätte man einen festen Begriff, beruht darauf,⁴ daß man in Zeichen von der Art „0,abc⁵ . . . ad inf.“ einen Standard⁶ zu haben glaubt, dem sie (die Irrationalzahlen) jedenfalls entsprechen müssen. |

752 „Angenommen, ich schneide eine Strecke dort, wo kein rationaler Punkt (keine rationale Zahl) ist.“ Aber kann man denn das? von was für Strecken sprichst Du? – „Aber, wenn meine Meßinstrumente fein genug wären, so könnte ich mich doch durch fortgesetzte Bisektionen einem gewissen Punkt unbegrenzt nähern.“ – Nein, denn ich könnte ja eben niemals erfahren, ob mein Punkt ein solcher ist. Meine Erfahrung wird immer nur sein, daß ich ihn bis jetzt nicht erreicht habe. „Aber wenn ich nun mit einem absolut genauen Reißzeug die Konstruktion der $\sqrt{2}$ durchgeführt hätte und mich nun dem erhaltenen Punkt durch Bisektion näherte, dann *weiß* ich doch, daß dieser Prozeß den konstruierten Punkt niemals erreichen wird.“ – Aber das wäre doch sonderbar, wenn so die eine Konstruktion der andern sozusagen etwas vorschreiben könnte! Und so ist es ja auch nicht. Es ist sehr leicht möglich, daß ich bei der „genauen“ Konstruktion der $\sqrt{2}$ zu einem Punkt komme, den die Bisektion, sagen wir nach 100 Stufen, erreicht; – aber dann werden wir sagen: unser Raum ist nicht euklidisch. –

Der „Schnitt in einem irrationalen Punkt“ ist ein Bild, und ein irreführendes Bild.

Ein Schnitt ist ein *Prinzip* der Teilung in größer und kleiner.

Sind durch den Schnitt einer Strecke die Resultate aller Bisektionen, die sich dem Schnittpunkt nähern sollen, vorausbestimmt? Nein.

1 (O): sie
2 (V): zerbrechen,
3 (V): neues in

4 (V): Begriff, rührt daher,
5 (V): „0,abc†
6 (V): Begriff // Bild

The Extensional Conception of the Real Numbers.

|Like the enigma of time for Augustine, what is enigmatic about the continuum arises because language misleads us into applying a picture to it that doesn't fit. Set theory preserves the inappropriate picture of something discontinuous, but makes statements about it that contradict this picture, with the idea of breaking with prejudices; whereas what really ought to be done is to point out that the picture just doesn't fit, and that although one can't stretch it without tearing¹ it, one can use a new picture that is in a certain sense similar to the old one. |

|The confusion in the conception of the "actual infinite" arises from the unclear concept of "irrational number", that is, from the fact that constructs that are logically quite different are called "irrational numbers" without any clear limits being given to the concept. The illusion that we have a firm concept rests on² our belief that in signs of the form "0.abc³ . . . *ad infinitum*" we have a standard⁴ to which they (the irrational numbers) have to conform whatever happens. |

"Suppose I cut a line-segment at a place where there is no rational point (no rational number)." But can you do that? What sort of line-segment are you speaking of? – "But if my measuring instruments were fine enough, then by continued bisection I *could* get infinitely close to a certain point." – No, for I could never find out whether my point was a point of this kind. All my experience will ever be is that I haven't reached it up to now. "But if I had carried out the construction of $\sqrt{2}$ with absolutely precise drawing instruments, and now by bisection draw nearer to the point I had produced, then I *know* that this process will never reach the constructed point." – But it would be odd if the one construction could, as it were, prescribe something to the others in this way! And indeed that's not the way it is. It's quite possible that in the process of the "exact" construction of $\sqrt{2}$ I get to a point that is reached by the bisection after say 100 steps; – but in that case we'll say: our space is not Euclidean. –

The "cut at an irrational point" is a picture, and a misleading picture.

A cut is a *principle* of division into greater and smaller.

Does a cut through a length determine in advance the results of all bisections that are supposed to approach the point of the cut? No.

1 (V): breaking

2 (V): concept comes from

3 (V): "0.abc~~d~~

4 (V): concept // picture

753 In dem vorigen Beispiel,⁷ in dem ich mich bei der successiven Einschränkung eines Intervalls durch Bisektionen einer Strecke von den Ergebnissen des Würfeln leiten ließ, hätte ich ebensowohl das Anschreiben eines Dezimalbruches von Würfeln leiten lassen können. So bestimmt auch die Beschreibung „endloser Vorgang des Wählens zwischen 1 und 0“ beim Anschreiben eines Dezimalbruches kein Gesetz. Man möchte etwa sagen: Die Vorschrift des endlosen Wählens zwischen 0 und 1 in diesem Falle könnte durch ein Symbol „ $0, \overset{000}{111} \dots \text{ad inf.}$ “ wiedergegeben werden. Wenn ich aber ein Gesetz so andeute: „ $0,001001001 \dots \text{ad inf.}$ “, so ist es nicht das endliche Reihenstück als Specimen der unendlichen Reihe, was ich zeigen will, sondern die aus ihm entnehmbare Gesetzmäßigkeit. Aus „ $0, \overset{000}{111} \dots \text{ad inf.}$ “ entnehme ich eben *kein* Gesetz, sondern gerade den Mangel eines Gesetzes.

(Welches⁸ Kriterium gibt es dafür, daß die irrationalen Zahlen komplett sind? Sehen wir uns eine irrationale Zahl an: Sie läuft entlang einer Reihe rationaler Näherungswerte. Wann verläßt sie diese Reihe? Niemals. Aber sie kommt allerdings auch niemals zu einem Ende.

Angenommen, wir hätten die Gesamtheit aller irrationalen Zahlen mit Ausnahme einer einzigen. Wie würde uns diese abgehen? Und wie würde sie nun – wenn sie dazukäme – die Lücke füllen? – Angenommen, es wäre π . Wenn die irrationale Zahl durch die Gesamtheit ihrer Näherungswerte gegeben ist, so gäbe es bis zu *jedem* beliebigen Punkt eine Reihe, die mit der von π übereinstimmt. Allerdings kommt für jede solche Reihe ein Punkt der Trennung. Aber dieser Punkt kann beliebig weit „draußen“ liegen, so daß ich zu jeder Reihe, die π begleitet, eine finden kann, die es weiter begleitet. Wenn ich also die Gesamtheit der irrationalen Zahlen habe, außer π , und nun π einsetze, so kann ich keinen Punkt angeben, an dem π nun wirklich nötig wird, es hat an *jedem* Punkt einen Begleiter, der es vom Anfang an begleitet.

Auf die Frage „wie würde uns π abgehen“, müßte man antworten: π , wenn es eine Extension wäre, würde uns niemals abgehen. D.h., wir könnten niemals eine Lücke bemerken, die es füllt. Wenn man uns fragte: „aber hast Du auch einen unendlichen Dezimalbruch, der die Ziffer m an der r -ten Stelle hat und n an der s -ten, etc.“ – wir könnten ihm immer dienen.)

754 „Die gesetzmäßig fortschreitenden unendlichen Dezimalbrüche sind noch ergänzungsbedürftig durch eine unendliche Menge regelloser⁹ unendlicher Dezimalbrüche, die ‚unter den Tisch fielen‘, wenn wir uns auf die *gesetzmäßig erzeugten beschränkten*.“ Wo ist so ein nicht gesetzmäßig erzeugter unendlicher Dezimalbruch? Und wie können wir ihn vermissen? Wo ist die Lücke, die er auszufüllen hätte?

Wie ist es, wenn man die verschiedenen Gesetze der Bildung von Dualbrüchen durch die Menge der endlichen Kombinationen der Ziffern 0 und 1 sozusagen kontrolliert? – Die Resultate eines Gesetzes durchlaufen die endlichen Kombinationen und die Gesetze sind daher, was ihre Extensionen anlangt, komplett, wenn *alle* endlichen Kombinationen durchlaufen werden.

Wenn man sagt: zwei Gesetze sind identisch, wenn sie auf jeder Stufe das gleiche Resultat ergeben, so erscheint uns das wie eine ganz allgemeine Regel. In Wirklichkeit aber hat dieser Satz verschiedenen Sinn, je nachdem was das Kriterium dafür ist, daß sie auf jeder Stufe das gleiche Resultat liefern. (Denn die supponierte allgemein anwendbare Methode des endlosen Probierens gibt es ja nicht!) Wir decken also die verschiedensten Bedeutungen

7 (E): Das Beispiel findet sich auf S. 504 unten. 9 (V): ungeordneter

8 (O): „Welches

In my previous example,⁵ where I threw dice to guide me in the successive reduction of an interval by the bisection of a length, I could just as well have thrown dice to guide me in the writing of a decimal fraction. In the same way, the description “endless process of choosing between 1 and 0” does not determine a law in the writing of a decimal fraction. You feel like saying, for instance: The instruction for the endless choice between 0 and 1 in this case could be rendered by a symbol like “ $0, \frac{000}{111} \dots ad\ inf.$ ”. But if I refer to a law in this way: “ $0.001001001 \dots ad\ inf.$ ”, what I want to show is not the finite section of the series as a specimen of the infinite series, but rather the regularity to be gathered from the specimen. What I infer from “ $0, \frac{000}{111} \dots ad\ inf.$ ” is *not* a law, but precisely the lack of a law.

(What criterion is there for the irrational numbers being complete? Let’s look at an irrational number: it runs alongside a series of rational approximations. When does it leave this series? Never. But on the other hand it also never comes to an end.

Suppose we had the totality of all irrational numbers with one exception. How would we miss that one? And how would it – if it were added, fill the gap? – Suppose that it were π . If an irrational number is given through the totality of its approximations, then up to *any* point taken at random there would be a series coinciding with that of π . To be sure, for each such series there comes a point where they diverge. But this point can lie arbitrarily far “outside”, so that for any series agreeing with π I can find one agreeing with it further. So if I have the totality of all irrational numbers except π , and now insert π , I can’t cite a point at which π now really becomes necessary. At *every* point it has a companion agreeing with it from the beginning.

To the question “How would we miss π ?” our answer would have to be “If π were an extension, we would never miss it”, i.e. we would never notice a gap that it fills. If someone asked us “But do you have an infinite decimal expansion with the number m in the r th place and n in the s th place, etc.?” we could always oblige him.)

“The infinite decimal fractions developed in accordance with a law still need supplementing by an infinite set of irregular⁶ infinite decimal fractions that would ‘fall by the wayside’ if we were to *restrict* ourselves to those *generated by a law*.” Where is there such an infinite decimal fraction that isn’t generated according to a law? And how can we miss it? Where is the gap that it would have to fill?

What is it like if someone so to speak “inspects” the various laws for the construction of binary fractions using the set of finite combinations of the numerals 0 and 1? – The results of a law run through the finite combinations, and therefore the laws are complete as far as their extensions are concerned, if *all* the finite combinations are gone through.

If one says “Two laws are identical if they yield the same result at every stage”, this looks to us like a completely general rule. But in reality this proposition has different senses, depending on what the criterion is for their yielding the same result at every stage. (For of course there’s no such thing as the supposed generally applicable method of infinite

5 (E): The example is on p. 504e below.

6 (V): random

mit einer, von einer Analogie hergenommenen, Redeweise und glauben nun, wir hätten die verschiedensten Fälle in *einem* System vereinigt.

(Die Gesetze,¹⁰ die den irrationalen Zahlen entsprechen, gehören insofern alle der gleichen Type an, als sie alle schließlich Vorschriften zur successiven Erzeugung von Dezimalbrüchen sein müssen. Die gemeinsame Dezimalnotation bedingt in gewissem Sinne, eine gemeinsame Type.)

Man könnte das auch so sagen: Beim Approximieren durch fortgesetzte Zweiteilung kann man sich *jedem* Punkt der Strecke durch *rationale* Zahlen nähern. Es gibt keinen Punkt, dem man sich nur durch irrationale Schritte einer bestimmten Type nähern könnte. Dies ist natürlich nur, in andere Worte gekleidet, die Erklärung, daß wir unter irrationaler Zahl einen unendlichen Dezimalbruch verstehen. Und diese Erklärung wieder ist weiter nichts, als eine beiläufige Erklärung der Dezimalnotation, etwa mit einer Andeutung, daß wir Gesetze unterscheiden, die periodische Dezimalbrüche liefern und andere.

Durch die falsche Auffassung des Wortes „unendlich“ und der Rolle der „unendlichen Entwicklung“ in der Arithmetik der reellen Zahlen, wird man zu der Meinung verführt, es gäbe eine einheitliche Notation der irrationalen Zahlen (nämlich eben die der unendlichen Extension, z.B. der unendlichen Dezimalbrüche).

Dadurch, daß man bewiesen hat, daß für jedes Paar von Kardinalzahlen x und y $(\frac{x}{y})^2 \neq 2$ ist, ist doch nicht $\sqrt{2}$ einer Zahlenart – genannt „die irrationalen Zahlen“ – eingeordnet. Diese Zahlenart müßte ich doch erst aufbauen; oder: von der neuen Zahlenart ist mir doch nicht mehr bekannt, als *ich* bekannt mache.

10 (V): Vorschriften,

checking!) By adopting a mode of speaking from an analogy, we conceal the most various meanings, and then believe that we have united the most disparate cases within a *single* system.

(The laws⁷ corresponding to the irrational numbers all belong to the same type, to the extent that they must all ultimately be recipes for the successive construction of decimal fractions. In a certain sense the common decimal notation gives rise to a common type.)

We could also put it this way: In the process of approximation by continued bisection one can draw nearer to *every* point in a length by way of *rational* numbers. There is no point that could only be approached by way of irrational steps of a specified type. Of course, that is nothing but the explanation – clothed in different words – that by irrational numbers we mean endless decimal fractions; and that explanation in turn is only a rough explanation of the decimal notation, including, say, a suggestion that we distinguish between laws that yield recurring decimals and laws that don't.

The incorrect conception of the word “infinite”, and of the role of “infinite expansion” in the arithmetic of the real numbers, seduces us into thinking that there is a uniform notation for irrational numbers (namely the notation of the infinite extension, e.g. of infinite decimal fractions).

In proving that for every pair of cardinal numbers x and y , $(\frac{x}{y})^2 \neq 2$, we have not correlated $\sqrt{2}$ with a *single* kind of number – called “the irrational numbers”. This type of number is something that I still have to construct; or: I don't know any more about the new type of number than I make known.

7 (V): prescripts

Arten irrationaler Zahlen. (π' , P, F)

756

π' ist eine Regel zur Erzeugung von Dezimalbrüchen, und zwar ist die Entwicklung von π' dieselbe, wie die von π , außer wenn in der Entwicklung von π eine Gruppe 777 vorkommt; in diesem Falle tritt statt dieser Gruppe die Gruppe 000. Unser Kalkül kennt keine Methode, um zu finden, wo wir in der Entwicklung von π auf so eine Gruppe stoßen.

P ist eine Regel zur Erzeugung von Dualbrüchen. In der Entwicklung steht an der n-ten Stelle eine 1 oder eine 0, je nachdem n prim ist oder nicht.

F ist eine Regel zur Erzeugung von Dualbrüchen. An der n-ten Stelle steht eine 0, außer dann, wenn ein Zahlentriplett x, y, z aus den ersten 100 Kardinalzahlen die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ löst.

Man möchte sagen, die einzelnen Ziffern der Entwicklung (von π z.B.) sind immer nur die Resultate, die Rinde des fertigen Baumes. Das, worauf es ankommt, oder woraus noch etwas Neues wachsen kann, ist im Innern des Stammes, wo die Triebkräfte sind. Eine Änderung des Äußeren ändert den Baum überhaupt nicht. Um ihn zu ändern, muß man in den noch lebenden Stamm gehen.

757

Ich nenne „ π_n “ die Entwicklung von π bis zur n-ten Stelle. Dann kann ich sagen: Welche Zahl π'_{100} bedeutet,¹ verstehe ich; nicht aber, (welche) π' , weil² π ja gar keine Stellen hat, ich also auch keine durch andere ersetzen kann. Anders wäre es, wenn ich z.B. die Division $\frac{5 \rightarrow 3}{a : b}$ als eine Regel zur Erzeugung von Dezimalbrüchen erkläre, durch Division und Ersetzung jeder 5 im Quotienten durch eine 3. Hier kenne ich z.B. die Zahl⁴ $1 \frac{5 \rightarrow 3}{: 7}$. – Und wenn unser Kalkül eine Methode enthält, ein Gesetz der Lagen von 777 in der Entwicklung von π zu berechnen, dann ist nun im Gesetz von π von 777 die Rede, und das Gesetz kann durch die Substitution von 000 für 777 geändert werden. Dann aber ist π' etwas anderes, als das, was ich oben definiert habe; es hat eine andere Grammatik, als die von mir angenommene. In unserm Kalkül gibt es keine Frage, ob π gleich oder größer ist als π'^5 und keine solche Gleichung oder Ungleichung. π' ist mit π unvergleichbar. Und zwar kann man nun nicht sagen „noch unvergleichbar“, denn, sollte ich einmal etwas π' Ähnliches konstruieren, das mit π vergleichbar ist, dann wird das eben darum nicht mehr π' sein. Denn π' sowie π sind ja Bezeichnungen für ein Spiel, und ich kann nicht sagen, das Damespiel werde *noch* mit weniger Steinen gespielt als das Schach, da es sich ja einmal zu einem Spiel mit 16 Steinen entwickeln könne. Dann wird es nicht mehr das sein, was wir „Damespiel“ nennen. (Es sei denn, daß ich mit diesem Wort gar nicht ein Spiel bezeichne, sondern

1 (V): ist,

2 (V): nicht aber π' , weil

3 (F): MS 113, S. 133r.

4 (F): MS 113, S. 133r.

5 (O): ob $\pi \pi''$ ist oder nicht (V): ob $\pi \pi'$ ist oder nicht

Kinds of Irrational Numbers.

(π', p, f)

π' is a rule for the formation of decimal fractions; specifically, the expansion of π' is the same as the expansion of π except where the sequence 777 occurs in the expansion of π ; in that case the sequence 000 replaces the sequence 777. There is no method known to our calculus for discovering where we will encounter such a sequence in the expansion of π .

P is a rule for the construction of binary fractions. At the n th place of the expansion there occurs a 1 or a 0, depending on whether n is prime or not.

F is a rule for the construction of binary fractions. At the n th place there is a 0, except when a triple x, y, z from the first 100 cardinal numbers satisfies the equation $x^n + y^n = z^n$.

I'm tempted to say that the individual numbers of the expansion (of π , for example) are always only the results, the bark of the fully grown tree. What counts, or what something new can still grow from, is in the inside of the trunk, where the tree's vital energy is. Altering the exterior doesn't change the tree at all. To change it, you have to enter into the living part of the trunk.

I call " π_n " the expansion of π up to the n th place. Then I can say: I understand what number π'_{100} means,¹ but not (what number) π' means,² since π has no places at all, and therefore I can't replace any of its places with others. It would be different if for example I defined the division³ $a \div b$ as a rule for the formation of decimal fractions by division and the replacement of every 5 in the quotient by a 3. In this case I am acquainted, for instance, with the number⁴ $1 \div 7$. — And if our calculus contains a method to calculate a law of the positions of 777 in the expansion of π , then 777 is mentioned in the law of π , and the law can be altered by the substitution of 000 for 777. But in that case π' is something different from what I defined above; it has a different grammar from the one I supposed. In our calculus there is no question whether π is equal to or greater than π' ,⁵ and there is no such equation or inequality. π' is not comparable to π . And, furthermore, one can't say "not yet comparable", because if at some time I should construct something similar to π' that is comparable to π , then for that very reason it will no longer be π' . For π' , like π , is a way of denoting a game, and I cannot say that draughts is *still* played with fewer pieces than chess, since one day it might very well develop into a game with 16 pieces. In that case it would no longer be what we call "draughts" (unless I'm not using this word to designate a game

1 (V): is,

2 (V): but not π' ,

3 (F): MS 113, p. 133r.

4 (F): MS 113, p. 133r.

5 (V): whether π is or is not π' ,

etwa eine Charakteristik mehrerer Spiele; und auch diesen Nachsatz kann man auf π' und π anwenden.) Da es nun ein Hauptcharakteristikum einer Zahl ist, mit andern Zahlen vergleichbar zu sein, so ist die Frage, ob man π' eine Zahl nennen soll und ob eine reelle Zahl; wie immer man es aber *nennt*, so ist das Wesentliche, daß π' in einem andern Sinne Zahl ist, als π . – Ich kann ja auch ein Intervall einen Punkt nennen; ja es kann einmal praktisch sein, das zu tun; aber wird es nun einem Punkt ähnlicher, wenn ich vergesse, daß ich hier das Wort „Punkt“ in doppelter Bedeutung gebraucht habe?

Es zeigt sich hier klar, daß die Möglichkeit der Dezimalentwicklung π' nicht zu einer Zahl im Sinne von π macht. Die Regel für diese Entwicklung ist natürlich eindeutig, so eindeutig wie die für π oder $\sqrt{2}$, aber das ist kein Argument dafür, daß π' eine reelle Zahl ist; wenn man die Vergleichbarkeit mit rationalen Zahlen⁶ für ein wesentliches Merkmal der reellen Zahl nimmt. Man kann ja auch von dem Unterschied zwischen den rationalen und den irrationalen Zahlen abstrahieren, aber der Unterschied verschwindet doch dadurch nicht. Daß π' eine eindeutige Regel zur Entwicklung von Dezimalbrüchen ist, konstituiert⁷ natürlich eine Ähnlichkeit zwischen π' und π oder $\sqrt{2}$; aber auch ein Intervall⁸ hat Ähnlichkeit mit einem Punkt, etc. Allen Irrtümern, die in diesem Kapitel der Philosophie der Mathematik gemacht werden, liegt immer wieder die Verwechslung zu Grunde zwischen internen Eigenschaften einer Form (der Regel als Bestandteil des Regelverzeichnisses) und dem, was man im gewöhnlichen Leben „Eigenschaft“ nennt (rot als Eigenschaft dieses Buches). Man könnte auch sagen; die Widersprüche und Unklarheiten werden dadurch hervorgerufen, daß die Menschen⁹ einmal unter einem Wort, z.B. „Zahl“, ein bestimmtes Regelverzeichnis verstehen, ein andermal ein variables Regelverzeichnis; so als nannte ich „Schach“ einmal das bestimmte Spiel, wie wir es heute spielen, ein andermal das Substrat einer bestimmten historischen Entwicklung.

„Wie weit muß ich π entwickeln, um es einigermaßen zu kennen?“¹⁰ – Das heißt natürlich nichts. Wir kennen es also schon, ohne es überhaupt zu entwickeln. Und, in diesem Sinne, könnte man sagen, kenne ich π' gar nicht. Hier zeigt sich nur ganz deutlich, daß π' einem andern System angehört als π , und das erkennt man, wenn man, statt „die Entwicklungen“ der beiden zu vergleichen, die Art der Gesetze allein ins Auge faßt.

Zwei mathematische Gebilde, deren eines ich in meinem Kalkül mit jeder rationalen Zahl vergleichen kann, das andere nicht, – sind nicht Zahlen im gleichen Sinne des Wortes. Der Vergleich der Zahl mit einem Punkt auf der Zahlengeraden¹¹ ist nur stichhältig, wenn man für je zwei Zahlen a und b sagen kann, ob a rechts von b, oder b rechts von a liegt.

Es genügt nicht, daß man den Punkt durch Verkleinerung seines Aufenthaltsortes – angeblich – mehr und mehr bestimmt, sondern man muß *ihn* konstruieren. Fortgesetztes Würfeln schränkt zwar den möglichen Aufenthalt des Punktes unbeschränkt ein, aber es bestimmt keinen Punkt. Der Punkt ist nach *jedem* Wurf (oder jeder Wahl) noch unendlich unbestimmt – oder richtiger: er ist nach jedem Wurf unendlich unbestimmt. Ich glaube, hier werden wir von der *absoluten* Größe der Gegenstände in unserem Gesichtsraum irreführt; und andererseits von der Zweideutigkeit des Ausdrucks „sich einem Punkte¹² nähern“. Von einer Strecke im Gesichtsfeld kann man sagen, sie nähere sich durch Einschrumpfen immer mehr einem Punkt; d.h. sie werde einem Punkt immer ähnlicher. Dagegen wird die euklidische Strecke durch Einschrumpfen einem Punkt *nicht* ähnlicher, sie bleibt ihm

6 (V): mit andern reellen Zahlen

7 (V): bedeutet

8 (O): Intervall

9 (V): Mathematiker

10 (V): erkennen?

11 (V): Zahlgeraden

12 (V): Gegenstand

at all, but, say, a characteristic of several games; and this qualification can be applied to π' and π as well). Now since being comparable with other numbers is a fundamental characteristic of a number, the question arises whether one is to call π' a number, and whether one is to call it a real number; but whatever it is *called*, the essential thing is that π' is a number in a different sense than π . I can also call an interval a point; and indeed on occasion it can be practical to do so; but does it become more like a point if I forget that here I've used the word "point" with two different meanings?

Here it's clear that the possibility of the decimal expansion doesn't turn π' into a number in the same sense as π . Of course the rule for this expansion is unambiguous, as unambiguous as that for π or $\sqrt{2}$; but that doesn't mean that π' is a real number, if one takes comparability with rational⁶ numbers to be an essential feature of real numbers. Indeed, one can also abstract from the distinction between the rational and irrational numbers, but that does not make the distinction disappear. Of course the fact that π' is an unambiguous rule for the development of decimal fractions does constitute⁷ a similarity between π' and π or $\sqrt{2}$; but then too an interval is similar to a point, etc. All the errors that are made in this chapter of the philosophy of mathematics are based, again and again, on the confusion between the internal properties of a form (of a rule as part of a list of rules) and what we call "properties" in everyday life (red as a property of this book). We could also say: The contradictions and unclarities are brought about by the fact that by a single word, e.g. "number", people⁸ understand at one time a definite set of rules, and at another time a variable set: as if what I call "chess" was on one occasion the specific game as we play it today, and on another the substratum of a particular historical development.

"How far must I expand π in order to know it to some extent?" – Of course that means nothing. We already know it without expanding it at all. And in this sense it could be said that I don't know π' at all. Here it becomes quite clear that π' belongs to a different system from π , and that is something we recognize if we look solely at the nature of the laws instead of comparing "the expansions" of the two numbers.

Two mathematical structures, of which one but not the other can be compared in my calculus with every rational number, are not numbers in the same sense of the word. The comparison of a number to a point on the number line is valid only if we can say for every pair of numbers a and b whether a is to the right of b or b to the right of a.

It's not enough that we – supposedly – determine a point ever more closely by narrowing down its whereabouts; rather, we must construct *it*. To be sure, continued throwing of a die indefinitely restricts the possible location of a point, but it doesn't determine a point. After *every* throw (or every choice) the point is still infinitely indeterminate – or more correctly, after every throw it *is* infinitely indeterminate. I think that we are misled here by the *absolute* size of the objects in our visual space; and on the other hand, by the ambiguity of the expression "to approach a point".⁹ We can say of a line in the visual field that in shrinking, it is getting closer and closer to a point; that is, that it is becoming more and more like a point. On the other hand a Euclidean line does *not* become any more like a point by shrinking; it always remains *equally* dissimilar to it, because its length, so to speak,

6 (V): with other real

7 (V): does mean

8 (V): "number", the mathematicians

9 (V): approach an object".

vielmehr immer *gleich* unähnlich, weil ihre Länge den Punkt, sozusagen, gar nichts angeht. Wenn man von der euklidischen Strecke sagt, sie nähere sich durch Einschrumpfen einem Punkt, so hat das nur Sinn, sofern schon ein Punkt bezeichnet ist, dem sich ihre Enden nähern, und kann nicht heißen, sie *erzeuge* durch Einschrumpfen einen Punkt. Sich einem Punkt nähern hat eben zwei Bedeutungen: es heißt einmal, ihm räumlich näher kommen, dann muß er schon da sein, denn ich kann mich in diesem Sinne einem Menschen nicht nähern, der nicht vorhanden ist. Andererseits heißt es „einem Punkt ähnlicher werden“, wie man etwa sagt, die Affen haben sich dem Stadium des Menschen in ihrer Entwicklung genähert, die Entwicklung habe den Menschen erzeugt.

Zu sagen „zwei¹³ reelle Zahlen sind identisch, wenn sie in *allen* Stellen ihrer Entwicklung übereinstimmen“, hat nur dann Sinn, wenn ich dem Ausdruck „in allen Stellen übereinstimmen“, durch eine Methode diese Übereinstimmung festzustellen, einen Sinn *gegeben* habe. Und das Gleiche gilt natürlich für den Satz „sie stimmen nicht überein, wenn sie an *irgend einer* Stelle nicht übereinstimmen“.

Könnte man aber nicht auch umgekehrt π' als das Ursprüngliche, und also als den zuerst angenommenen Punkt, betrachten und¹⁴ dann über die Berechtigung von π im Zweifel sein? – Was ihre Extensionen betrifft, sind sie natürlich gleichberechtigt; was uns aber dazu veranlaßt, π einen Punkt auf der Zahlengeraden zu nennen, ist seine Vergleichbarkeit mit den Rationalzahlen.

Wenn ich π , oder sagen wir $\sqrt{2}$, als Regel zur Erzeugung von Dezimalbrüchen auffasse, so kann ich natürlich eine Modifikation dieser Regel erzeugen, indem ich sage, es solle jede 7 in der Entwicklung von $\sqrt{2}$ durch eine 5 ersetzt werden; aber diese Modifikation ist von ganz anderer *Art*¹⁵ als die, welche, etwa, durch eine Änderung des Radikanten, oder des Wurzelexponenten erzeugt wird. Ich nehme z.B. in das modifizierte Gesetz eine Beziehung zum Zahlensystem der Entwicklung auf, die in dem ursprünglichen Gesetz $\sqrt{2}$ nicht vorhanden war. Die Änderung des Gesetzes ist von viel fundamentalerer Art, als es zuerst den Anschein haben könnte. Ja, wenn wir das falsche Bild von der unendlichen Extension vor uns haben, dann kann es allerdings scheinen, als ob ich durch die Hinzufügung der Ersetzungsregel $7 \rightarrow 5$ zur $\sqrt{2}$ diese viel weniger verändert hätte, als etwa durch Änderung der $\sqrt{2}$ in $\sqrt{2,1}$, denn die Entwicklungen¹⁶ von $\sqrt[7 \rightarrow 5]{2}$ lauten denen von $\sqrt{2}$ sehr ähnlich, während die Entwicklung der $\sqrt{2,1}$ schon nach der zweiten Stelle gänzlich von der der $\sqrt{2}$ abweicht.

Gebe ich eine Regel ρ zur Bildung von Extensionen an, aber so, daß mein Kalkül kein Mittel kennt, vorherzusagen, wie oft höchstens sich eine scheinbare Periode der Extension wiederholen kann, dann ist ρ von einer reellen Zahl insofern verschieden, als ich $\rho - a$ in gewissen Fällen nicht mit einer Rationalzahl vergleichen kann, so daß der Ausdruck $\rho - a = b$ unsinnig wird. Wäre z.B. die mir bekannte Entwicklung von ρ bis auf weiteres 3,141111 . . . , so ließe es sich von der Differenz $\rho - 3,141$ nicht sagen, sie sei größer, oder sie sei kleiner, als 0; sie läßt sich also in diesem Sinne nicht mit 0 vergleichen, also nicht mit einem Punkt der Zahlenachse, und man kann sie¹⁷ und ρ nicht in demselben Sinne Zahl nennen wie einen dieser Punkte.

13 (V): sagen: „zwei

14 (V): betrachten; und

15 (V): *Natur*

16 (V): Entwicklung

17 (O): und sie

isn't any of a point's business. If we say of a Euclidean line that in shrinking it's getting closer to a point, that only makes sense in so far as a point has already been designated which its ends are approaching; it can't mean that in shrinking it *produces* a point. To approach a point simply has two meanings: on the one hand it means to come spatially closer to it, and in that case the point must already be there, because in this sense I cannot approach a person who isn't there; on the other hand, it means "to become more like a point", as we say for instance that the apes have approached the stage of human beings in their development, the development that produced human beings.

To say "Two real numbers are identical if they coincide in *all* places of their expansion" only makes sense if, by producing a method for establishing this coincidence, I have *given* a sense to the expression "coincide in all places". And the same naturally holds for the proposition "They do not coincide if they don't coincide in *any one* place".

But conversely couldn't one see π' as the original, and therefore as the point that was assumed first, and then be in doubt about the justification of π ? – As far as their extensions are concerned, they are of course equally legitimate; but what causes us to call π a point on the number line is its comparability with the rational numbers.

If I understand π , or let's say $\sqrt{2}$, as a rule for generating decimal fractions, I can of course produce a modification of this rule by saying that every 7 in the expansion of $\sqrt{2}$ is to be replaced by a 5; but this modification is of a completely different *kind*¹⁰ from the one that's produced, say, by an alteration of the radicand, or of the exponent of the radical sign. For instance, in the modified law I am including a reference to the number system of the expansion which wasn't present in the original rule for $\sqrt{2}$. This change in the law is of a much more fundamental kind than might at first appear. Of course, if we have the incorrect picture of the infinite extension before our minds, it can indeed appear as if by appending the substitution rule $7 \rightarrow 5$ to $\sqrt{2}$ I had altered that much less than by altering $\sqrt{2}$ into $\sqrt{2 \cdot 1}$; for the expansions¹¹ of $\sqrt[7 \rightarrow 5]{2}$ are very similar to those of $\sqrt{2}$, whereas the expansion of $\sqrt{2 \cdot 1}$ deviates completely from that of $\sqrt{2}$ from the second place onward.

If I state a rule ρ for the formation of extensions, but in such a way that my calculus knows no way of predicting what is the maximum number of times an apparently recurring period of the extension can be repeated, then ρ differs from a real number in so far as in certain cases I can't compare $\rho - a$ with a rational number, so that the expression $\rho - a = b$ becomes nonsensical. If for instance the expansion of ρ so far known to me were 3·14 followed by an unlimited series of ones (3·1411111 . . .), it wouldn't be possible to say of the difference $\rho - 3 \cdot 14\dot{1}$ that it was greater or less than 0; so in this sense it can't be compared with 0, i.e. with a point on the number axis; and it and ρ can't be called numbers in the same sense as one of these points.

10 (V): *nature*

11 (V): *expansion*

[Die Ausdehnung eines Begriffes der Zahl, des Begriffs „alle“, etc. erscheint uns (ganz) harmlos; aber sie ist es nicht, sobald¹⁸ wir vergessen, daß wir unsern Begriff tatsächlich geändert haben.]

762 [Was die irrationalen Zahlen betrifft, so sagt meine Untersuchung nur, daß es falsch (oder irreführend) ist, von Irrationalzahlen zu sprechen, indem man sie als Zahlenart den Kardinalzahlen und Rationalzahlen gegenüberstellt, weil man „Irrationalzahlen“ in Wirklichkeit verschiedene Zahlenarten nennt, – voneinander so verschieden, wie die Rationalzahlen von jeder dieser Arten.]

Es wäre eine gute Frage für die Scholastiker gewesen: „Kann Gott alle Stellen von π kennen“.

Es tritt uns bei diesen Überlegungen immer wieder etwas entgegen, was man „arithmetisches Experiment“ nennen möchte. Was herauskommt ist zwar durch das Gegebene bestimmt, aber ich kann nicht erkennen, *wie* es dadurch bestimmt ist. So geht es mit dem Auftreten der 7 in der Entwicklung von π ; so ergeben sich auch die Primzahlen als Resultate eines Experiments. Ich kann mich davon überzeugen, daß 31 eine Primzahl ist, aber ich sehe den Zusammenhang nicht zwischen ihr (ihrer Lage in der Reihe der Kardinalzahlen) und der Bedingung, der sie entspricht. – Aber diese Perplexität ist nur die Folge eines falschen Ausdrucks. Der Zusammenhang, den ich nicht zu sehen glaube, existiert gar nicht. Ein – sozusagen unregelmäßiges – Auftreten der 7 in der Entwicklung von π gibt es gar nicht, denn es gibt ja keine Reihe, die „*die* Entwicklung von π “ hieße. Es gibt Entwicklungen von π , nämlich die, die man entwickelt hat (vielleicht 1000) und in diesen kommt die 7 nicht „regellos“ vor, denn ihr Auftreten in ihnen läßt sich beschreiben. – (Dasselbe für die „Verteilung der Primzahlen“. Wer uns ein Gesetz dieser Verteilung gibt, gibt uns eine *neue* Zahlenreihe, *neue* Zahlen.) (Ein Gesetz des Kalküls, das ich nicht kenne, ist kein Gesetz.) (Nur was ich *sehe*, ist ein Gesetz; nicht, was ich *beschreibe*. Nur das hindert mich, mehr in meinen Zeichen auszudrücken, als ich verstehen kann.)

763 Hat es keinen Sinn, – auch dann, wenn der Fermat’sche Satz bewiesen ist, – zu sagen $F = 0,11$? (Wenn ich etwa in der Zeitung davon läse.) Ja, ich werde dann sagen: „nun können wir also schreiben $F = 0,11$ “. D.h. es liegt nahe, das Zeichen „F“ aus dem früheren Kalkül, in dem es keine Rationalzahl bezeichnete, in den neuen hinüberzunehmen und nun $0,11$ damit zu bezeichnen.

F wäre ja eine Zahl, von der wir nicht wüßten ob sie rational oder irrational ist. Denken wir uns eine Zahl, von der wir nicht wüßten, ob sie eine Kardinalzahl oder eine Rationalzahl ist. – Eine Beschreibung im Kalkül gilt eben nur als dieser bestimmte Wortlaut und hat nichts mit einem Gegenstand der Beschreibung zu tun, der vielleicht einmal gefunden werden wird.

Man könnte was ich meine auch in den Worten ausdrücken: Man kann keine Verbindung von Teilen der Mathematik oder Logik herausfinden, die schon vorhanden war, ohne daß man es wußte.

In der Mathematik gibt es kein „noch nicht“ und kein „bis auf weiteres“ (außer in dem Sinne, in welchem man sagen kann, man habe noch nicht 1000-stellige Zahlen miteinander multipliziert).

18 (V): wenn

| The extension of a concept of number, of the concept “all”, etc., seems (quite) harmless to us; but it stops being harmless as soon as we¹² forget that we have in fact changed our concept. |

| As far as the irrational numbers are concerned, my investigation says only that it is incorrect (or misleading) to speak of irrational numbers by contrasting them as a type of number with cardinal numbers and rational numbers; because what are called “irrational numbers” are actually different types of numbers – as different from each other as the rational numbers are different from each of these types. |

“Can God know all the places of π ?” would have been a good question for the scholastics.

In these considerations we encounter again and again something that one is inclined to call an “arithmetical experiment”. The result, to be sure, is determined by the data, but I can’t make out *how* they determine it. That is how it goes with the occurrences of the 7s in the expansion of π ; in the same way, the primes are produced as the results of an experiment. I can ascertain that 31 is a prime number, but I don’t see the connection between it (its position in the series of cardinal numbers) and the condition it satisfies. – But this perplexity is nothing but the consequence of an incorrect expression. The connection that I think I don’t see doesn’t even exist. There is no such thing as an – as it were irregular – occurrence of 7s in the expansion of π , because there isn’t any series that might be called *the* expansion of π . There are expansions of π , namely those that have been calculated (perhaps 1,000) and in those the 7s don’t occur “irregularly”, because their occurrence there can be described. – (The same goes for the “distribution of the primes”. Whoever gives us a law for this distribution gives us a *new* number series, *new* numbers.) (A law of the calculus that I do not know is not a law). (Only what I *see* is a law; not what I *describe*. That is the only thing standing in the way of my expressing more in my signs than I can understand.)

Does it make no sense to say – even after Fermat’s theorem has been proved – that $F = 0.11$? (If, say, I were to read about it in the papers.) Indeed, I will then say, “So now we can write ‘ $F = 0.11$ ’.” That is, it is tempting to transfer the sign “F” from the earlier calculus, in which it didn’t denote a rational number, into the new one, and now to denote 0.11 with it.

F, after all, would be a number of which we wouldn’t know whether it was rational or irrational. Let’s imagine a number of which we didn’t know whether it was a cardinal number or a rational number. – A description in a calculus is valid only with a particular wording, and it has nothing to do with an object that is given by description and that may someday be found.

What I mean could also be expressed by the words: We can’t discover any connection between parts of mathematics or logic that was already there without our knowing it.

In mathematics there is no “not yet” and no “until further notice” (except in the sense in which we can say that we have not yet multiplied 1,000-digit numbers by each other.).

12 (V): harmless when we

„Ergibt die Operation, z.B., eine rationale Zahl?“ – wie kann das gefragt werden, wenn man keine Methode zur Entscheidung der Frage hat? denn die Operation *ergibt* doch nur im festgesetzten Kalkül. Ich meine: „ergibt“ ist doch wesentlich zeitlos.¹⁹ Es heißt doch nicht: „ergibt mit der Zeit“! – sondern: ergibt nach der jetzt bekannten, festgesetzten Regel.²⁰

764 „Die Lage aller Primzahlen muß doch irgendwie vorausbestimmt sein. Wir rechnen sie nur successive aus, aber sie sind alle schon bestimmt. Gott kennt sie sozusagen alle. Und dabei scheint es doch möglich, daß sie nicht durch ein Gesetz bestimmt sind.“ – Immer wieder das Bild von der Bedeutung eines Wortes, als einer vollen Kiste, deren Inhalt uns mit ihr und in ihr verpackt gebracht wird, und den wir nur zu untersuchen haben. – Was wissen wir denn von den Primzahlen? Wie ist uns denn dieser Begriff überhaupt gegeben? Treffen wir nicht selbst die Bestimmungen über ihn? Und wie seltsam, daß wir dann annehmen, es müssen Bestimmungen über ihn getroffen sein, die wir nicht getroffen haben. Aber der Fehler ist begreiflich. Denn wir gebrauchen das Wort „Primzahlen“ und es lautet ähnlich wie „Kardinalzahlen“, „Quadratzahlen“, „gerade Zahlen“, etc. So denken wir, es wird sich ähnlich gebrauchen lassen, vergessen aber, daß wir ganz andere –*andersartige*– Regeln für das Wort „Primzahl“ gegeben haben, und kommen nun mit uns selbst in einen seltsamen Konflikt. – Aber wie ist das möglich? die Primzahlen sind doch die uns wohlbekanntesten Kardinalzahlen, – wie kann man dann sagen, der Begriff der Primzahl sei in anderem Sinne ein Zahlbegriff, als der der Kardinalzahl? Aber hier spielt uns wieder die Vorstellung einer „unendlichen Extension“ als eines Analogons²¹ zu den uns bekannten „endlichen“ Extensionen einen Streich. Der Begriff „Primzahl“ ist freilich mit Hilfe des Begriffes „Kardinalzahl“ erklärt, aber nicht „die Primzahlen“ mit Hilfe der „Kardinalzahlen“; und den Begriff „Primzahl“ *haben wir* in wesentlich anderer Weise aus dem Begriff „Kardinalzahl“ abgeleitet, als, etwa, den Begriff „Quadratzahl“. (Wir können uns also nicht wundern, wenn er sich anders benimmt.) Man könnte sich sehr wohl eine Arithmetik denken, die – sozusagen – beim Begriff „Kardinalzahl“ sich nicht aufhält, sondern gleich zu dem der Quadratzahl übergeht (diese Arithmetik wäre natürlich nicht so anzuwenden, wie die unsere). Aber der Begriff „Quadratzahl“ hätte dann nicht den Charakter, den er in unserer Arithmetik hat; daß er nämlich wesentlich ein Teilbegriff sei, daß die Quadratzahlen wesentlich ein Teil

765 der Kardinalzahlen seien; sondern sie wären eine komplette Reihe mit einer kompletten Arithmetik. Und nun denken wir uns dasselbe für die Primzahlen gemacht! Da würde es klar, daß diese nun in einem andern Sinne „Zahlen“ seien, als z.B. die Quadratzahlen; und als die Kardinalzahlen.

Könnten die Berechnungen eines Ingenieurs ergeben, daß die Stärken eines Maschinenteils bei gleichmäßig wachsender Belastung in der Reihe der Primzahlen fortschreiten müssen?²²

19 (V): präsens.

20 (V): nach der gegenwärtigen Regel.

21 (V): als einem Analogon

22 (V): daß die Stärke // daß eine Dimension // eines Maschinenteils bei gleichmäßig wachsender Belastung in der Reihe der Primzahlen fortschreiten müsse?

“Does the operation yield a rational number, for instance?” – How can that be asked, if we have no method for deciding the question? For it is only in an established calculus that the operation *yields* results. I mean: “yields” is essentially timeless.¹³ It *doesn't* mean “yields, given time!” – but: yields in accordance with the rule currently known and established.¹⁴

“The position of all primes must somehow be predetermined. We just figure them out successively, but they are all already determined. God, as it were, knows them all. And yet for all that it seems possible that they have not been determined by a law.” – Time and again there's this picture of the meaning of a word as a full box, whose contents are brought to us along with the box and packed up in it, and now all we have to do is examine them. – What do we know about the prime numbers, anyway? How has this concept been given to us at all? Don't we ourselves specify it? And how odd that we then assume that specifications must have been made about it that we ourselves didn't make! But the mistake is understandable. For we use the expression “prime numbers”, and it sounds similar to “cardinal numbers”, “square numbers”, “even numbers”, etc. So we think it can be used in a similar way, but forget that for the expression “prime number” we have given quite different rules – rules *different in kind* – and now we get into a strange conflict with ourselves. – But how is that possible? After all, the prime numbers are the familiar cardinal numbers – how can one then say that the concept of prime number is a number concept in a different sense from the concept of cardinal number? But here again we are tricked by the mental image of an “infinite extension” as an analogue to the familiar “finite” extensions. To be sure, the concept “prime number” is defined by means of the concept “cardinal number”, but “the prime numbers” aren't defined by means of “the cardinal numbers”; and *we did* derive the concept of “prime number” from the concept “cardinal number” in an essentially different way from the way we derived, say, the concept “square number”. (So we cannot be surprised if it behaves differently.) One could easily imagine an arithmetic which – as it were – didn't waste time with the concept “cardinal number”, but went straight on to that of square numbers. (Of course that arithmetic couldn't be applied in the same way as ours.) But then the concept “square number” wouldn't have the characteristic it has in our arithmetic, namely that of being essentially a part-concept, with the square numbers essentially a subclass of the cardinal numbers; in that case the square numbers would be a complete series with a complete arithmetic. And now let's imagine the same thing done for the prime numbers! That would make it clear that they are “numbers” in a different sense than, for example, the square numbers; and the cardinal numbers.

Could the calculations of an engineer yield the result that the thicknesses of a machine part must increase in accordance with the series of primes, given an increase of load at a uniform rate?¹⁵

13 (V): essentially present tense.

14 (V): with the current rule.

15 (V): that the thickness // one dimension // of a machine part must increase in accordance with

the series of primes, given an increase of load at a uniform rate?

Regellose unendliche Dezimalzahl.

„Regellose unendliche Dezimalzahl“. Die Auffassung ist immer die, als ob wir nur Wörter unserer Umgangssprache zusammenstellen brauchten, und die Zusammenstellung hätte damit einen Sinn, den wir jetzt eben erforschen müßten – wenn er uns nicht gleich ganz klar sein sollte. Es ist, als wären die Wörter Ingredientien einer chemischen Verbindung, die wir zusammenschütten, sich miteinander verbinden lassen, und nun müßten wir eben die Eigenschaften der (betreffenden) Verbindung untersuchen. Wer sagte, er verstünde den Ausdruck „regellose unendliche Dezimalzahl“ nicht, dem würde geantwortet: „das ist nicht wahr, Du verstehst ihn sehr gut! weißt Du nicht, was die Worte „regellos“, „unendlich“ und „Dezimalzahl“ bedeuten?! – Nun, dann verstehst Du auch ihre Verbindung“. Und mit dem „Verständnis“ ist hier gemeint, daß er diese Wörter in gewissen Fällen anzuwenden weiß und etwa eine *Vorstellung mit ihnen verbindet*. In Wirklichkeit tut der, welcher diese Worte zusammenstellt und fragt „was bedeutet das“ etwas ähnliches, wie die kleinen Kinder, die ein Papier mit regellosen Strichen bekratzeln, es dem Erwachsenen zeigen und fragen: „was ist das?“

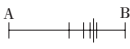
767 „Unendlich kompliziertes Gesetz“, „unendlich komplizierte Konstruktion“. („Es glaubt der Mensch, wenn er nur Worte hört, es müsse sich dabei auch etwas denken lassen.“¹)

Wie unterscheidet sich ein unendlich kompliziertes Gesetz vom Fehlen eines Gesetzes?

(Vergessen wir nicht: Die Überlegungen der Mathematiker über das Unendliche sind doch lauter endliche Überlegungen. Womit ich nur meine, daß sie ein Ende haben.)

„Eine regellose unendliche Dezimalzahl kann man sich z.B. dadurch erzeugt denken, daß endlos gewürfelt wird und die Zahl der Augen jedesmal eine Dezimalstelle ist.“ Aber, wenn endlos gewürfelt wird, kommt ja eben kein endgültiges Resultat heraus.

„Nur der menschliche Intellekt kann das nicht erfassen, ein höherer könnte es!“ Gut, dann beschreibe mir die Grammatik des Ausdrucks „höherer Intellekt“; was kann ein solcher erfassen und was nicht, und in welchem Falle (der Erfahrung)² sage ich, daß ein Intellekt etwas erfaßt? Du wirst dann sehen, daß die Beschreibung des Erfassens das Erfassen selbst ist. (Vergleiche: Lösung eines mathematischen Problems.)

Nehmen wir an, wir würfen mit einer Münze „Kopf und Adler“ und teilen nun eine Strecke \overline{AB} nach folgender Regel: „Kopf“ sagt:  „Adler“ sagt: nimm die rechte Hälfte etc. Durch fortgesetztes Würfeln erzeuge ich dann Schnittpunkte, die sich in einem immer kleineren Intervall⁴ bewegen. Beschreibt es nun die Lage eines Punktes,

768

1 (E): Vgl. Goethe, *Faust I*, 2565-2566.

2 (V): und unter welchen Umständen

3 (F): MS 113, S. 81r.

4 (O): Intervall

Irregular Infinite Decimals.

“Irregular infinite decimal number.” We always have the idea that all we have to do is to put together the words of our everyday language, and that in so doing the combination has a sense that we now just have to explore – if it happens not to be completely clear to us right away. It’s as if words were ingredients of a chemical compound, which we pour together and allow to combine with each other; and now we simply have to investigate the properties of the (respective) compound. Someone who said that he didn’t understand the expression “irregular infinite decimal number” would get the answer “That’s not true, you understand it perfectly well: don’t you know what the words ‘irregular’, ‘infinite’, and ‘decimal number’ mean? – Well, then, you understand their combination as well.” And what is meant by “understanding” here is that he knows how to apply these words in certain cases, and say *connects a mental image with them*. In fact, someone who puts these words together and asks “What does that mean?” is doing something similar to what small children do when they cover a piece of paper with random scribbles, show it to a grown-up, and ask “What’s that?”

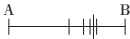
“Infinitely complicated law”, “infinitely complicated construction”. (“Men always believe, if only they hear words / That some sort of meaning must also be there.”¹)

How does an infinitely complicated law differ from the absence of a law?

(Let’s not forget: mathematicians’ deliberations about the infinite are all finite deliberations, after all. By which I mean only that they come to an end.)

“One can imagine an irregular infinite decimal being generated, for example, by an endless throwing of dice, with the number of spots in each case being a decimal place.” But if the throwing goes on for ever, what comes out is precisely not a final result.

“It’s only the human intellect that can’t grasp that. A higher intellect could do it!” Fine, then describe to me the grammar of the expression “higher intellect”; what such an intellect can grasp and what it can’t grasp, and in what (empirical) situation do² I say that an intellect grasps something? You will then see that describing grasping is itself grasping. (Compare: the solution of a mathematical problem.)

Suppose we throw heads and tails with a coin and now divide a length AB in accordance with the following rule: “Heads” means:  ³take the left half and divide it in the way the next throw prescribes. “Tails” says “take the right half, etc.” By repeated throws I then create dividing-points that move in an ever smaller interval. Now does it describe the position of a point if I say that it is to be the one infinitely

1 (E): Goethe, *Faust* I, 2565–2566.

3 (F): MS 113, p. 81r.

2 (V): in what circumstances do

wenn ich sage, es solle der sein, dem sich bei fortgesetztem Würfeln die Schnitte unendlich nähern? Hier glaubt man etwa einen Punkt bestimmt zu haben, der einer regellosen unendlichen Dezimalzahl entspricht. Aber die Beschreibung bestimmt doch *ausdrücklich: keinen* Punkt; es sei denn, daß man sagt, daß die Worte „Punkt auf dieser Strecke“ auch „einen Punkt bestimmen“. Wir verwechseln hier die Vorschrift des Würfeln mit der mathematischen Vorschrift, etwa Dezimalstellen der $\sqrt{2}$ zu erzeugen. Diese mathematischen Vorschriften *sind* die Punkte. D.h., es lassen sich zwischen diesen Vorschriften Beziehungen finden, die in ihrer Grammatik den Beziehungen „größer“ und „kleiner“ zwischen zwei Strecken analog sind und daher mit diesen Worten bezeichnet werden. Die Vorschrift, Stellen der $\sqrt{2}$ auszurechnen, ist das Zahlzeichen der irrationalen Zahl selbst; und ich rede hier von einer „Zahl“, weil ich mit diesen Zeichen (gewissen Vorschriften zur Bildung von Rationalzahlen) ähnlich rechnen kann, wie mit den Rationalzahlen selbst. Will ich also analog sagen, die Vorschrift des endlosen Halbierens nach Kopf und Adler bestimme einen Punkt, eine Zahl, so müßte das heißen, daß diese Vorschrift als Zahlzeichen, d.h. analog andern Zahlzeichen, gebraucht werden kann. Das ist aber natürlich nicht der Fall. Sollte diese Vorschrift einem Zahlzeichen entsprechen, so höchstens (sehr entfernt) dem unbestimmten Zahlwort „einige“, denn sie tut nichts, als eine Zahl offen zu lassen. Mit einem Wort, ihr entspricht nichts anderes, als das ursprüngliche Intervall⁵ \overline{AB} .

5 (O): Interval

approached by the cuts, given continued throwing of the coin? Here one might believe he's determined a point corresponding to an irregular infinite decimal. But the description, after all, *determines: no* point; unless one says that the words "point on this line" also "determine a point"! Here we're confusing the instruction to throw the coin with a mathematical instruction, say to generate the decimal places of $\sqrt{2}$. Those mathematical instructions *are* the points. That is, you can find relations between those instructions that are analogous in their grammar to the relations "larger" and "smaller" between two lengths, and are therefore designated by these words. The instruction to work out the places of $\sqrt{2}$ is the numeral for the irrational number itself; and the reason I speak of a "number" here is that I can calculate with these signs (certain rules for the construction of rational numbers) just as I can with the rational numbers themselves. So if, in an analogous fashion, I want to say that the instruction to bisect endlessly using heads and tails determines a point, a number, that would have to mean that this instruction could be used as a numeral, i.e. analogously to other numerals. But of course that is not the case. Should this instruction correspond to a numeral at all, it would at best (very remotely) correspond to the indeterminate numeral "some", for all it does is to leave a number open. In a word, nothing corresponds to it except the original interval AB.

Anhang I

(Hg.): Das hier Folgende haben wir dem MS 111, S. 147–8 entnommen. Wittgenstein scheint sich in Kap. 130 darauf zu beziehen.

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \quad \dots \quad (R)$$

$$\left. \begin{array}{l} a + (b + (c + 1)) \stackrel{R}{=} a + ((b + c) + 1) \stackrel{R}{=} a + (b + c) \\ (a + b) + (c + 1) \stackrel{R}{=} ((a + b) + c) + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a + (b + c) \\ = (a + b) + c \end{array} \quad (I)$$

$$\left. \begin{array}{l} (a + 1) + 1 \stackrel{S}{=} (a + 1) + 1 \\ 1 + (a + 1) \stackrel{R}{=} (1 + a) + 1 \end{array} \right\} a + 1 = 1 + a \quad (II)$$

$$\left. \begin{array}{l} a + (b + 1) \stackrel{R}{=} (a + b) + 1 \\ (b + 1) + a \stackrel{R}{=} b + (1 + a) \stackrel{II}{=} b + (a + 1) \stackrel{R}{=} (b + a) + 1 \end{array} \right\} a + b = b + a \quad (III)$$

$$a \cdot 1 = a \quad \dots \quad (D)$$

$$a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \quad \dots \quad (M)$$

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot (b + (c + 1)) \stackrel{R}{=} a \cdot ((b + c) + 1) \stackrel{M}{=} a \cdot (b + c) + a \\ a \cdot b + (a \cdot (c + 1)) \stackrel{M}{=} a \cdot b + (a \cdot c + a) \stackrel{I}{=} (a \cdot b + a \cdot c) + a \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot (b + c) \\ = a \cdot b + a \cdot c \end{array} \quad (IV)$$

(Eine Untersuchung Schritt für Schritt dieses Beweises wäre sehr lehrreich.) Der erste Übergang in I $a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1)$ wenn er nach R vor sich geht soll zeigen, daß die Variablen in R anders gemeint sind als die in den Gleichungen von I denn sonst erlaubte R nur $a + (b + 1)$ durch $(a + b) + 1$ zu ersetzen aber nicht $b + (c + 1)$ durch $(b + c) + 1$. Dasselbe zeigen auch die andern Übergänge dieses Beweises.

Wenn ich nun sagte, der Vergleich der beiden Zeilen des Beweises berechtigt mich die Regel $a + (b + c) = (a + b) + c$ zu folgern, so hieße das gar nichts, es sei denn ich hätte nach einer vorher aufgestellten Regel so geschlossen. Diese Regel aber könnte wohl nur

$$\left. \begin{array}{l} F_1(1) = F_2(1), F_1(x + 1) = f(F_1(x)) \\ F_2(x + 1) = f(F_2(x)) \text{ sein.} \end{array} \right\} F_1(x) = F_2(x) \quad \dots \quad (\rho)$$

Aber diese Regel ist vag in Bezug auf $F_1, F_2 + f$.

Appendix I

(Eds.): We have taken this section from MS 111, pp. 147–8. Parts of it appear to be referred to in Chapter 130 of the present work.

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \quad \dots \quad (\text{R})$$

$$\left. \begin{array}{l} a + (b + (c + 1)) \stackrel{\text{R}}{=} a + ((b + c) + 1) \stackrel{\text{R}}{=} a + ((b + c) + 1) \\ (a + b) + (c + 1) \stackrel{\text{R}}{=} ((a + b) + c) + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a + (b + c) \\ = (a + b) + c \end{array} \quad (\text{I})$$

$$\left. \begin{array}{l} (a + 1) + 1 \stackrel{\text{S}}{=} (a + 1) + 1 \\ 1 + (a + 1) \stackrel{\text{R}}{=} (1 + a) + 1 \end{array} \right\} a + 1 = 1 + a \quad (\text{II})$$

$$\left. \begin{array}{l} a + (b + 1) \stackrel{\text{R}}{=} (a + b) + 1 \\ (b + 1) + a \stackrel{\text{R}}{=} b + (1 + a) \stackrel{\text{II}}{=} b + (a + 1) \stackrel{\text{R}}{=} (b + a) + 1 \end{array} \right\} a + b = b + a \quad (\text{III})$$

$$a \cdot 1 = a \quad \dots \quad (\text{D})$$

$$a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \quad \dots \quad (\text{M})$$

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot (b + (c + 1)) \stackrel{\text{R}}{=} a \cdot ((b + c) + 1) \stackrel{\text{M}}{=} a \cdot (b + c) + a \\ a \cdot b + (a \cdot (c + 1)) \stackrel{\text{M}}{=} a \cdot b + (a \cdot c + a) \stackrel{\text{I}}{=} (a \cdot b + a \cdot c) + a \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot (b + c) \\ = a \cdot b + a \cdot c \end{array} \quad (\text{IV})$$

(A step-by-step investigation of this proof would be very instructive.) The first step in I, $a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1)$, if it is made in accordance with R, shows that the meanings of the variables in R are different from those in the equations in I. For otherwise R would only allow the replacement of $a + (b + 1)$ by $(a + b) + 1$, and not the replacement of $b + (c + 1)$ by $(b + c) + 1$. The same thing appears in the other steps in this proof.

If I said that a comparison of the two lines of the proofs justifies me in inferring the rule $a + (b + c) = (a + b) + c$, that would mean nothing, unless I had deduced that in accordance with a previously established rule. But this rule could only be:

$$\left. \begin{array}{l} F_1(1) = F_2(1), F_1(x + 1) = f(F_1(x)) \\ F_2(x + 1) = f(F_2(x)) \end{array} \right\} F_1(x) = F_2(x) \quad \dots \quad (\rho)$$

But this rule is vague with regard to F_1 , F_2 , and f .

Register

- Ableitung, ableiten, Deduktion, 127, 152, 210,
220, 222, 224, 233, 278, 377, 404, 407, 416,
432, 434, 456–8, 460, 486
- Absicht, 117–18, 145, 216–18, 280, 481;
siehe auch: Intention, Vorsatz
- Allgemeinheit, Allgemeinheit-, 44, 50, 57,
86, 91–2, 204, 208, 238, 242–3, 246–51,
253–8, 271, 383, 402, 415, 419, 444, 449,
452–3, 455–7, 460, 462, 467, 469–71, 474,
483, 485–6, 488, 492–4
- Assoziatives Gesetz *siehe*: Gesetz
- auffassen, 6, 8, 14, 32, 88, 129, 144, 146, 166,
192, 199, 237, 251, 256, 289–90, 304, 340,
363, 372, 388, 396, 402, 411–12, 416, 457,
470, 474, 501
- Auffassung, 3, 10–11, 21, 23–4, 35, 82, 103–4,
158, 176–7, 202–3, 221, 230, 234, 249,
259, 266, 281, 287, 300–1, 316, 332, 341,
364, 388, 391, 399, 407, 413, 415, 419, 421,
439, 441, 450, 455, 457, 474, 487, 496, 498,
504
- Augustinus, Aurelius, 23–4, 114, 496
- ausgeschlossenes Drittes *siehe unter*: Gesetz
- axiom of infinity, 393
- bedeuten, 5, 11, 26–7, 30–2, 34, 41–2, 44,
52–3, 68, 89, 106, 115, 124–6, 134–5, 145,
151, 154, 168, 180, 185–6, 197, 201, 209,
211–12, 248, 258, 264, 267, 269, 276, 288,
291, 302, 305, 315, 320, 325, 329, 341,
344–5, 356, 388, 403, 406, 411, 413, 415,
425, 430, 432, 439, 445–6, 453, 458, 460,
470–1, 483, 490, 494, 499, 500, 504
- Bedeutung, 2, 6, 10, 15, 22–38, 40–2, 44–6, 48,
50–2, 54, 56–8, 66, 72, 74–6, 84–5, 88,
90, 96–8, 107–8, 110, 115–16, 118–19,
121–5, 130–1, 134–7, 142, 145, 148,
152–3, 155, 157–8, 160, 163, 184–5, 191,
198–9, 201, 203, 206–7, 210–11, 223, 228,
245, 253–4, 258, 272–3, 282–3, 285–8,
295, 300, 304–5, 307–8, 312, 315, 317,
321, 323, 325–7, 329, 331, 336–7, 340, 343,
352, 354–5, 359, 361, 363, 366–7, 373–4,
378–81, 383–5, 389, 393, 398, 401, 407,
414, 424–5, 430, 432, 442, 452, 456, 460,
467, 471, 483, 489, 491, 493–4, 497,
500–1, 503
- Bedeutungskörper, 37, 125
- Befehl, befehlen(d), 4, 6, 8, 10, 12–17, 19, 20,
34, 38–43, 71–5, 77, 108, 110, 112, 130,
132, 136–7, 138, 142, 146, 148, 150, 151–2,
162–3, 189, 193–4, 216, 219–20, 226, 252,
254–6, 266, 268, 275–8, 282–3, 286, 380,
441
- behaviourism, behaviouristisch, 133, 221–2, 273,
334, 350, 358
- Beweis der Relevanz, 378–9
- Broad, C. D., 62
- Brouwer, L. E. J., 107, 487
- Busch, Wilhelm, 431
- Cantor, Georg, 494
- Carnap, Rudolf, 82
- Carroll, Lewis, 59
- Dedekind, Richard, 489, 491
- Deduktion *siehe*: Widerspruch
- definition, 10, 13, 28, 30–1, 34, 38–42, 44–6,
54, 56–7, 102, 119, 129, 134–5, 189,
194–8, 201, 207, 230–1, 253, 255–7, 261,
294, 321–2, 331, 374, 379, 386–9, 393, 400,
405, 408, 415, 427, 444, 463–4, 469–70,
476–7, 481, 485, 491–2, 494
- hinweisende definition, 30, 39–41, 45–6,
134–5, 386, 408
- denken (sich denken), 7–8, 16, 24–5, 30–2, 35,
42–3, 57, 59, 62–3, 78, 80, 82, 84–5, 97,
99, 101, 103, 106–8, 112, 118–19, 125,
129–30, 137, 139, 146–7, 149–51, 154,
157, 162–3, 166, 169, 172, 178–9, 181,
186, 190, 192–3, 195–6, 198–9, 201–3,
206, 208, 211, 216, 220, 227, 235–6, 242,
247, 249, 251, 253, 256, 261, 271, 295–6,
304, 313, 317, 322, 326–7, 330, 332, 336,
340, 343, 349, 357–8, 361, 368, 371, 374,
380, 384, 395–6, 398, 407–8, 415, 418–20,

- denken (sich denken) (*cont'd*)
 422, 428, 434, 439, 448, 450, 454, 456–8,
 460, 464–5, 470, 476, 478, 481, 485–6,
 490–1, 502–4
- denken an, über, 6, 16–18, 23–4, 27, 40, 42, 44,
 52–3, 58, 62–4, 67, 78, 84, 87–8, 98, 107,
 117–19, 135, 138–9, 142, 148–9, 153–4,
 160, 162–3, 165–6, 172–3, 176–81, 192,
 195–6, 200, 208, 223, 225, 230, 233–4,
 242, 247, 255, 264–6, 271–2, 280–4,
 287–8, 290, 292, 295–6, 298, 302, 306,
 309, 311, 326–7, 331, 333, 335–8, 340–1,
 348–9, 351, 357, 361–2, 378, 384, 391,
 395–8, 402, 423, 426, 441, 448, 450, 456,
 466, 483, 487, 493
- Denken, das, 43, 52, 67, 76, 80, 87, 102, 120,
 156, 160, 165, 167–9, 172–3, 175–80, 228,
 234, 264, 283, 286–7, 290, 302, 311, 327,
 426, 492
- Deutung, deuten, 3, 14–16, 38, 43, 48, 56, 120,
 123, 127, 137, 152, 176, 278, 282, 287,
 326, 349, 364, 393, 420, 425, 444, 477;
vgl.: Auffassung
- Dirichlet, Lejeune, 388
- Disjunktion, disjungieren, 86, 91–2, 242, 244–5,
 254–6, 279, 378, 470, 483, 486
- distributives Gesetz *siehe*: Gesetz
- Driesch, Hans, 349
- Drury, Maurice O'Connor, 115
- Eddington, Arthur, 96, 364
- Einstein, Albert, 208, 488
- Elementarsatz, 82, 203
- Erinnerung, Erinnerungs-, 7–8, 33, 35, 67, 86,
 132, 136–8, 140, 151, 171, 225, 279, 284,
 289, 306, 327–8, 336, 347, 351, 364–5;
siehe auch: Gedächtnis
- Erklärung, 3, 8–11, 15, 23–4, 27–41, 44, 46–8,
 50, 54, 61, 65, 68, 88–9, 103, 116, 118–19,
 129–30, 132–7, 139, 141–2, 145, 152–3,
 168, 189, 191, 195, 198, 200, 206, 209, 211,
 219, 221, 249, 251, 256, 258, 262, 272–4,
 282, 285–6, 302, 307–9, 312, 316, 320,
 328–9, 356, 368, 377–8, 384, 387–9, 401,
 404, 414–15, 445, 461–2, 469, 471, 478,
 485, 489, 498
- hinweisende Erklärung, 38–9, 41, 44, 46,
 132–4, 142, 184–5, 276
- Ernst, Paul, 317
- Erwartung, erwarten, 4, 14, 18–19, 34, 38, 40,
 70–1, 73–4, 87, 94, 102, 118, 165, 171,
 178, 180, 223, 237, 259, 263–71, 273,
 275–80, 284–9, 292, 309, 348, 381, 385,
 421, 430, 455, 460
- Euklid, euklidisch, nicht-euklidisch, 105–6, 184,
 255, 323–6, 329, 331, 345, 414, 437, 496,
 500–1
- Euler, Leonhard, 434
- Existenzbeweis, 427–8, 434–5, 474
- Farbe, Farb(en)-, -farbe, (-)färbig, (-)farbig, 7,
 19, 23–5, 27–8, 31, 33–5, 37, 40–5, 56, 63,
 78–9, 83, 85, 89, 91–2, 95, 99, 123, 135–9,
 148, 152–3, 158, 163, 187–8, 196–7, 202,
 208, 232, 235, 238, 242, 244, 248–51, 253,
 267–8, 270–1, 274, 279, 287, 320–2,
 328–30, 334, 337–45, 348–9, 351, 359,
 365, 369, 391, 394–7, 408, 412, 421
- Fermat'scher Satz, Fermat'sches Problem, 211,
 420, 502
- Folgen, das *siehe*: Schluß
- Frazer, Sir James George, 309, 317
- Frege, Gottlob, 3, 34, 39, 55, 81, 160–1, 206,
 210, 247–8, 258, 282–3, 383, 393–4, 399,
 415, 475–8, 491, 494
- Freud, Sigmund, 433
- Galton, Sir Francis, 101
- Gebärde, Gebärdens-, 8, 13, 24, 37–40, 45–6,
 71–2, 130, 138–9, 154, 184, 317, 396;
siehe auch: Geste
- Gedächtnis, Gedächtnis-, 33–4, 111, 136–7,
 139, 166–7, 284, 293, 312, 351, 361–5, 491;
siehe auch: Erinnerung
- Gedanke, 11, 14, 18, 26, 52, 54, 71–2, 88–9,
 117–19, 124, 126, 135, 141, 148, 164–5,
 167–8, 172, 175–80, 207, 210, 214, 218,
 222–3, 225–6, 233, 246, 251, 257–8, 262,
 264, 268, 273–4, 280–4, 286–8, 290,
 296–7, 303, 314, 318, 322, 352, 356, 371,
 382–3, 398, 409, 415, 418–19, 433, 451, 495
- Geometrie, -geometrie, geometrisch, 44, 50, 56,
 100, 103, 105, 122–4, 126–7, 129, 150,
 184, 202, 206, 237, 243, 253, 323–5, 330,
 334–5, 345, 366, 382, 384, 386, 390–1,
 415, 422, 431, 437–9, 466, 490, 494
- Gesetz, -gesetz, Satz (Gesetz), 45, 62, 94,
 99–102, 104, 107, 115, 126–7, 144, 147,
 190–1, 197, 203, 210, 216, 249, 257, 261,
 292, 304, 307, 313, 365, 377, 401, 405, 410,
 418, 424, 426, 428, 432, 435, 444, 448, 452,
 460–4, 468–9, 480–1, 487, 489, 491, 494,
 497–504
- assoziatives Gesetz, 444, 461, 463, 480
- distributives Gesetz, 452
- Gesetz, Satz, des ausgeschlossenen Dritten,
 80, 107, 424, 435, 448, 487
- kommutatives Gesetz, 463, 480

- Gesichtsfeld, 255, 314, 320–2, 325–8, 330–2, 336–9, 349, 361, 366, 394, 403, 412, 500;
siehe auch: Gesichtsraum, Sehraum
- Gesichtsraum, 64, 191, 237, 242, 245, 255, 287, 322–5, 327–35, 337–8, 345, 351–2, 358, 361, 363, 365, 395, 414, 416, 500;
siehe auch: Sehraum, Gesichtsfeld
- Geste, 6, 8, 13, 27, 37, 40, 45–6, 87, 130, 154–5, 251; *siehe auch*: Gebärde
- Goethe, Johann Wolfgang von, 429, 504
- Goldbach'scher Satz, 419, 432
- Grammatik, grammati(kali)sch, 10, 14, 18, 26, 28–9, 31–2, 35–6, 38, 44–5, 48, 50–4, 59, 61–4, 67, 73, 79–81, 83, 85–6, 91–2, 95, 100, 105–7, 115–18, 120–5, 127, 137, 141–9, 150, 152–3, 156, 158, 161, 163, 165, 178, 181, 183–9, 191, 195–6, 202–3, 206–9, 238–9, 242, 246–7, 249–50, 253, 255–6, 259, 270, 276, 285, 287–8, 290, 297, 302, 304–8, 311–15, 320–4, 329, 332, 334–5, 340–2, 345, 352, 354–5, 357–8, 360, 365–8, 372, 380–1, 383–6, 391, 393, 395, 397–8, 407, 409–11, 413, 416, 420, 423–4, 426, 430, 432, 439, 442, 450, 453, 455, 457, 475, 477, 483–4, 486, 491–3, 499, 504–5
- Hardy, G. H., 485
- heißen (bedeuten), 2–3, 7–9, 11–15, 17, 19–20, 27–8, 30–2, 37–8, 40–3, 45–6, 48, 50–3, 55–6, 58, 60–1, 64–5, 67–70, 73, 76–80, 83–5, 88–9, 95–6, 101, 103, 106, 108, 110–12, 114, 116–18, 120–1, 123–5, 130, 132, 136, 138, 142, 147–8, 151–3, 156–8, 163, 168, 173, 175, 178, 180, 184, 186, 188, 191, 193–5, 197–8, 201, 211, 214, 217, 219–20, 223, 225–6, 230–2, 234, 237, 243, 245–6, 248, 250, 252–3, 255–7, 260–1, 270–1, 273–4, 276, 279, 282–3, 289–91, 294, 297–8, 305, 308–9, 321–2, 328, 330, 338–40, 342, 344, 348–9, 352, 354, 356, 358–9, 361–2, 364, 367–8, 372, 376–7, 381, 383–6, 389, 391, 394–5, 399, 402–3, 408, 411, 413–16, 421, 426–8, 430–2, 435, 439–41, 446, 448–50, 452–8, 460, 462, 467, 475, 483–6, 489, 491–3, 500–1, 505
- Hertz, Heinrich, 310
- Hilbert, David, 376
- hinweisende Definition *siehe unter*: Definition
- hinweisende Erklärung *siehe unter*: Erklärung
- Hypothese, hypothetisch, 15, 19, 30, 69, 92, 94–6, 98, 103, 111, 115–17, 133–4, 162, 176, 180, 199, 205, 214, 290, 292, 295, 297, 318, 321, 324, 331, 334, 348–50, 357–8, 364, 371, 383, 386, 418–20, 426
- Idealismus, Idealist, 161, 346, 348, 351, 354, 373
- indirekter Beweis, 381
- Induktion, Induktions-, induktiv, 98, 400, 423, 427, 446, 448–50, 453–4, 456–8, 460–1, 464, 469, 471, 474, 478, 480
- Induktionsbeweis, 234, 443–4, 449, 457–8, 461, 464, 469, 471, 478, 480; *siehe auch*: induktiver Beweis
- induktiver Beweis, 448, 456, 464; *siehe auch*: Induktionsbeweis
- Intention, 10, 118–19, 143, 170, 213, 218, 221, 223, 225, 280–2; *siehe auch*: Absicht, Vorsatz
- Interpretation, interpretieren *siehe*: Deutung
- James, William, 29, 37
- Kalkül, Kalkül-, -kalkül, 3, 23, 33, 35, 39, 52–4, 65, 79, 81–2, 90, 110, 119–20, 134, 139, 146, 153, 157, 159, 161, 165, 181–2, 186, 188, 191, 196–8, 203–4, 209–11, 228, 231, 241–2, 253, 258–62, 286–8, 308, 372, 376–7, 379, 384–7, 393–4, 400, 404–7, 409, 424–31, 437–8, 444, 449, 451, 454, 457–8, 460, 462, 466, 469, 470–2, 474, 476–7, 479–81, 484, 487, 490, 493–5, 499–503
- Kalkulation *siehe*: Rechnung
- Kant, Immanuel, 451
- Kardinalzahl, 53, 248, 260–2, 339, 352, 365, 376, 378, 383, 392–4, 396, 399, 402, 407, 429, 437–9, 445–6, 449, 452–3, 455, 462, 469–71, 476, 481, 488, 490–3, 498–9, 502–3
- Kepler, Johannes, 210
- kommutatives Gesetz *siehe*: Gesetz
- Kontradiktion *siehe*: Widerspruch
- Kopfschmerz *siehe*: Schmerz
- Kronecker, Leopold, 352
- Lagrange, Joseph-Louis, 210
- Lichtenberg, Georg Christoph, 311, 490
- Liebig, Justus von, 477
- Logik, logisch, 3, 12–14, 24, 35, 44, 46, 50, 53, 55–7, 61–2, 71–2, 78, 80, 82–3, 90–3, 95, 99, 101–2, 111, 122–3, 130–1, 160, 189, 195, 198, 201, 204–7, 209, 223, 229–31, 233, 237–9, 242–4, 248–50, 252–3, 257–8, 281, 293, 308–9, 312, 321, 323–4, 327, 332, 339–41, 345, 351, 356–7, 363, 365, 367, 369, 374, 376–7, 379, 381, 383–7, 393,

- Logik, logisch (*cont'd*)
 401, 407–8, 413, 415, 419–21, 425, 435,
 437, 439–40, 456, 465, 469–70, 475, 478,
 483–4, 486–7, 491–4, 496, 502
Logisch-philosophische Abhandlung, 82, 141, 158,
 203, 340, 408
- Mach, Ernst, 322, 336–7
- Magenschmerzen *siehe*: Schmerz
- Mathematik, mathematisch, 2, 31, 48, 52, 54,
 63, 82, 90, 92, 139, 162, 209–10, 231, 308,
 348, 357, 370–3, 375–9, 383–4, 386, 389,
 391, 394, 402, 405, 410–11, 414, 417–18,
 420–6, 428–30, 432–5, 437, 441, 444,
 453, 458, 462, 473, 477, 482, 485–8, 490,
 493–5, 500, 502, 504–5
- Mechanik, 82, 101
- meinen (intendieren), 3–6, 9–10, 13–15, 21, 23,
 27–8, 33, 36–7, 40–3, 50, 52, 56, 58, 60–3,
 65, 74–5, 80, 83–4, 87–9, 91–2, 94–6,
 98–9, 113, 116–17, 119–20, 122–4, 126–7,
 133, 142, 146, 148, 151–4, 156–8, 160–1,
 163, 170, 177, 184, 192–3, 195–201, 204,
 207, 217, 226–8, 230, 232–4, 243, 251–6,
 258, 260, 267, 275–6, 278, 281–2, 286–8,
 292, 294–5, 297, 303, 306, 315, 320, 325,
 327, 329, 334, 338, 342–3, 349, 351, 353,
 355–6, 358–9, 367, 371, 373, 380, 391,
 394–5, 402, 408, 412, 418, 421, 426, 430,
 438, 451, 456–7, 459–60, 462, 476, 483,
 486, 495, 502–4
- Meinung, 2–3, 10–11, 21, 74, 101–2, 116, 127,
 153, 157, 170, 227–8, 231, 248, 281–2, 291,
 340, 365, 401, 466, 490, 494, 498
- Mengenlehre, 48, 489, 493–6
- Metalogik, 2–3, 13, 158, 220, 223, 305
- Metamathematik, 372, 376
- Metaphilosophie, 54
- Metaphysik, 2, 320
- Metapsychologie, 357
- minima visibilia, 329, 338
- Mißverständnis *siehe* Verständnis
- Nachprüfung, 378; *siehe auch*: Verifikation
- Naturwissenschaft, Naturlehre,
 naturwissenschaftlich, 199, 201, 302, 314,
 391, 420, 426, 429
- Negation, Negations-, 88–91, 122–6, 130, 146,
 154, 176–7, 187, 191, 235, 308, 380, 427;
siehe auch: Verneinung
- Nicod, Jean, 156
- Periodizität, 443, 450–1, 453, 466–7, 471–2,
 476, 479
- Phänomenologie, 91, 319–20, 322, 337
- Phantasiebild, 14, 136, 157, 275
- Philosoph, 35, 273, 291, 301–2, 306, 309,
 312–13, 315–16, 425, 432
- Philosophie, philosophisch, 23, 48, 50–1, 54,
 56–8, 111, 148–50, 160–1, 191, 202, 206,
 258–9, 299–300, 302, 304–17, 349, 352,
 355, 357–60, 365, 376, 405, 419, 424–5,
 433, 444, 495, 500
- philosophieren, 178, 203, 302, 314, 316
- Physik, -physik, 92, 95–7, 101, 307–8, 320, 322,
 324, 373, 393, 419, 429
- physikalisch (zur Physik gehörend), 103, 383,
 418, 420
- Physiker, 96, 324, 359
- Plato(n), 23, 35, 54, 170, 176, 195, 270, 312, 317
- psychisch, 3, 13, 65, 130, 134, 160, 172, 176,
 218, 221–2, 351, 375; *siehe auch*: seelisch
- Psychologie, psychologisch, 34, 46, 106, 111,
 124, 126, 130–1, 134, 148, 160, 165, 172,
 176, 180, 209, 218, 221–3, 238, 251, 286,
 292, 322–3, 332, 351, 357, 380, 394, 431,
 435, 437, 453
- Ramsey, Frank P., 34, 62, 198, 308, 340, 382–5,
 387–9, 484
- Realismus, 161, 355, 373
- Realität, 70, 93–6, 142, 186, 226, 266, 268,
 277–8, 281, 287, 309, 314–15, 317, 327–8,
 351–4, 367, 385, 421
- Rechnung, Rechnungs-, -rechnung,
 Kalkulation, 104, 162, 168, 172, 176, 179,
 181–2, 185, 222, 258, 278, 286, 291, 343,
 373–4, 376, 382–5, 391, 398–400, 404,
 413, 427, 438, 444, 446, 449–50, 454–5,
 458, 460, 463, 468, 471, 473–4, 480, 494,
 503
- Regel, Regel-, -regel, 3, 18, 24–5, 28–9, 32,
 43–5, 47, 50, 52–5, 57, 59, 61–4, 74, 80–1,
 88, 90–2, 95, 97, 101–3, 106–7, 110–11,
 115–19, 121–6, 132–4, 140, 142, 144–53,
 158, 181, 184–203, 206, 214, 216–20, 222,
 224, 231–2, 234–5, 238, 241–2, 245, 249,
 251–62, 270, 274, 276, 278–9, 302, 305–7,
 313, 320, 322, 326–8, 340–1, 345, 354,
 363, 366–7, 373–4, 376–81, 383–4, 386,
 389, 394–5, 397, 400–2, 404–10, 412–16,
 420, 427, 429–31, 435, 438, 444, 447–8,
 453–6, 458–61, 463–4, 466–72, 474,
 476–8, 481, 483, 485, 487, 492, 494, 497,
 499–501, 503–4; *vgl.*: Gesetz
- Rekursionsbeweis, rekursiver Beweis, 445–6,
 452, 454, 462, 464, 468, 471–3, 480–1
- Riemann, Bernhard, 420

- Russell, Bertrand, 59, 156, 197–8, 203, 208,
231, 247–9, 376–7, 382–5, 393, 401,
407–8, 414–15, 421, 425, 476–8, 494
- Satz *siehe*: Gesetz
- Schluß, Schluß-, 229–33, 236–8, 256, 293, 418,
425, 452–3, 455–6
- Schmerz, Schmerz-, -schmerz, schmerz-, 2, 17,
29, 41, 78, 83–6, 94, 163, 166–7, 174–6,
265, 280, 290–2, 295, 356–62, 441
Kopfschmerz, 111, 361
Magenschmerzen, 2, 174, 280–2, 286, 295,
297
Zahnschmerz, 18, 93, 95, 111, 114, 120, 156,
163, 166, 279, 281, 289–91, 349, 356–62
- Schopenhauer, Arthur, 281, 300
- Seelenzustände, 286
- seelisch, 3, 11, 124, 160, 223, 251, 371, 375;
siehe auch: psychisch
- Sehraum, 323, 325, 333, 421; *siehe auch*:
Gesichtsfeld; Gesichtsraum
- Shakespeare, William, 194
- Sheffer, Henry M., 419, 476–8
- Sinn, 2–3, 6–10, 12–13, 15–17, 19, 21, 24–6,
28–30, 32, 34–9, 41–6, 48, 51–4, 56–61,
63–5, 67, 69, 71, 76, 78–80, 82–5, 89,
92–4, 96, 98–101, 105–8, 110, 112, 116,
118–21, 123–7, 129–30, 137–9, 144–5,
147, 149, 151–2, 154–8, 161–3, 166,
173–4, 176–7, 181, 184, 186–93, 195,
197–8, 201, 204, 206–12, 214, 217–20,
222, 225–7, 230–7, 239, 241–2, 248, 251,
254–6, 258, 260, 262, 264, 267–8, 270,
272, 274–82, 285–7, 289–90, 294–7,
300–1, 305, 308, 310, 315, 317, 320–6,
328–34, 336–45, 347–50, 352–61, 363–6,
368–9, 371–4, 379, 381–4, 386, 388–91,
394, 396, 398–400, 402–3, 406–8, 410–16,
418–21, 423–32, 434–5, 437–41, 444–6,
449, 453–6, 458–65, 468–9, 471–2, 474,
476, 478, 481, 483–93, 495–8, 500–4;
siehe auch: Bedeutung
- Sinnesdatum, 320–1, 347–8, 351, 358–9
- sinnvoll, 52, 59, 63, 81, 83, 148, 219, 357, 360,
386, 389, 402, 407, 439, 450, 492
- Skolem, Thoralf, 445, 460–1, 463, 480
- Sokrates, 35, 54, 56, 170, 270
- Solipsismus, 166, 351, 354, 358
- Spengler, Oswald, 204, 307, 378
- Spiel, Spiel-, -spiel, 4–5, 7, 23–5, 34–5, 45–7,
53–8, 61, 63–4, 79, 81, 90–2, 97, 101, 104,
106–7, 110–11, 113–14, 116–19, 124, 126,
133, 134–6, 139–40, 145–7, 149, 150–2,
156–9, 161–2, 177, 181, 184, 185–9,
192–6, 198–200, 202, 206, 211, 238, 253,
260–1, 285–6, 290, 292, 302, 313, 371–4,
380, 385–7, 393, 395, 401, 420, 424, 428,
430, 432, 438, 447, 454, 458, 479, 485, 494,
499–500
- Sprachspiel, 4, 7, 63, 156, 159, 162, 290, 292
- Sraffa, Piero, 190
- Syllogismus, 204
- Tautologie, 79, 126, 249, 377, 388–90, 400–9,
416, 492
- Tolstoi, Leo, 300
- Verifikation, 41, 69, 81, 94, 112, 137, 187,
207–9, 211, 242, 290, 325, 354, 356,
363, 418–19, 483–4, 487–8; *siehe*:
Nachprüfung
- Verneinung, Verneinungs-, 37, 79, 86–8, 90,
96, 117, 122–4, 161, 191, 341, 373, 427,
429, 467, 470, 484; *siehe*: Negation
- Verstand, 300, 312, 492
- Verständnis, 3, 6–10, 12–13, 27, 29, 35, 38,
40–2, 46, 69, 85, 112–14, 116, 120, 123,
127, 133–5, 176, 190, 200, 216, 230, 252,
266, 272, 278, 300, 308, 401, 419, 454, 478,
484, 490, 504
Mißverständnis, 3, 9, 30–2, 46, 54, 56, 58,
90, 149, 202, 267, 274, 324, 364
unmißverständlich, 42, 45, 312, 413
- verstehen, 2–3, 5–17, 19–20, 23, 27, 29–31,
35, 37, 39–41, 43, 46, 48, 56, 59–60, 62,
76, 88, 92, 100–1, 108, 110–11, 113–14,
116, 119–20, 122–4, 129–30, 132, 139,
142, 146, 148, 152, 158, 163, 166, 173,
176–7, 180, 191, 198, 200, 208, 210–11,
230, 235, 238, 251–2, 256, 261–2, 281–2,
291–2, 307–8, 312, 316, 321–2, 326, 332,
334, 341, 343–4, 351–2, 354, 360, 364,
368, 378, 380, 382, 389, 401, 403–4, 420,
423, 428, 431, 452, 455, 459, 475–6, 478,
483–4, 490, 494, 498–500, 502, 504
- Verstehen, das, 1–3, 6–7, 9, 12–15, 18–19, 27,
37, 40, 57, 60, 109, 113–14, 120, 122, 148,
165, 176, 197, 230, 251–2, 262, 282–3,
300, 308, 349–50, 475, 478
- Vorsatz, 118, 458; *siehe*: Absicht, Intention
- vorschweben, 15, 119, 283, 359
- Vorstellung, Vorstellungs-, 13–14, 19, 26,
33–4, 40, 52, 65, 69, 78–9, 84, 111, 118,
127, 132, 134–5, 138, 155, 157, 170–1,
173, 190, 210, 225–7, 266–7, 270, 272–3,
281, 296, 298, 311, 315, 328, 330, 334,
340, 342, 348, 351, 354–5, 357, 363, 384,
503–4

- Wahrheitsfunktion, 61, 82, 91–3, 230–2, 476
 Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeits-,
 98–104, 312, 398
 Whitehead, Alfred North, 376
 Widerspruch, Kontradiktion, 34, 79, 105, 126,
 181, 329, 340–1, 380–1, 388–90, 421, 470,
 500
 Widerspruchsfreiheit, Beweis der, 379–80
 Wirklichkeit, 14, 19, 23, 28, 32, 38, 45, 50,
 52, 56, 59, 67, 70–1, 96, 104, 122, 129,
 135, 137–8, 141–3, 148, 151, 156,
 158–9, 170–1, 181, 184, 187, 190, 198,
 202, 217, 226–8, 232, 255, 258–9, 266–7,
 270, 272, 274, 277, 283, 286–8, 291, 314,
 321–2, 327, 334, 337, 348, 354, 367, 378,
 385–7, 391, 395, 402, 415, 423, 428–9,
 431, 451, 458–9, 466, 471, 475, 484, 497,
 502, 504
 Wissenschaft, wissenschaftlich, 2, 57, 95, 198,
 202, 300–2, 360, 391
 Wortsprache, 38–9, 45, 78, 87, 114, 129–30,
 139, 155, 184, 191–2, 247, 317, 401, 407–8,
 414, 428, 455, 457, 462, 470, 483
 Zahnschmerz *siehe*: Schmerz
 Zeit, zeit-, -zeit, 18–19, 21, 57, 74, 84, 91–3,
 100, 102, 104, 109, 113–16, 118, 124, 136,
 156, 158, 179–80, 186, 193, 197–9, 201,
 208, 216–17, 227, 253, 264–5, 279, 289,
 309, 312, 314–15, 322, 341, 348, 351–4,
 361–5, 368, 384, 414, 426, 484, 493, 496,
 503

Index

- associative law *see* law – associative law
Augustine, Aurelius, 23–4, 114, 496
axiom of infinity, 393
- behaviourism (behaviourist), 133, 221–2, 273,
334, 350, 358
Broad, C. D., 62
Brouwer, L. E. J., 107, 487
Busch, Wilhelm, 431
- calculation, 54, 168, 172, 176, 179, 181–2, 185,
222, 249, 253, 258, 278, 286, 291, 343,
372–4, 376, 382–5, 391, 398–400, 404,
413, 420, 425, 427, 438, 444, 446, 449, 452,
454–5, 458, 460, 463, 468, 471, 473–4,
480–1, 494, 503
calculus, 3, 23, 33, 35, 39, 52–4, 65, 79, 81–2,
90, 104, 110, 119–20, 134, 139, 146, 153,
157–8, 161, 165, 181, 185, 188, 191,
196–8, 203–4, 209–11, 228, 231, 241–2,
253, 258–62, 286–8, 308, 372, 376–9,
384–7, 393–4, 400, 404–7, 409, 424–31,
437–8, 444, 449, 451, 454, 457–8, 460, 462,
466, 469, 470–2, 474, 476–7, 479–81, 484,
487, 490, 493–5, 499–503
Cantor, Georg, 494
cardinal numbers, 53, 248, 260–2, 339, 352,
365, 376, 378, 383, 392–4, 396, 399, 402,
407, 429, 437–9, 445–6, 449, 452–3, 455,
462, 469–71, 476, 481, 488, 490–3, 498–9,
502–3
Carnap, Rudolf, 82
Carroll, Lewis, 59
colour (coloured), 7, 19, 23–5, 27–8, 31, 33–5,
37, 40–5, 56, 63, 78–9, 83, 85, 89, 91–2,
95, 99, 123, 125, 134–9, 148, 152–3, 158,
163, 184, 187–8, 196–7, 202, 208, 232,
235, 238, 242, 244, 248, 250–1, 253, 268,
270–1, 274–5, 279, 287, 320–2, 328–30,
334, 337–45, 348–9, 351, 359, 365, 369,
391, 394–7, 412–14, 421
command, 6, 8, 10, 12–15, 17, 19, 20, 34,
38–40, 71–5, 77, 108, 110, 112, 132,
136–7, 146, 148, 150–2, 162–3, 189,
193–4, 219–20, 226, 252, 254–6, 266,
268, 275–8, 282–3, 286, 380, 441; *see also*
order
commutative law *see* law – commutative law
consistency proof, 379–80
contradiction, 79, 105, 126, 181, 193, 329,
340–1, 380–1, 388–90, 421, 470, 500
- Dedekind, Richard, 489, 491
deduction (deduce), 102, 127, 152, 207,
210, 233, 290, 308, 404, 456; *see also*
derivation
definition, 10, 13, 24, 28, 30–1, 34, 38–42,
44–6, 54, 56–7, 102, 108, 119, 129, 134–5,
137, 157, 189, 194–8, 201, 207, 230–1,
253, 255–7, 261, 321, 322, 331, 374, 377–9,
386–9, 393, 400–1, 405, 408, 414–15, 427,
444–5, 461, 463–4, 469–71, 476–7, 481,
485, 491–2, 494
derivation (derive), 24, 40, 127, 203–4, 220,
222, 224, 231, 255, 278, 308, 377, 407,
412–13, 427, 432, 456–8, 460–1, 475, 480,
486, 494, 503; *see also* deduction
Dirichlet, Lejeune, 388
disjunction, 86, 91–2, 242, 244–5, 254–6, 279,
378, 470, 483, 486
distributive law *see* law – distributive law
Driesch, Hans, 349
Drury, Maurice O'Connor, 115
- Eddington, Arthur, 96, 364
Einstein, Albert, 208, 488
elementary proposition, 82, 203
entailment, 230–2, 234, 256; *see also* inference
Ernst, Paul, 317
Euclid (Euclidean), 105–6, 184, 255, 323–6,
329, 331, 345, 414, 437, 496, 500–1
Euler, Leonhard, 434
excluded middle *see* law – law of the excluded
middle
existence proof (proof of existence), 427–8,
434–5, 474

- expectation (expect), 3, 14, 18–19, 34, 38, 40, 70–1, 73–4, 87, 94, 102, 118, 151, 156, 165, 171, 178, 180, 202, 223, 237, 259, 263–71, 273, 275–80, 284–9, 292, 309, 348, 381, 421, 430, 455, 460
- explanation (explain), 3–4, 8–11, 13, 15, 23, 26–41, 44–8, 50, 54, 58, 65, 88–9, 92–6, 103–4, 106, 116, 118–19, 129, 130, 132–6, 138–9, 141–2, 145, 152–4, 156, 158, 163, 168, 181, 184–5, 189, 191, 195, 198–200, 206–7, 209, 211, 219, 221, 243, 245, 249, 251, 253, 256, 258, 261–2, 272–4, 276, 282–6, 294, 302, 306–9, 312, 316, 320, 328–9, 331, 356, 367–8, 373, 378, 384, 388–9, 401, 405–6, 415, 432, 448, 459, 462, 469–71, 478, 483–5, 489, 498
- Fermat's theorem, 211, 420, 502
- Frazer, Sir James George, 309, 317
- Frege, Gottlob, 3, 34, 39, 55, 81, 160–1, 206, 210, 247–8, 258, 282–3, 383, 393–4, 399, 415, 475–8, 491, 494
- Freud, Sigmund, 433
- Galton, Sir Francis, 101
- game, 3, 5, 7, 23–5, 34, 35, 45–7, 53–8, 61, 63–4, 79, 81, 90–2, 97, 101, 104, 106–7, 110–11, 113–14, 116–20, 124, 126, 130, 133, 134–6, 139–40, 145–7, 149, 150–2, 156–62, 177, 181, 184, 185–9, 192–200, 202, 204, 206, 211, 238, 253, 260–1, 286, 290, 292, 302, 313, 371–4, 380, 385–7, 393, 395, 401, 420, 424, 428, 430, 432, 437, 447, 454, 458, 479, 485, 494, 499–500; *see also* language-game
- generality, 44, 50, 57, 86, 91–2, 204, 208, 238, 242–3, 246–51, 253, 254–8, 271, 383, 402, 415, 419, 444, 452–3, 455–7, 460, 462, 467, 469–71, 474, 483, 485–6, 488, 492–4
- geometry (geometrical), 44, 50, 56, 100, 103, 105, 122–4, 126–7, 129, 150, 184, 202, 206, 237, 243, 253, 323–5, 330, 334–5, 345, 366, 382, 384, 386, 390–1, 415, 422, 431, 437–9, 466, 490, 494
- gesture, 6, 8, 13, 24, 27, 37, 38–40, 45–6, 71–2, 87, 130, 138–9, 154–5, 184, 251, 317, 396
- Goethe, Johann Wolfgang von, 429, 504
- Goldbach's conjecture, 419, 432
- grammar (grammatical), 10, 14, 18, 26, 28–9, 31–2, 35–6, 38, 44, 45, 48, 50–4, 59, 61–4, 67, 73, 79–81, 86, 91–2, 95, 100, 105–6, 107, 115–18, 120–5, 127, 137, 141–50, 152–3, 156, 158, 161, 163, 165, 178, 181, 183–9, 191, 195–6, 202–3, 206–9, 238–9, 242, 246–7, 249–50, 253, 255–6, 259, 270, 276, 285, 287–8, 290, 297, 302, 304–8, 311–15, 320–4, 329, 332, 334–5, 340–2, 345, 352, 354–5, 357–8, 360, 365–8, 372, 380–1, 383–6, 391, 393–5, 397–8, 407, 409–11, 413, 416, 420, 423–4, 426, 430, 432, 439, 442, 450, 453, 455, 457, 475, 477, 483–4, 486, 491–3, 499, 504–5
- Hardy, G. H., 485
- Hertz, Heinrich, 310
- Hilbert, David, 376
- hypothesis (hypothetical), 15, 19, 30, 69, 92, 94–6, 98, 103, 111, 115–17, 133, 162, 176, 180, 199, 205, 214, 290, 292, 295, 297, 318, 321, 324, 331, 334, 348–50, 357–8, 364, 371, 383, 386, 418–20, 426
- idealism (idealists), 161, 346, 351, 348, 354, 373
- indirect proof, 381
- induction (inductive), 98, 234, 400, 423, 427, 443–4, 446, 448–50, 453–4, 456–8, 460–1, 464, 469, 471, 474, 478, 480
- inference, 229, 231, 233, 236–8, 293, 452–3, 456; *see also* entailment
- intention, 10, 21, 118–19, 143, 145, 153, 170, 213, 216–18, 221, 223, 225, 227, 280–2, 458, 481
- interpretation (interpret), 3, 14–16, 38, 43, 48, 56, 120, 123, 127, 137, 152, 176, 266, 278, 282, 287, 326, 349, 364, 393, 420, 444, 477
- James, William, 29, 37
- Kant, Immanuel, 451
- Kepler, Johannes, 210
- Kronecker, Leopold, 352
- Lagrange, Joseph-Louis, 210
- language-game, 3, 7, 63–4, 156, 159, 162, 290, 292
- law, 26, 62, 94, 99–102, 104, 107, 115, 126–7, 144, 147, 190–1, 197, 203, 210, 216, 249, 257, 261, 292, 304, 307, 313, 365, 377, 401, 405, 410, 418, 424–6, 428, 435, 444, 448, 452, 460–4, 468–9, 480–1, 487, 489, 491, 494, 497–504
- associative law, 444, 461, 463, 480
- commutative law, 463, 480
- distributive law, 452
- law of the excluded middle, 80, 107, 424, 435, 448, 487
- Lichtenberg, Georg Christoph, 311, 490

- Liebig, Justus von, 477
- logic (logical), 3, 12–14, 24, 35, 44, 46, 50, 53, 55–7, 61–2, 71–2, 78, 80, 82–3, 90–3, 95, 99, 101–12, 111, 122–3, 130–1, 160, 189, 195, 198, 201, 203–7, 209, 223, 229–31, 233, 237–9, 242–4, 248–50, 252–3, 257–8, 281, 293, 308–9, 312, 321, 323–4, 327, 332, 339–41, 345, 351, 356–7, 363, 365, 367, 369, 374, 376–7, 379, 381, 383–7, 393, 401, 407–8, 413, 415, 419–21, 425, 435, 437, 439–40, 456, 465, 469–70, 475, 478, 483–4, 486–7, 491–4, 496, 502
- Mach, Ernst, 322, 336–7
- mathematics (mathematical), 2, 31, 48, 52, 54, 63, 82, 90, 92, 139, 162, 209–10, 231, 308, 348, 357, 370–3, 375–9, 383–4, 386, 389, 391, 394, 402, 405, 410–11, 414, 417–18, 420–6, 428–9, 430, 432–5, 437, 441, 444, 453, 458, 462, 473, 477, 482, 485–8, 490, 493–5, 500, 502, 504–5
- meaning (mean), 2–7, 9–10, 15, 17, 21, 23–38, 40–2, 44–6, 48, 50–2, 54, 56–61, 63–6, 72, 74–6, 78–85, 88–90, 95–6, 98, 107–8, 110, 113–25, 127, 130–2, 134–8, 142, 145, 147–8, 151–8, 160, 163, 168, 170, 177, 180, 184–5, 191, 195–6, 198–9, 200–1, 206–7, 210–11, 219, 223, 226–8, 231, 233–4, 243, 245, 253–4, 258, 269–70, 272–4, 276, 278, 281–3, 285–8, 290, 292, 296, 300, 303, 305–8, 312, 315, 317, 321, 325–7, 329, 331, 336–7, 340, 343–4, 349, 354, 357–60, 363, 366–7, 373, 378–81, 383–6, 389, 391, 393, 395, 401–3, 407–8, 413–14, 424–5, 428, 430, 432, 439, 441–2, 450, 452–3, 455, 456–7, 460, 462, 467, 471, 483, 486, 489, 491–5, 498, 500–1, 503–4
- meaning-body, 37, 125
- mechanics, 82, 101, 373
- memory, 8, 33–5, 67, 86, 111, 132, 136–9, 151, 166, 167, 171, 225, 279, 284, 289, 293, 312, 327–8, 336, 347, 351, 361–5, 441
- mental image, 14, 19, 26, 33–4, 40, 52, 69, 78–9, 111, 118, 127, 132, 135, 138, 157, 170–1, 173, 179, 190, 210, 225–7, 266–7, 270, 272–3, 275, 281, 284, 296, 298, 327, 330, 354–5, 359, 363, 384, 503–4
- metalogue, 2, 3, 13, 158, 220, 223, 305
- metamathematics, 372, 376
- metaphilosophy, 54
- metaphysics, 2, 320
- metapsychology, 357
- minima visibilia*, 329, 338
- negation, 37, 85–90, 117, 122–6, 130, 146, 154, 176–7, 187, 191, 235, 308, 341, 373, 380, 427, 429, 444, 467, 470, 484
- Nicod, Jean, 156
- order, 3, 10, 15–16, 40–3, 75, 130, 132, 136–8, 142, 162, 216, 275, 278, 282, 441; *see also* command
- ostensive definition, 30, 38–41, 45–6, 134–5, 386, 408
- ostensive explanation, 27, 38–9, 41, 44, 46, 132–4, 142, 184–5, 276
- pain, 2, 17, 29, 41, 78, 83–6, 94, 163, 166–7, 174–6, 265, 280, 290–2, 295, 356–62, 441
- headache, 111, 361
- stomach ache, 2, 174, 280–2, 286, 295, 297
- toothache, 18, 93, 95, 111, 114, 120, 156, 163, 166, 279, 281, 289–91, 349, 356–62
- periodicity, 443, 450–1, 453, 466–7, 471–2, 476, 479
- phenomenology, 91, 319–20, 322, 337
- philosopher (philosophers), 35, 273, 291, 301–2, 306, 309, 312–13, 315–16, 425, 432
- philosophy (philosophical, philosophize), 23, 48, 50–1, 54, 56–8, 111, 148–50, 160–1, 178, 191, 202–3, 206, 258–9, 299–300, 302, 304–17, 349, 352, 355, 357–60, 365, 376, 405, 419, 424–5, 433, 444, 495, 500
- physics, 92, 95–7, 101, 103, 307–8, 320, 322, 324, 373, 383, 393, 418, 420, 429
- physicists, 96, 324, 359
- Plato, 23, 35, 54, 170, 176, 195, 270, 312, 317
- probability, 98–104, 312, 398
- proof by induction, 448–9
- proof of relevance, 378–9
- psychology (psychological), 3, 13, 34, 46, 65, 106, 111, 124, 126, 130–1, 134, 148, 160, 165, 172, 176, 180, 209, 218, 221–3, 238, 251, 286, 292, 322–3, 332, 351, 357, 375, 380, 394, 431, 435, 437, 453
- Ramsey, Frank P., 34, 62, 198, 308, 340, 382–5, 387–9, 484
- realism, 161, 355, 373
- reality, 14, 19, 23, 32, 38, 45, 50, 52, 56, 59, 67, 70–1, 93–6, 122, 129, 135, 138, 141–3, 148, 156, 158–9, 170–1, 181, 184, 186–7, 190, 198, 202, 217, 226, 228, 232, 258–9, 266–8, 270, 272, 274, 277–8, 281, 283, 286–98, 291, 309, 314–15, 317, 321–2, 325, 327, 328, 334, 348, 351–4, 367, 385–7, 395, 402, 415, 421, 423, 428–9, 453, 466, 471, 475, 484, 497

- recursive proof, 445–6, 452, 454, 462, 464, 468, 471–3, 480–1
- Riemann, Bernhard, 420
- rule (rules), 3, 18, 24, 25, 28, 29, 32, 43–5, 47, 50, 52–5, 57, 59, 61–4, 74, 80–1, 88, 90–2, 95, 97, 101–2, 106–7, 110–11, 115–19, 121–6, 132–4, 140, 142, 144–53, 158, 181, 184–203, 206, 214, 216–20, 222, 224, 231–2, 234–5, 238, 241–2, 245, 249, 251–62, 270, 274, 276, 278–9, 302, 305–7, 313, 320, 322, 326–8, 340–1, 345, 354, 363, 366–7, 373–4, 376–81, 383–4, 386, 389, 394–5, 397, 400–2, 404–10, 412–16, 420, 427, 429–32, 435, 437–8, 444, 447–8, 453–6, 458–61, 463–4, 466–72, 474, 476–8, 481, 483, 485–7, 492, 494, 497, 499–501, 503–5
- Russell, Bertrand, 59, 156, 197–8, 203, 208, 231, 247–9, 376–7, 382–5, 393, 401, 407–8, 414–15, 421, 425, 476–8, 494
- Schopenhauer, Arthur, 281, 300
- science, 2, 57, 95, 199, 201–2, 300, 302, 314, 391, 419–20, 426, 429
- sense, 2, 3, 6–10, 12–13, 15–17, 19, 21, 24–6, 28–30, 32, 34–9, 41–6, 48, 51–4, 56–61, 63–5, 67, 69, 71, 76, 78–80, 82–5, 89, 92, 94, 96, 98–101, 105–8, 110, 112, 116, 118–21, 123–7, 129–30, 133, 137–9, 144–5, 147–9, 151–2, 154–8, 161–3, 166, 173–4, 176–7, 180, 184, 186–93, 195, 197–8, 201, 203–4, 206–11, 214, 217–20, 222, 225–7, 230–1, 233–7, 239, 241–2, 248, 251, 254–6, 258, 260, 262, 264, 267–8, 270, 272, 275–82, 285–7, 289–90, 292, 294–7, 300–1, 305, 308, 310, 314–15, 317, 320–6, 328–45, 347–50, 352–61, 363–6, 368–9, 371–4, 379, 381–4, 386, 388–391, 394, 396, 398–400, 402–4, 406–8, 410–16, 418–21, 423–32, 434–5, 437–41, 444–6, 449, 453–6, 458–64, 468–9, 471–2, 474, 476, 478, 481, 483–93, 495–8, 500–4; *see also* meaning
- sense data, 320, 347–8, 351, 358–9
- set theory, 48, 489, 493–6
- Shakespeare, William, 194
- Sheffer, Henry M., 419, 476–8
- Skolem, Thoralf, 445, 460–1, 463, 480
- Socrates, 35, 54, 56, 170, 270
- solipsism, 166, 351, 354, 358
- Spengler, Oswald, 204, 307, 378
- Sraffa, Piero, 190
- syllogism, 204
- tautology, 79, 126, 249, 377, 388–90, 400–9, 416, 492
- thought (thinking), 5, 11, 14, 18, 23–4, 31–2, 43, 52, 54, 57, 62, 67, 71–3, 75–6, 80, 82, 87–90, 98, 102, 117–20, 124–6, 135, 141, 148, 156, 160, 164–9, 172–82, 196, 200, 207, 210, 214, 218, 222–3, 225–8, 233–4, 246–7, 249, 257–8, 262, 264–5, 268, 274, 280–4, 286–8, 290, 296–7, 300, 302–3, 307, 311, 314, 317–18, 322, 327, 331, 336–7, 340–1, 348, 352, 371, 373, 382–3, 397, 415, 418, 426, 433, 450, 456, 466, 483, 486–7, 492, 495, 498
- time, 16, 21, 74, 84, 91–3, 102, 104, 109, 113–16, 118, 124–7, 156, 158, 166, 180, 186, 193, 197–201, 204, 208, 217, 227, 236, 239, 253, 279, 289, 296, 307, 309, 312, 314–15, 341–2, 347–8, 351, 353, 356–7, 361–5, 368, 379, 386, 398, 414, 426, 430, 434–5, 441, 484, 493, 496, 503
- Tolstoy, Leo, 300
- Tractatus Logico-Philosophicus*, 82, 141, 158, 203, 340, 408
- truth-function, 61, 82, 91–3, 230–2, 476
- understanding (understand), 1–3, 5–10, 12–17, 18–21, 23–4, 27, 29–32, 35, 37–9, 40–3, 46, 48, 55–7, 59–60, 69, 76, 82, 85, 88–9, 92, 100–1, 108–14, 116–17, 119–27, 129–30, 132–5, 139, 142, 146, 148, 152, 163, 165–6, 176–7, 180–1, 190–1, 197–8, 200, 207–8, 210–11, 216, 230, 235, 247, 249, 251–2, 256, 261–2, 266, 272, 278, 281–3, 287, 290–2, 300, 304, 307–8, 312, 316, 321–2, 324, 326, 328, 331–2, 334, 340–1, 343, 349–50, 352, 354, 362–4, 368, 378, 380–2, 388, 391, 393, 401, 403, 412, 416, 419, 423, 428, 431, 439, 447, 452, 455, 459, 470, 473–6, 478, 483–4, 490, 499–504
- misunderstanding, 3, 9, 30–2, 46, 54, 56, 58, 90, 149, 202, 267, 270, 274, 290, 324, 364, 413, 420, 491
- verification, 41, 69, 81, 94, 112, 137, 187, 207–9, 211, 242, 290, 325, 354, 356, 363, 378, 418–19, 483–4, 487–8
- visual space, 237, 242, 245, 255, 287, 322–5, 327–35, 337–8, 345, 351–2, 358, 361, 363, 365, 395, 414, 421, 500
- Whitehead, Alfred North, 376
- word-language, 38–9, 45, 78, 87, 114, 129–30, 139, 155, 184, 191–2, 247, 317, 401, 407–8, 414, 428, 455, 457, 462, 470, 483